Exercice 1 (5 points)

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $x^2 - 5x - 14 = 0$
2. Factoriser si possible l'expression : $A = x^2 + 8x + 12$
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $x^2 - x - 4 > 0$
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^4 + 2x^2 - 24 = 0$.

Exercice 2 (3 points)
Voici un extrait d'une page web : (n'ayez pas peur, c'est très facile...)
`http://dl.uncw.edu/digilib/mathematics/algebra/mat111hb/pandr/quadratic/quadratic.html#sec3`

Example :
Question :
Write the function in standard form. Find the vertex of the graph of the function and find the zeros of the function.
Answer :

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 6x + 7 \\ &= \left(x^2 - 6x\right) + 7 && \text{Group the } x^2 \text{ and } x \text{ terms and then complete the square on these terms.} \\ &= \left(x^2 - 6x + 9 - 9\right) + 7 \end{aligned}$$

We need to add 9 because it is the square of one half the coefficient of x, $(-6/2)^2 = 9$. When we were solving an equation we simply added 9 to both sides of the equation. In this setting we add and subtract 9 so that we do not change the function.
Then :

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(x^2 - 6x + 9\right) - 9 + 7 && \text{We see that } x^2 - 6x + 9 \text{ is a perfect square, namely } (x-3)^2. \\ &= (x-3)^2 - 2 && \text{This is \textbf{standard form}.} \end{aligned}$$

From this result, one easily finds the **vertex** of the graph of f is $(3; -2)$.

To find the zeros of f, we set f equal to 0 and solve for x.

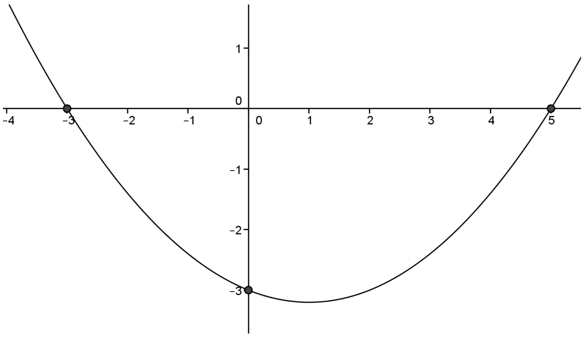
$$\begin{aligned} (x-3)^2 - 2 &= 0 \\ (x-3)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2 &= 0 \\ \left(x - 3 - \sqrt{2}\right)\left(x - 3 + \sqrt{2}\right) &= 0 \end{aligned}$$

$x = 3 + \sqrt{2}$ or $x = 3 - \sqrt{2}$

Exercice : *You can answer in French or in English :*
In this exercise, you **can't use** the discriminant.

1. Write $f(x) = x^2 + 4x - 12$ in standard form.
2. Find the vertex of the graph of f.
3. Find the zeros of f.

Exercice 3 (2 points)
Soit f un polynôme du second degré dont on donne ci-dessous la représentation graphique dans un repère du plan :



Déterminer une expression sous forme factorisée de f.

Exercice 4 (4 points)
On considère pour tout réel x le trinôme ax^2+bx+c avec$a\neq 0$ et $c\neq 0$. On note Δ son discriminant.
Les propositions suivantes sont-elles Vraies ou Fausses ?
Justifier votre réponse à l'aide d'une preuve si c'est vrai ou d'un contre-exemple si c'est faux.

1. Si a et c sont de signes opposés, alors le trinôme a toujours des racines.
2. La réciproque de la proposition précédente est vraie. (Avant de répondre à cette question, on commencera par énoncer cette réciproque).
3. Si $ax^2+bx+c<0$ pour tout réel x, alors $\Delta<0$.
4. Si $\Delta<0$ alors $ax^2+bx+c<0$ pour tout réel x.
5. Si $-\dfrac{b}{2a}>0$ et $\Delta>0$ alors le trinôme admet deux racines positives.

Exercice 5 (3 points)
Soit m un nombre réel non nul.
On considère l'équation suivante :

$$2mx^2+x+1=0 \tag{1}$$

1. Pour quelle**s** valeur**s** de m l'équation (1) admet-elle exactement deux solutions ?
2. Résoudre l'équation (1) dans le cas où $m=-3$.

Exercice 6 (3 points)
Un libraire achète des livres (tous identiques) pour 80 €. Avec 4 livres de plus, pour le même prix total, chaque livre aurait coûté 1 € de moins.
Combien le libraire a-t-il acheté de livres ?
Quel est le prix d'un livre ?

Corrigé de l'exercice 1 :

1. $\Delta = \cdots = 81$, $\mathscr{S} = \{-2;7\}$.
2. $\Delta = 16$, $A = (x+2)(x+6)$.
3. $\Delta = 17$, le trinôme est du signe de "a" à l'extérieur des racines. $\mathscr{S} = \left]-\infty; \frac{1-\sqrt{17}}{2}\right[\cup \left]\frac{1+\sqrt{17}}{2}; +\infty\right[$.
4. Une équation bi-carrée : on se ramène à un trinôme du second degré en posant $X = x^2$.
   L'équation $X^2 + 2X - 24 = 0$ admet deux solutions 4 et -6.
   L'équation $x^2 = 4$ admet deux solutions : 2 et -2.
   L'équation $x^2 = -6$ n'admet pas de solution.
   L'équation bi-carrée a pour ensemble de solutions : $\mathscr{S} = \{-2;2\}$.

Corrigé de l'exercice 2 :
$f(x) = (x+2)^2 - 16 = (x+2-4)(x+2+4) = (x-2)(x+6)$

Corrigé de l'exercice 3 :
Les racines du trinômes sont -3 et 5.
Donc f s'écrit sous la forme : $f(x) = a(x+3)(x-5)$.
Or, $f(0) = -3$, donc $-3 = a \times 3 \times (-5)$, donc $a = \frac{1}{5}$.

Corrigé de l'exercice 4 :

1. on a :$ac < 0$, donc $-4ac > 0$ donc $b^2 - 4ac > 0$.
2. $x^2 + 10x + 1$ admet deux racines, et pourtant a et c ne sont pas opposés.
3. Si $ax^2 + bx + c < 0$, alors le trinôme n'admet pas de racine, donc $\Delta < 0$.
4. $x^2 + x + 1$ produit un contre-exemple.
5. $x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$ produit un contre-exemple.

Corrigé de l'exercice 5 :
Pour admettre deux solutions, il est nécessaire que l'équation soit du second degré. Dans la suite de l'exercice, nous travaillerons pour $m \neq 0$.

1. Pour avoir exactement deux solutions, il faut et il suffit que le discriminant du trinôme soit strictement positif.
   Or $\Delta = 1 - 8m$.
   On en déduit que (1) admet deux solutions si et seulement si m appartient à l'intervalle $]-\infty;0[\cup \left]0; \frac{1}{8}\right[$.
2. Pour $m = -3$, l'équation (1) devient : $-6x^2 + x + 1 = 0$.
   On obtient : $\mathscr{S} = \left\{-\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right\}$.

Corrigé de l'exercice 6 : Fait en classe.