Exercice 1

Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^{x} \quad \text{et} \quad g(x) = 2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1.$$

On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère orthogonal.

1. Démontrer que les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ont un point commun d'abscisse 0 et qu'en ce point, elles ont la même tangente Δ dont on déterminera une équation.
2. Étude de la position relative de la courbe $\mathscr{C}_g$ et de la droite Δ.

   Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - x - 2$.

   (a) Déterminer la limite de la fonction h en $-\infty$.

   (b) Justifier que, pour tout réel $x, h(x) = x\left(\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}} - 1 - \dfrac{2}{x}\right)$.
   En déduire la limite de la fonction h en $+\infty$.

   (c) On note h' la fonction dérivée de la fonction h sur $\mathbb{R}$.
   Pour tout réel x, calculer $h'(x)$ et étudier le signe de $h'(x)$ suivant les valeurs de x.

   (d) Dresser le tableau de variations de la fonction h sur $\mathbb{R}$.

   (e) En déduire que, pour tout réel x, $2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1 \geqslant x + 1$.

   (f) Que peut-on en déduire quant à la position relative de la courbe $\mathscr{C}_g$ et de la droite Δ ?
3. Étude de la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

   (a) Pour tout réel x, développer l'expression $\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1\right)^2$.

   (b) Déterminer la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
4. (Question bonus)
   Soit (f_n) la famille de fonctions définie pour tout entier naturel n non nul par :

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = n\mathrm{e}^{\frac{x}{n}} - (n-1)$$

   On remarque que les fonctions f_1 et f_2 ainsi définies correspondent respectivement aux fonctions f et g précédemment étudiées.
   Pour tout entier n non nul, on note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n.
   Étudier pour tout entier naturel n non nul, la position relative des courbes $\mathscr{C}_n$ et $\mathscr{C}_{n+1}$.
   Indication : On pourra étudier pour tout entier naturel n non nul, la fonction h_n définie par :

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h_n(x) = f_{n+1}(x) - f_n(x)$$

Exercice 2

Les deux parties A et B peuvent être traitées indépendamment.

Les résultats seront donnés sous forme décimale en arrondissant à 10^{-4}.
Dans un pays, il y a 2 % de la population contaminée par un virus.

PARTIE A

On dispose d'un test de dépistage de ce virus qui a les propriétés suivantes :

- La probabilité qu'une personne contaminée ait un test positif est de 0,99 (sensibilité du test).
- La probabilité qu'une personne non contaminée ait un test négatif est de 0,97 (spécificité du test).

On fait passer un test à une personne choisie au hasard dans cette population.
On note V l'évènement « la personne est contaminée par le virus » et T l'évènement « le test est positif ».
$\overline{\mathrm{V}}$ et $\overline{\mathrm{T}}$ désignent respectivement les évènements contraires de V et T.

1. (a) Préciser les valeurs des probabilités $\mathrm{P(V)}, \mathrm{P_V(T)}, \mathrm{P}_{\overline{\mathrm{V}}}(\overline{\mathrm{T}})$.
   Traduire la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.

   (b) En déduire la probabilité de l'évènement $\mathrm{V} \cap \mathrm{T}$.

2. Démontrer que la probabilité que le test soit positif est 0,049 2.
3. (a) Justifier par un calcul la phrase :
« Si le test est positif, il n'y a qu'environ 40 % de « chances » que la personne soit contaminée ».
   (b) Déterminer la probabilité qu'une personne ne soit pas contaminée par le virus sachant que son test est négatif.

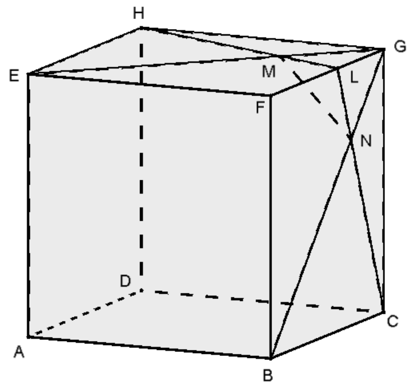
PARTIE B

On choisit successivement 10 personnes de la population au hasard, on considère que les tirages sont indépendants.
On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de personnes contaminées par le virus parmi ces 10 personnes.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
2. Calculer la probabilité qu'il y ait au moins deux personnes contaminées parmi les 10.

Exercice 3
Les deux questions de cet exercice sont indépendantes.

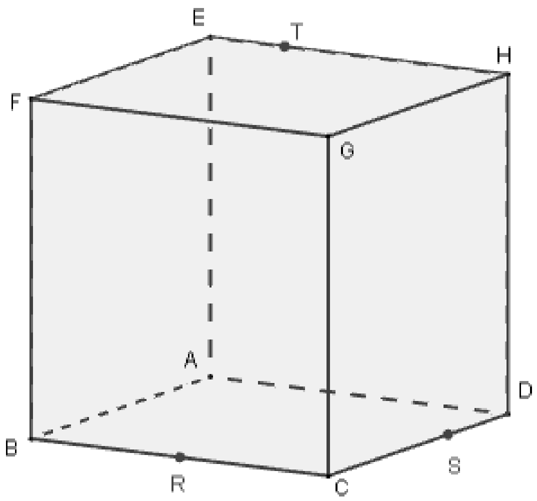
1. On considère un cube ABCDEFGH. Soit L un point du segment [FG].



Les droites (LH) et (GE) se coupent en M et les droites (LC) et (BG) se coupent en N.

Démontrer que les droites (MN) et (BE) sont parallèles.

2. On considère un cube ABCDEFGH.
Soient R le milieu du segment [BC], S un point du segment [CD] et T un point du segment [EH].
Construire ci-dessous la section du cube ABCDEFGH par le plan (RST).
On laissera apparent les traits de construction et on précisera les droites parallèles. Aucune autre argumentation n'est demandée.
On pourra s'aider des questions suivantes :
   - *Déterminer l'intersection des plans* (RST) *et* (ADE).
   - *Déterminer l'intersection des plans* (RST) *et* (EFG).



Corrigé de l'exercice 1 (Source : APMEP)
Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^{x} \quad \text{et} \quad g(x) = 2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1$$

On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère orthogonal.

1. Intersection de deux courbes :

$$\mathrm{M}(x\,;\ y) \in \mathscr{C}_f \cap \mathscr{C}_g \iff f(x) = g(x) \iff \mathrm{e}^{x} = 2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1 \iff \left\{\begin{array}{l} \mathrm{X} = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} \\ \mathrm{X}^2 - 2\mathrm{X} + 1 = (\mathrm{X}-1)^2 = 0 \end{array}\right. \iff \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} = 1 \iff x = 0$$

   Ainsi M a pour coordonnées $(0\,;1)$.

$$f'(x) = \mathrm{e}^{x} \Longrightarrow f'(0) = 1 \quad ; \quad g'(x) = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} \Longrightarrow g'(0) = 1$$

   En M, leurs tangentes ont, toutes deux le même cœfficient directeur 1,
   elles ont donc même tangente Δ d'équation $y = 1(x-0)+1 \iff y = x+1$.

2. Étude de la position relative de la courbe $\mathscr{C}_g$ et de la droite Δ
   Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - x - 2$.

   (a) Limite de la fonction h en $-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty} (-x) = +\infty \text{ car } \lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} = 0$$

   (b) Pour tout réel x

$$x\left(\frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}} - 1 - \frac{2}{x}\right) = x \times \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} \times \frac{2}{x} - x - x\frac{2}{x} = 2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - x - 2 = h(x)$$

   Limite de la fonction h en $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} x \times \frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}} = +\infty, \text{ car } \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0 \text{ et } \lim_{\mathrm{X}=\frac{x}{2}\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{X}}}{\mathrm{X}} = +\infty$$

   (c) Fonction dérivée de la fonction h sur $\mathbb{R}$:

$$h'(x) = 2 \times \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1 = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1$$

$$h'(x) > 0 \iff \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} > 1 \iff \frac{x}{2} > 0 \iff x > 0$$

   (d) Tableau de variations de la fonction h sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
h		$\searrow$	0	$\nearrow$	

   (e) La fonction h possède un minimum en 0 qui est 0. Donc :

$$\forall x,\ x \in \mathbb{R},\ h(x) \geqslant 0 \iff 2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - x - 2 = 2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1 - x - 1 \geqslant 0 \iff 2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1 \geqslant x + 1$$

   (f) Ainsi la courbe $\mathscr{C}_g$ se trouve au dessus de la droite d'équation $y = x+1$ qui est la droite Δ.

3. Étude de la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$

   (a) On a vu plus haut (question 1.) que, pour tout réel x, $\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1\right)^2 = f(x) - g(x) \geqslant 0$.

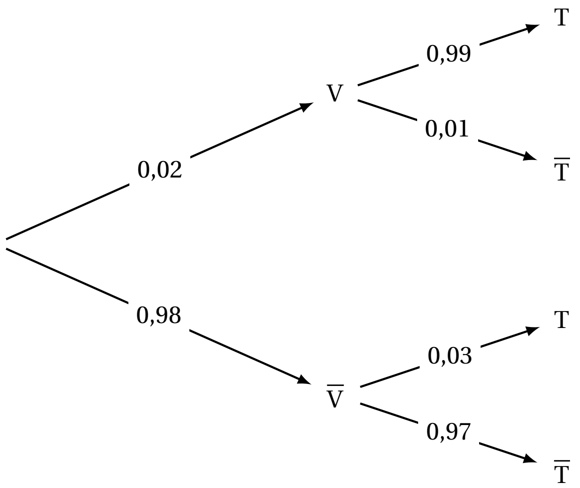
   (b) Ainsi la courbe $\mathscr{C}_f$ se trouve au dessus de la courbe $\mathscr{C}_g$.

Corrigé de l'exercice 2 (Source : APMEP)

PARTIE A

1. (a) D'après l'énoncé, on a : $P(V)0{,}02$; $P_V(T) = 0{,}99$; $P_{\overline{V}}(\overline{T}) = 0{,}97$.

Traduisons la situation par un arbre de probabilités :



(b) $P(V \cap T) = P_V(T) \times P(V) = 0{,}99 \times 0{,}02 = 0{,}0198$

2. Par conséquent : $P(V) = P(V \cap T) + P\left(V \cap \overline{T}\right) = P_T(V) \times p(T) + P_{\overline{V}}(T) \times P\left(\overline{V}\right)$ (formule des probabilités totales).
Alors : $P(T) = 0{,}99 \times 0{,}02 + 0{,}03 \times 0{,}98 = 0{,}0492$.

3. (a) Il faut calculer $P_T(V)$. Or : $P_T(V) = \dfrac{P(V \cap T)}{P(T)} = \dfrac{0{,}0198}{0{,}0492} \approx 0{,}4024$, soit environ 40%.
Il n'y a bien qu'environ 40 % de « chances » que la personne soit contaminée », sachant que le test est positif.

(b) La probabilité qu'une personne ne soit pas contaminée par le virus sachant que son test est négatif est :
$P_{(T)}\left(\overline{V}\right) = \dfrac{P\left(\overline{V} \cap \overline{T}\right)}{P(\overline{T})} = \dfrac{0{,}97 \times 0{,}98}{1 - 0{,}0492} \approx 0{,}9998$, c'est-à-dire environ 99,98 %.

PARTIE B

1. On a répétition de 10 épreuves identiques indépendantes à deux issues, donc X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(10\ ;\ 0{,}02)$.

2. Pour tout k, $(0 \leqslant k \leqslant 10)$, on a $P(X = k) = \dbinom{10}{k} \times 0{,}02^k \times (1 - 0{,}02)^{10-k}$.

Alors : $P(X \geqslant 2) = 1 - (P(X < 2)) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)] = 1 - \left[0{,}98^{10} + 10 \times 0{,}02 \times 0{,}98^9\right]$

$P(X \geqslant 2) \approx 0{,}0162$

Corrigé de l'exercice 3

1. La droite (CH) (incluse dans le plan (LHC)) et la droite (BE) (incluse dans le plan (GBE)) sont parallèles.
   Les plans (LHC) et (GEB) sont sécants suivant la droite (MN).
   D'après le "théorème du toit", la droite (MN) est parallèle aux droites (CH) et (BE).

2.