I VECTEUR DE L'ESPACE

Les définitions et opérations sur les vecteurs du plan se généralisent dans l'espace

1 VECTEURS COLINÉAIRES

Dire que deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires signifie, qu'ils ont la même direction, c'est-à-dire qu'il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.
Par convention, le vecteur nul $\vec{0}$ est colinéaire à tout vecteur.

- Trois points A, B et C sont alignés si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
- Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

2 VECTEURS COPLANAIRES

$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs de l'espace tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.
Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si, et seulement si, il existe deux réels α et β tels que :

$$\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$$

CONSÉQUENCE :
Pour démontrer qu'un point D appartient à un plan $\mathscr{P}$ défini par trois points non alignés A, B et C on montre que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.

II REPÉRAGE DANS L'ESPACE

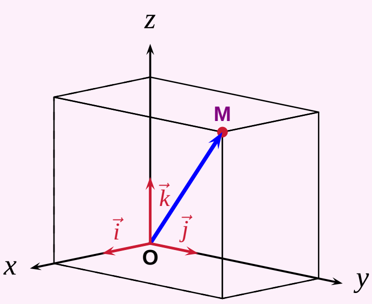
1 COORDONNÉES D'UN POINT

Dans un repère $\left(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, pour tout point M, il existe un unique triplet $(x;y;z)$ de réels tels que

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$(x;y;z)$ est le triplet de coordonnées du point M (ou du vecteur $\overrightarrow{OM}$).

x est l'abscisse, y est l'ordonnée, z est la cote.



2 CALCULS AVEC LES COORDONNÉES

Dans un repère $\left(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on considère les vecteurs $\vec{u}\,(x;y;z)$ et $\vec{v}\,(x';y';z')$.
- $\vec{u} = \vec{v}$ si, et seulement si, $x = x'$, $y = y'$ et $z = z'$.
- Le vecteur somme $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $\vec{u} + \vec{v}\,(x + x';y + y';z + z')$.
- Pour tout réel k, $k\vec{u}\,(kx;ky;kz)$.

Soit $A(x_A;y_A;z_A)$ et $B\,(x_B;y_B;z_B)$ deux points de l'espace :
- le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\overrightarrow{AB}\,(x_B - x_A;y_B - y_A;z_B - z_A)$.
- le milieu I du segment $[AB]$ a pour coordonnées $I\left(\dfrac{x_A + x_B}{2};\dfrac{y_A + y_B}{2};\dfrac{z_A + z_B}{2}\right)$.

Dans un repère **orthonormal** $\left(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$,

– La distance entre les points $A(x_A;y_A;z_A)$ et $B(x_B;y_B;z_B)$ est donnée par

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$$

– Deux vecteurs $\vec{u}\,(x;y;z)$ et $\vec{v}\,(x';y';z')$ sont orthogonaux si, et seulement si, $xx'+yy'+zz'=0$.

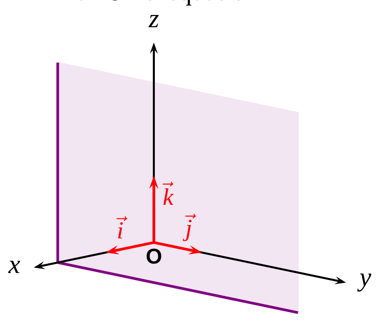
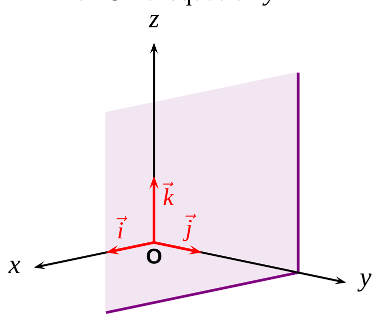
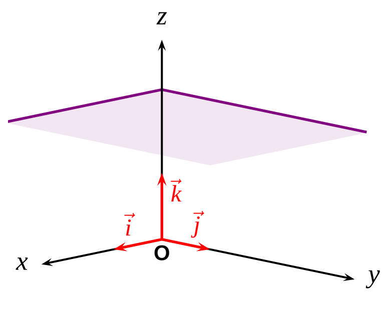
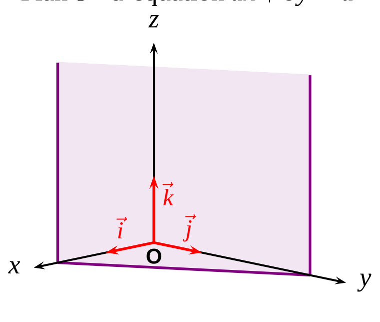
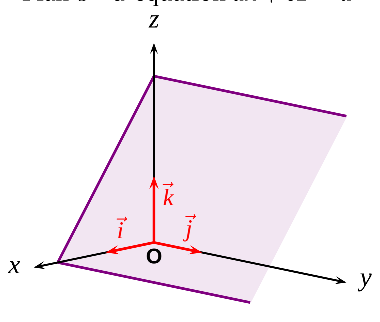
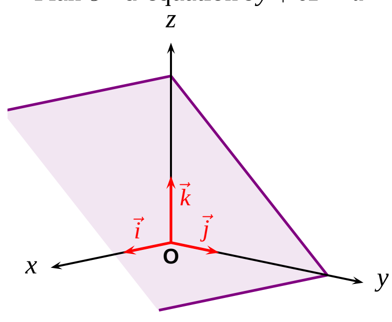
III ÉQUATIONS CARTÉSIENNES DE L'ESPACE

1 ÉQUATION D'UN PLAN

Un plan de l'espace a une équation de la forme $ax+by+cz=d$ avec a, b et c non tous nuls.

PLANS PARTICULIERS :

Un plan admettant une équation « incomplète », c'est à dire dans laquelle ne figure qu'une ou deux des trois variables x, y et z, est parallèle à un plan de coordonnées ou à un axe de coordonnées.

Plan $\mathscr{P}$ d'équation $x=k$	Plan $\mathscr{P}$ d'équation $y=k$	Plan $\mathscr{P}$ d'équation $z=k$
		
$\mathscr{P}//(y\mathrm{O}z)$	$\mathscr{P}//(x\mathrm{O}z)$	$\mathscr{P}//(x\mathrm{O}y)$
Plan $\mathscr{P}$ d'équation $ax+by=d$	Plan $\mathscr{P}$ d'équation $ax+cz=d$	Plan $\mathscr{P}$ d'équation $by+cz=d$
		
$\mathscr{P}//(\mathrm{O}z)$	$\mathscr{P}//(\mathrm{O}y)$	$\mathscr{P}//(\mathrm{O}x)$

2 VECTEUR ORTHOGONAL À UN PLAN

On dit qu'un vecteur $\vec{n}$ est orthogonal (ou normal) à un plan $\mathscr{P}$ si la direction de $\vec{n}$ est une droite orthogonale au plan $\mathscr{P}$. C'est à dire une droite orthogonale à toutes les droites du plan $\mathscr{P}$.

Dans un repère othonormal, le vecteur $\vec{n}\,(a;b;c)$ est orthogonal au plan $\mathscr{P}$ d'équation $ax+by+cz=d$.

3 PLANS PARALLÈLES

Deux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ d'équations respectives $ax+by+cz=d$ et $a'x+b'y+c'z=d'$ sont parallèles si, et seulement si, les coefficients a, b, c et a', b', c' sont proportionnels.

4 SYSTÈME D'ÉQUATIONS CARTÉSIENNES D'UNE DROITE

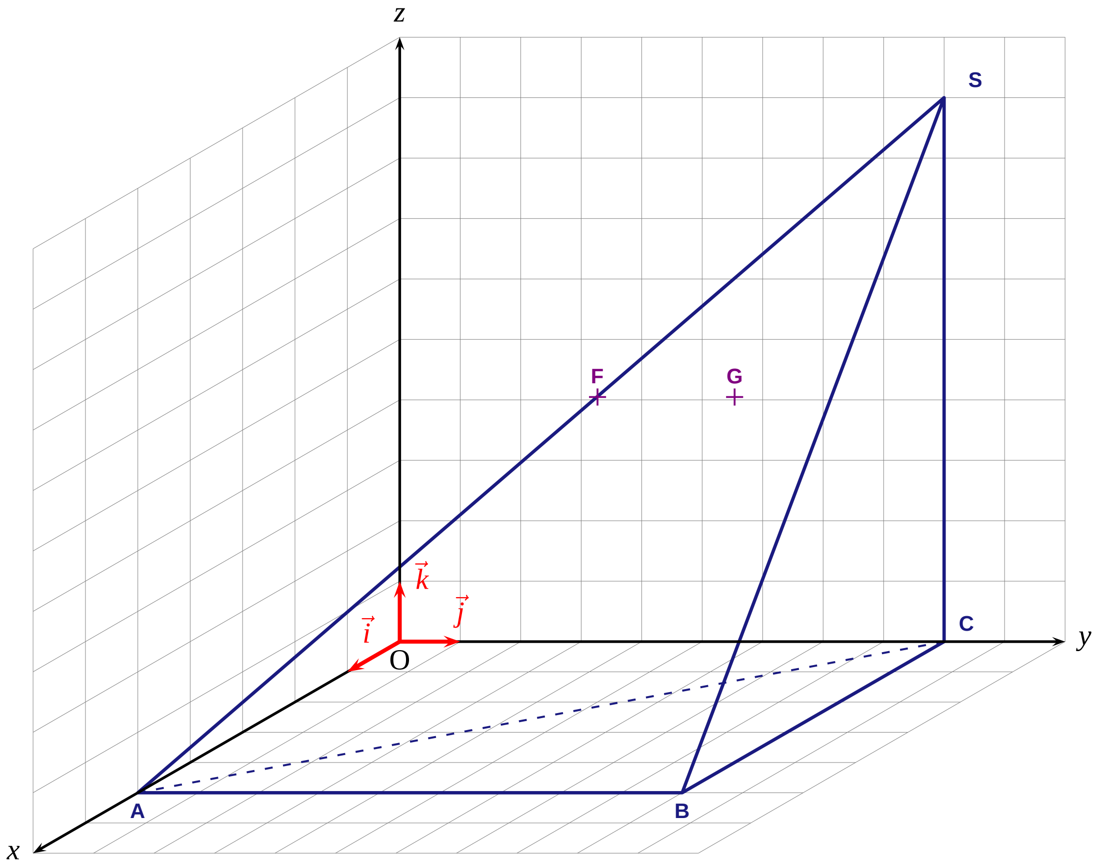
L'espace est muni d'un repère $\left(\text{O};\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. Un point $M\,(x;y;z)$ appartient à une droite $\mathscr{D}$ de l'espace si, et seulement si, ses coordonnées vérifient un système d'équations de la forme

$$\begin{cases} ax+by+cz &= d \\ a'x+b'y+c'z &= d' \end{cases}$$ où a, b, c et a', b', c' ne sont pas proportionnels.

EXERCICES

EXERCICE 1

Dans l'espace muni d'un repère $\left(\text{O};\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on considère les points $A(5;0;0)$, $B(5;9;0)$, $C(0;9;0)$ et $S(0;9;9)$.



1. Placer le point E de coordonnées $(6;4;7)$ dans le repère précédent.
2. L'abscisse du point F est égale à 2, lire les coordonnées du point F.
3. G est un point du plan (SBC), lire les coordonnées du point G.
4. Les points E, F et G sont-ils alignés ?

EXERCICE 2

Dans l'espace muni d'un repère $\left(\text{O};\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on considère les points $A(2;-1;3)$, $B(3;2;1)$, $C(-2;3;1)$ et $D(6;3;0)$.

1. Les points A, B et C déterminent-ils un plan ?
2. Calculer les coordonnées du point I milieu du segment $[BC]$.
3. Les points A, B, C et D sont-ils coplanaires ?

EXERCICE 3

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. On considère les points $A(2;-1;3)$, $B(-2;3;1)$, $C(-2;0;4)$, $D(9;-5;8)$ et $E(x;y;6)$.

1. Montrer que les points A, B et C déterminent un plan.
2. Le point E appartient à la droite (AB). Déterminer son abscisse et son ordonnée.
3. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{ED}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux.
4. Montrer que la droite (ED) est perpendiculaire au plan (ABC).

EXERCICE 4

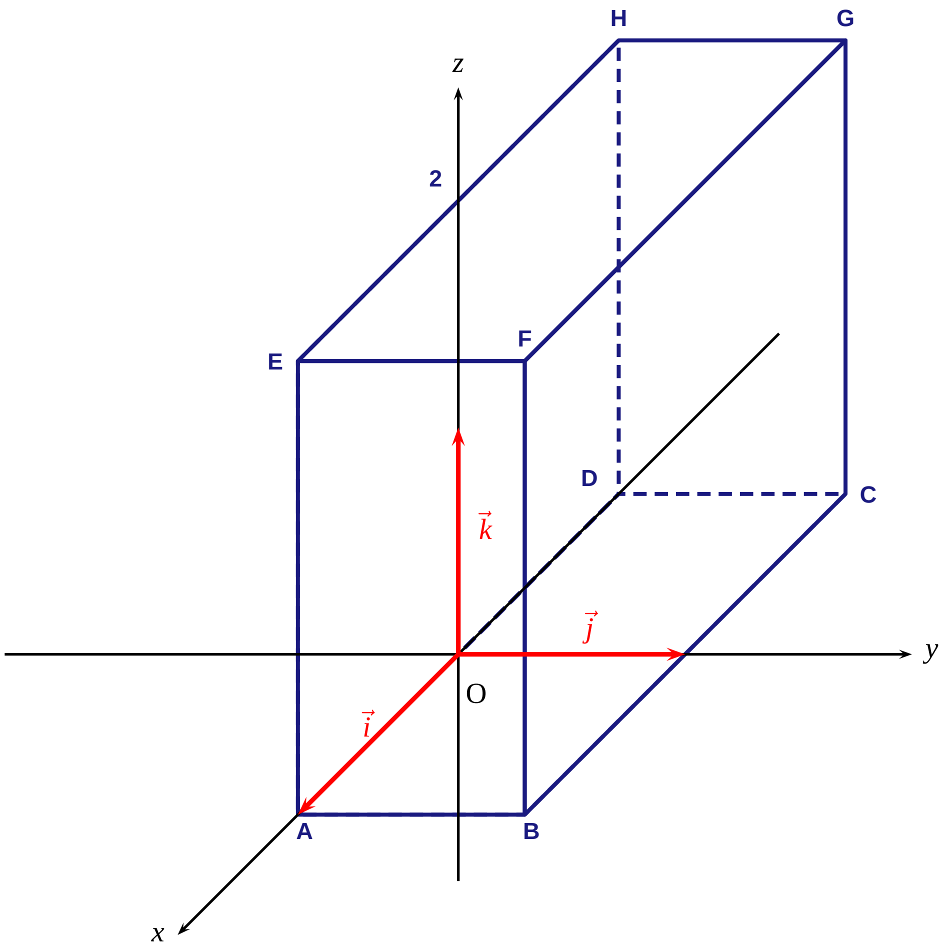
Dans l'espace muni d'un repère $\left(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on considère les points $A(-2;3;-1)$ et $B(1;3;2)$.

1. Déterminer les coordonnées du point C intersection de la droite (AB) avec le plan (xOy).
2. Déterminer les coordonnées du point D intersection de la droite (AB) avec le plan (yOz).
3. La droite (AB) est-elle sécante avec le plan (xOz) ?

EXERCICE 5

(*D'après Sujet Bac Polynésie 2005*)

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.
La figure ci-dessous, représente un pavé droit ; le point O est le milieu de $[AD]$.
Soit P le milieu du segment $[EF]$.



1. a. Quel ensemble de points de l'espace a pour équation $z=2$?
   b. Déterminer une équation du plan (ABF).
   c. En déduire un système d'équations qui caractérise la droite (EF).
2. a. Quelles sont les coordonnées des points A, G et P ?
   b. Placer sur la figure le point Q de coordonnées $(0;0{,}5;0)$.
   c. Déterminer une équation cartésienne du plan (APQ).
3. a. Construire sur la figure les segments $[PQ]$ et $[AG]$.
   b. Le point G appartient-il au plan (APQ) ? Justifier.
4. On construit la figure précédente à l'aide d'un logiciel de géométrie, puis on demande au logiciel de représenter le point d'intersection des droites (AG) et (PQ). Quelle pourrait être la réponse de l'ordinateur ?

EXERCICE 6 (*D'après sujet bac France Métropolitaine Septembre 2009*)

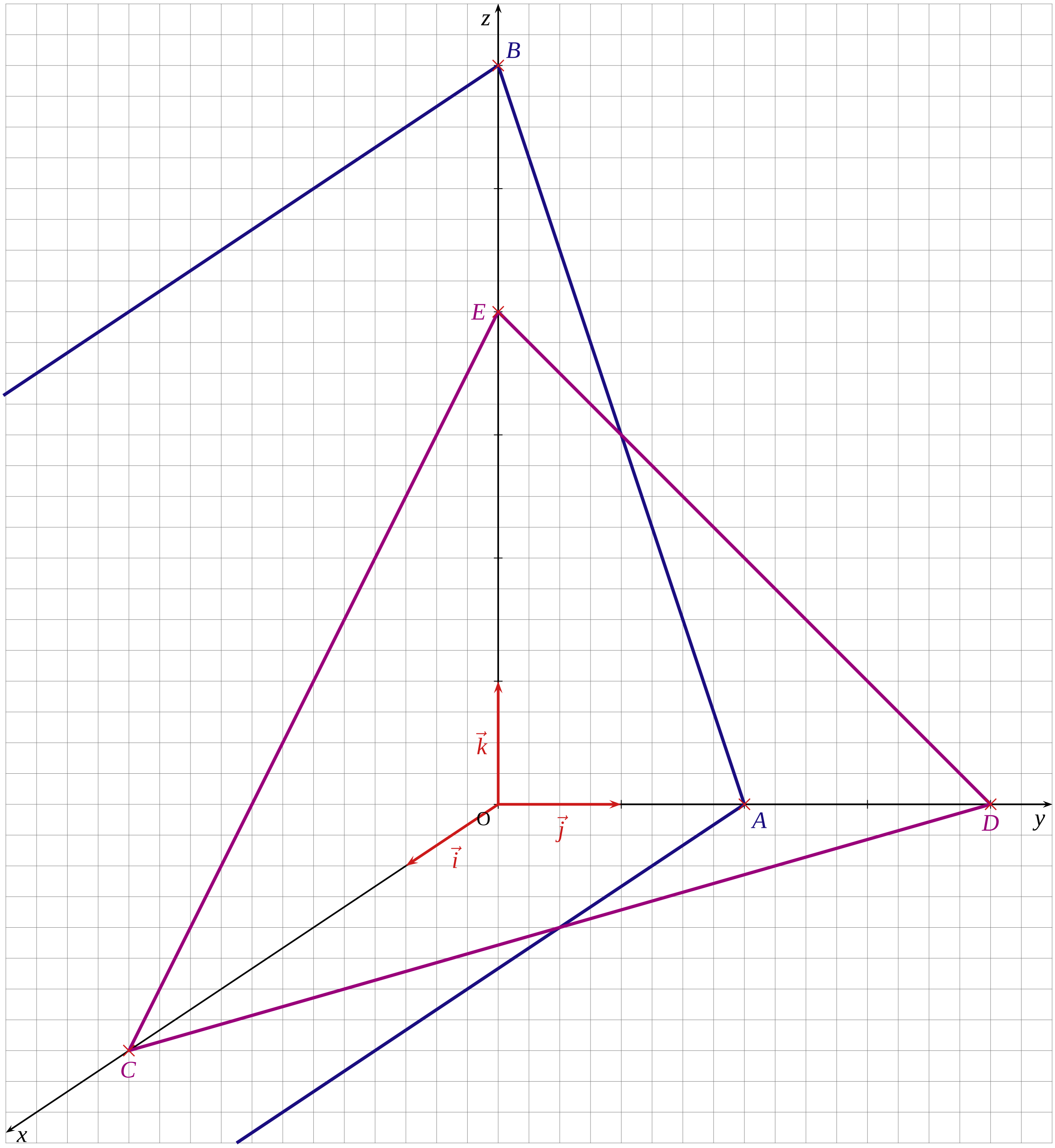
L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O};\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.
Sur le dessin joint en annexe, on a placé les points $A(0\ ;\ 2\ ;\ 0)$, $B(0\ ;\ 0\ ;\ 6)$, $C(4\ ;\ 0\ ;\ 0)$, $D(0\ ;\ 4\ ;\ 0)$ et $E(0\ ;\ 0\ ;\ 4)$.
Soit (P) le plan d'équation $3y+z=6$.
Il est représenté par ses traces sur le plan de base sur le dessin joint en annexe.

1. a. Démontrer que les points C, D et E déterminent un plan que l'on notera (CDE).
   b. Vérifier que le plan (CDE) a pour équation $x+y+z=4$.
2. a. Justifier que les plans (P) et (CDE) sont sécants. On note (Δ) leur intersection.
   b. Sans justifier, représenter (Δ) en couleur (ou à défaut en traits pointillés) sur la figure en annexe.
3. On considère les points $F(2\ ;\ 0\ ;\ 0)$ et $G(0\ ;\ 3\ ;\ 0)$.
   On note (Q) le plan parallèle à l'axe $\left(\text{O};\ \vec{k}\right)$ et contenant les points F et G.
   a. Placer sur la figure en annexe les points F et G.
      Sans justifier, représenter le plan (Q) par ses traces sur les plans de base, d'une autre couleur (ou à défaut en larges pointillés), sur la figure en annexe.
   b. Déterminer les réels a et b tels que $ax+by=6$ soit une équation du plan (Q).
4. L'intersection des plans (CDE) et (Q) est la droite (Δ').
   Sans justifier, représenter la droite (Δ'), d'une troisième couleur (ou à défaut en très larges pointillés), sur la figure en annexe.
5. On considère le système de trois équations à trois inconnues suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3y+z & = & 6 \\ x+y+z & = & 4 \\ 3x+2y & = & 6 \end{array}\right.$$

   a. Résoudre ce système.
   b. Que peut-on alors en déduire pour les droites (Δ) et (Δ') ?

ANNEXE



EXERCICE 7

L'espace est muni d'un repère $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ orthonormal représenté en annexe ci-dessous.

1. Tracer les droites d'intersection du plan (P) d'équation $5x+5y+6z=15$ avec les plans de coordonnées du repère $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.
2. On considère le plan (Q) d'équation $3x+4y=6$.
   a. Préciser la nature de l'ensemble Δ des points M de l'espace dont les coordonnées vérifient :

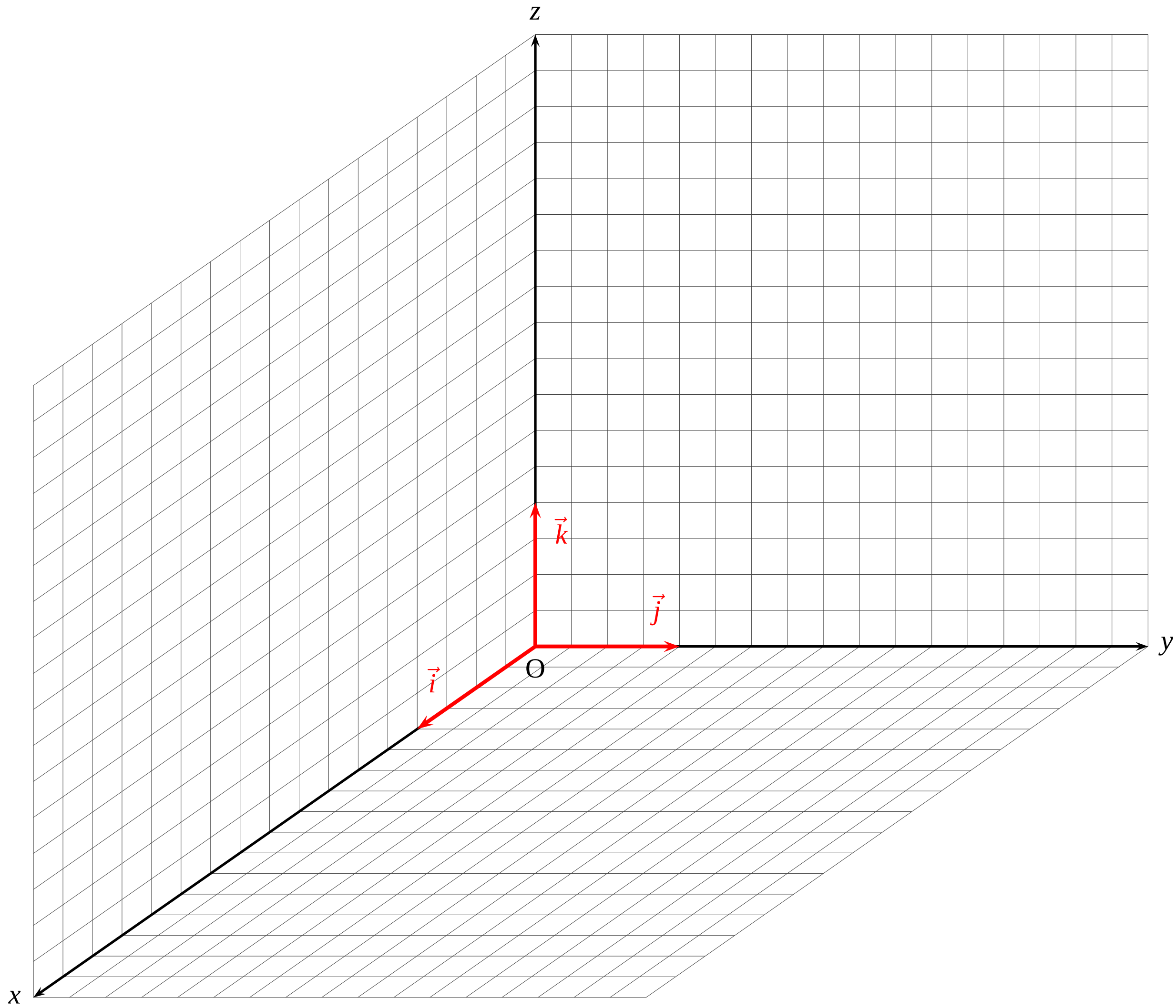
$$\begin{cases} 5x+5y+6z = 15 \\ 3x+4y = 6 \end{cases}$$

b. Représenter l'ensemble Δ dans le repère $\left(\text{O};\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

3. On donne les points $D(1;0;0)$, $E(0;-3;0)$, $F(-1;-3;4)$ et $G(0;0;4)$.
   a. Montrer que les points D, E et F déterminent un plan.
   b. Les points D, E, F et G sont-ils coplanaires ?
   c. Déterminer une équation du plan (R) qui contient les points D, E, F.
   d. Représenter l'intersection des trois plans (P), (Q) et (R) dans le repère $\left(\text{O};\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$

4. Résoudre le système suivant et en donner une interprétation graphique.

$$\left\{\begin{array}{rcr} 12x-4y+3z &=& 12\\ 5x+5y+6z &=& 15\\ 3x+4y &=& 6 \end{array}\right.$$



EXERCICE 8

Dans l'espace muni d'un repère $\left(\text{O};\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on considère les points $A(-1;6;7{,}5)$ et $B(-2;8;9)$.

1. Déterminer une équation cartésienne du plan P parallèle à l'axe (Oz) et passant par les points A et B.
2. Déterminer une équation cartésienne du plan Q parallèle à l'axe (Oy) et passant par les points A et B.
3. Soit d la droite caractérisée par le système :

$$\left\{\begin{array}{lcr} 2x+y & = & 4 \\ 3x+2z & = & 12 \end{array}\right.$$

   Les points A et B sont-ils sur la droite d ?

4. Dans le repère $\left(\text{O};\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ ci-dessous, représenter les plans P et Q par leurs traces avec les plans de base ainsi que la droite (AB).