Physics Vol. 1, No. 3, pp. 195-200, 1964 Physics Publishing Co. Printed in the United States

Sur le paradoxe d'Einstein-Podolsky-Rosen

J. S. Bell
Département de Physique, Université du Wisconsin, Madison, Wisconsin
(Reçu le 4 novembre 1964)[1]

I. Introduction

Le paradoxe de Einstein, Podolsky et Rosen [1] a été avancé comme argument que la mécanique quantique ne pourrait pas être une théorie complète mais devrait être supplémentée par des variables additionnelles. Ces variables additionnelles étaient destinées à restaurer la causalité et la localité de la théorie [2]. Dans cette note, cette idée sera formulée mathématiquement et on montrera qu'elle est incompatible avec les prédictions statistiques de la mécanique quantique. C'est une condition de la localité, ou plus précisément que le résultat d'une mesure sur un système ne soit pas affecté par des opérations sur un système distant avec lequel ce système a interagi dans le passé, qui crée la principale difficulté. Il y a eu des tentatives [3] de montrer que même sans une telle condition de séparabilité ou de localité, aucune interprétation de la mécanique quantique contenant des "variables cachées" n'est possible. Ces tentatives ont été examinées ailleurs [4] et ont trouvé un manque. De plus, une interprétation avec variables cachées de la théorie quantique élémentaire [5] a été explicitement construite. Cette interprétation particulière a en effet une structure grossièrement non locale. Cela est caractéristique, selon le résultat à prouver ici, de toute telle théorie qui reproduit exactement les prédictions de la mécanique quantique.

II. Formulation

Avec l'exemple préconisé par Bohm et Aharonov [6], l'argument EPR est le suivant. Considérons un "singlet" de particules de spin un-demi mises en quelque sorte dans cet état de spin ensemble et se déplaçant librement dans des directions opposées. Des mesures peuvent être effectuées, disons par les aimants de Stern-Gerlach, sur des composants sélectionnés des spins $\vec{\sigma}_1$ et $\vec{\sigma}_2$. Si la mesure du composant $\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{a}$, où $\vec{a}$ est un certain vecteur unitaire prend la valeur $+1$ alors, selon la mécanique quantique, la mesure de $\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{a}$ doit prendre la valeur -1 et vice versa. Maintenant on fait l'hypothèse [2], et il semble au moins à considérer que si les deux mesures sont faites à des endroits éloignés l'un de l'autre, l'orientation d'un aimant n'influence pas le résultat obtenu sur l'autre. Puisqu'on peut prédire à l'avance le résultat de la mesure de n'importe quel composant de $\vec{\sigma}_2$, en mesurant précédemment le même composant $\vec{\sigma}_1$, il s'ensuit que le résultat de n'importe quelle telle mesure devrait être vraiment prédéterminé. Puisque la fonction d'onde initiale

[1] Travail financé en partie par la Commission de l'énergie atomique des États-Unis
J. S. Bell est en congé du SLAC et du CERN.

de la mécanique quantique *ne détermine pas* le résultat d'une mesure individuelle, cette prédétermination implique la possibilité d'une spécification plus complète de l'état.

Effectuons cette spécification plus complète au moyen des paramètres λ. Il est en quelque sorte indifférent dans la suite de savoir si λ dénote une variable unique ou bien un ensemble de variables, ou même un ensemble de fonctions, et si les variables sont discrètes ou continues. Pourtant, on écrit λ comme s'il s'agissait d'un unique paramètre continu. Le résultat A de la mesure de $\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{a}$ est alors déterminé par $\vec{a}$ et λ, et le résultat B de la mesure de $\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{b}$ dans le même exemple est déterminé par $\vec{b}$ et λ, et

$$A(\vec{a}, \lambda) = \pm 1, \quad B(\vec{b}, \lambda) = \pm 1. \tag{1}$$

La supposition essentielle [2] est que le résultat B pour la particule 2 ne dépende pas de la valeur $\vec{a}$ de l'aimant pour la particule 1, ni A de $\vec{b}$.

Si $\rho(\lambda)$ est la distribution de probabilité de λ alors la valeur attendue du produit des deux composants $\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{a}$ et $\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{b}$ est

$$P(\vec{a}, \vec{b}) = \int d\lambda \rho(\lambda) A(\vec{a}, \lambda) B(\vec{b}, \lambda) \tag{2}$$

Cela devrait être égal à la valeur attendue par la mécanique quantique, qui pour l'état du "singlet" est

$$\langle \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{a} \; \vec{\sigma}_2 \cdot \vec{b} \rangle = -\vec{a} \cdot \vec{b}. \tag{3}$$

Mais on montrera que ça n'est pas possible.

On pourrait préférer une formulation dans laquelle les variables cachées sont dans deux ensembles, avec A dépendant de l'un et B de l'autre ; cette possibilité est contenue dans celle ci-dessus, puisque λ représente n'importe quel nombre de variables et qu'il n'y a pas de restriction sur les dépendances sur A et B. Dans une théorie physique complète du type de celle envisagée par Einstein, les variables cachées auraient une signification dynamique et des lois de mouvement ; on peut alors penser à notre λ comme aux valeurs initiales de ces variables à un instant convenable.

III. Illustration

La preuve du résultat principal est assez simple. Avant de le donner, pourtant, un certain nombre d'illustrations peuvent servir à le mettre en perspective.

D'abord, il n'y a pas de difficulté à donner à une variable cachée le compte des mesures de spin sur une seule particule. Supposons qu'on ait une particule de spin un demi dans un état pur avec polarisation dénotée par un vecteur unité $\vec{p}$. Posons que la variable cachée est (par exemple) un vecteur unité $\vec{\lambda}$ avec distribution uniforme de probabilié sur la demi-sphère $\vec{\lambda} \cdot \vec{p} > 0$. Spécifions que le résultat de la mesure d'un composant $\vec{\sigma} \cdot \vec{a}$ est

$$\text{sign } \vec{\lambda} \cdot \vec{a}', \tag{4}$$

où $\vec{a}'$ est un vecteur unité dépendant de $\vec{a}$ et $\vec{p}$ d'une manière à définir, et que la fonction signe vaille $+1$ ou -1 selon le signe de son argument. Cela laisse réellement le résultat indéterminé quand $\lambda \cdot a' = 0$, mais comme la probabilité de cela est nulle, nous ne ferons pas de prescriptions particulières pour cela. En calculant la moyenne sur $\vec{\lambda}$ la valeur attendue est

$$\langle \vec{\sigma} \cdot \vec{a} \rangle = 1 - 2\theta'/\pi, \tag{5}$$

où θ' est l'angle entre $\vec{a}'$ et $\vec{p}$. Supposons alors que $\vec{a}'$ est obtenu à partir de $\vec{a}$ par rotation vers $\vec{p}$ jusqu'à

$$1 - \frac{2\theta'}{\pi} = \cos\theta \tag{6}$$

où θ est l'angle entre $\vec{a}$ et $\vec{p}$. Alors on a le résultat souhaité

$$\langle \vec{\sigma} \cdot \vec{a} \rangle = \cos\theta \tag{7}$$

Donc dans ce simple cas, il n'y a pas de difficulté dans l'optique que le résultat de toute mesure est déterminé par la valeur d'une variable supplémentaire, et que les caractéristiques statistiques de la mécanique quantique apparaissent parce que la valeur de cette variable est inconnue dans des cas particuliers.

Deuxièmement, il n'y a pas de difficulté à reproduire, sous la forme (2), les seules caractéristiques de (3) utilisées habituellement quand on discute oralement de ce problème

$$\begin{cases} P(\vec{a}, \vec{a}) = -P(\vec{a}, -\vec{a}) = -1 \\ P(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \ \text{ si } \ \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \end{cases} \tag{8}$$

Par exemple, changeons λ maintenant en le vecteur unitaire $\vec{\lambda}$, avec distribution de probabilité uniforme dans toutes les directions, et prenons

$$\begin{cases} A(\vec{a}, \vec{\lambda}) = \operatorname{sign} \vec{a} \cdot \vec{\lambda} \\ B(\vec{a}, \vec{b}) = -\operatorname{sign} \vec{b} \cdot \vec{\lambda} \end{cases} \tag{9}$$

Cela donne

$$P(\vec{a}, \vec{b}) = -1 + \frac{2}{\pi}\theta, \tag{10}$$

où θ est l'angle entre a et b, et (10) a les propriétés (8). Pour comparaison, considérons le résultat d'une théorie modifiée [6] dans laquelle l'état pur du "singlet" est remplacé au cours du temps par un mélange isotropique d'états produits ; cela donne la fonction de corrélation

$$-\frac{1}{3}\, \vec{a} \cdot \vec{b} \tag{11}$$

Il est probablement moins aisé, expérimentalement, de distinguer (10) de (3), qu'(11) de (3).

À la différence de (3), la fonction (10) n'est pas stationnaire en sa valeur minimum -1 (pour $\theta = 0$). On verra que ceci est caractéristique des fonctions de type (2).

Troisièmement, et dernièrement, il n'y a pas de difficulté à reproduire la corrélation (3) de la mécanique quantique si les résultats A et B dans (2) sont autorisés à dépendre de $\vec{b}$ et $\vec{a}$ respectivement ainsi que de $\vec{a}$ et $\vec{b}$. Par exemple, remplaçons $\vec{a}$ dans (9) par $\vec{a}'$, obtenu à partir de $\vec{a}$ par rotation vers $\vec{b}$ jusqu'à ce que

$$1 - \frac{2}{\pi}\theta' = \cos\theta,$$

où θ' est l'angle entre $\vec{a}'$ et $\vec{b}$. Pourtant, pour des valeurs données des variables cachées, les résultats des mesures avec un aimant doivent maintenant dépendre de la valeur de l'aimant distant, qui est juste ce que nous souhaiterions éviter.

IV. Contradiction

Le résultat principal va maintenant être démontré. Parce que ρ est une distribution de probabilité normalisée

$$\int d\lambda \rho(\lambda) = 1, \tag{12}$$

et à cause des propriétés (1), P dans (2) ne peut pas être inférieur à -1. Il peut atteindre -1 en $\vec{a} = \vec{b}$ seulement si

$$A(\vec{a}, \lambda) = -B(\vec{a}, \lambda) \tag{13}$$

excepté en un ensemble de points λ de probabilité zéro. En supposant cela, on peut réécrire (2) en

$$P(\vec{a}, \vec{b}) = -\int d\lambda \rho(\lambda) A(\vec{a}, \lambda) A(\vec{b}, \lambda). \tag{14}$$

Il s'ensuit que $\vec{c}$ est un autre vecteur unité

$$\begin{aligned} P(\vec{a}, \vec{b}) - P(\vec{a}, \vec{c}) &= -\int d\lambda \rho(\lambda)[A(\vec{a}, \lambda)A(\vec{b}, \lambda) - A(\vec{a}, \lambda)A(\vec{c}, \lambda)] \\ &= \int d\lambda \rho(\lambda) A(\vec{a}, \lambda) A(\vec{b}, \lambda)[A(\vec{b}, \lambda)A(\vec{c}, \lambda) - 1] \end{aligned}$$

en utilisant (1), donc

$$|P(\vec{a}, \vec{b}) - P(\vec{a}, \vec{c})| \leq \int d\lambda \rho(\lambda)[1 - A(\vec{b}, \lambda)A(\vec{c}, \lambda)]$$

Le second terme sur la droite est $P(\vec{b}, \vec{c})$, donc

$$1 + P(\vec{b}, \vec{c}) \geq |P(\vec{a}, \vec{b}) - P(\vec{a}, \vec{c})| \tag{15}$$

À moins que P ne soit constant, le côté droit est en général de l'ordre de $|\vec{b} - \vec{c}|$ pour de petites valeurs de $|\vec{b} - \vec{c}|$. Donc $P(\vec{b}, \vec{c})$ ne peut pas être stationnaire à la valeur minimum (-1 pour $\vec{b} = \vec{c}$) et ne peut pas être égal à la valeur de la mécanique quantique (3).

Mais la corrélation de la mécanique quantique (3) ne peut pas non plus être approximée de façon aussi arbitrairement proche que souhaité par la formule (2). La preuve formelle de cela peut être décrite comme suit. Nous ne nous ennuyerons pas à propos des échecs d'approximation en des points isolés, donc considérons à la place de (2) et (3) les fonctions

$$\overline{P}(\vec{a},\vec{b}) \text{ et } \overline{-\vec{a}\cdot\vec{b}}$$

où la barre au-dessus des lettres dénote la moyenne indépendante de $P(\vec{a}',\vec{b}')$ et $-\vec{a}'\cdot\vec{b}'$ sur les vecteurs $\vec{a}'$ et $\vec{b}'$ dans de petits angles spécifiés de $\vec{a}$ et $\vec{b}$. Supposons que pour tout $\vec{a}$ et $\vec{b}$, la différence soit bornée par ϵ :

$$|\overline{P}(\vec{a},\vec{b}) + \vec{a}\cdot\vec{b}| \leq \epsilon \tag{16}$$

Alors on montrera que ϵ ne peut être arbitrairement petit.

Supposons que pour tout a et b

$$|\overline{\vec{a}\cdot\vec{b}} - \vec{a}\cdot\vec{b}| \leq \delta \tag{17}$$

Alors de (16)

$$|\overline{P}(\vec{a},\vec{b}) + \vec{a}\cdot\vec{b}| \leq \epsilon + \delta \tag{18}$$

De (2)

$$\overline{P}(\vec{a},\vec{b}) = \int d\lambda \rho(\lambda) \overline{A}(\vec{a},\lambda)\overline{B}(\vec{b},\lambda) \tag{19}$$

où

$$|\overline{A}(\vec{a},\lambda)| \leq 1 \text{ and } |\overline{B}(\vec{b},\lambda)| \leq 1 \tag{20}$$

De (18) et (19), avec $\vec{a}=\vec{b}$,

$$d\lambda\rho(\lambda)[\overline{A}(\vec{b},\lambda)\overline{B}(\vec{b},\lambda)+1] \leq \epsilon+\delta \tag{21}$$

De (19)

$$\begin{aligned}\overline{P}(\vec{a},\vec{b}) - \overline{P}(\vec{a},\vec{c}) &= \int d\lambda\rho(\lambda)[\overline{A}(\vec{a},\lambda)\overline{B}(\vec{b},\lambda) - \overline{A}(\vec{a},\lambda)\overline{B}(\vec{c},\lambda)] \\ &= \int d\lambda\rho(\lambda)\overline{A}(\vec{a},\lambda)\overline{B}(\vec{b},\lambda)[1+\overline{A}(\vec{b},\lambda)\overline{B}(\vec{c},\lambda)] \\ &\quad - \int d\lambda\rho(\lambda)\overline{A}(\vec{a},\lambda)\overline{B}(\vec{c},\lambda)[1+\overline{A}(\vec{b},\lambda)\overline{B}(\vec{b},\lambda)]\end{aligned}$$

En utilisant (20) alors

$$\begin{aligned}|\overline{P}(\vec{a},\vec{b}) - \overline{P}(\vec{a},\vec{c})| &\leq \int d\lambda\alpha(\lambda)[1+\overline{A}(\vec{b},\lambda)\overline{B}(\vec{c},\lambda)] \\ &+ \int d\lambda\rho(\lambda)[1+\overline{A}(\vec{b},\lambda)\overline{B}(\vec{b},\lambda)]\end{aligned}$$

Alors, en utilisant (19) et 21)

$$|\overline{P}(\vec{a},\vec{b}) - \overline{P}(\vec{a},\vec{c})| \leq 1 + \overline{P}(\vec{b},\vec{c}) + \epsilon + \delta.$$

Finalement, en utilisant (18),

$$|\vec{a}\cdot\vec{c} - \vec{a}\cdot\vec{b}| - 2(\epsilon+\delta) \leq 1 - \vec{b}\cdot\vec{c} + 2(\epsilon+\delta)$$

ou

$$4(\epsilon+\delta) \geq |\vec{a}\cdot\vec{c} - \vec{a}\cdot\vec{b}| + \vec{b}\cdot\vec{c} - 1 \tag{22}$$

Prenons par exemple $\vec{a}\cdot\vec{c} = 0, \vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{c} = 1\sqrt{2}$. Alors

$$4(\epsilon+\delta) \geq \sqrt{2} - 1$$

Donc, pour de petites valeurs finies de δ, ϵ ne peut pas être arbitrairement petit.

Ainsi, la valeur attendue de la mécanique quantique ne peut pas être représentée, que ce soit précisément ou par une valeur très proche, dans la formule (2).

V. Généralisation

L'exemple considéré ci-dessus a l'avantage qu'il requiert peu d'imagination pour envisager que les mesures impliquées puissent réellement être effectuées. De façon plus formelle, en supposant [7] que tout opérateur hermitien avec un ensemble complet d'états propres est un "observable", le résultat est facilement étendu à d'autres systèmes. Si les deux systèmes ont des espaces d'état de dimension plus grande que deux, on peut toujours considérer des sous-espaces de dimension deux et définir, dans leur produit direct, des opérateurs, $\vec{\sigma}_1$ et $\vec{\sigma}_2$ formellement analogues à ceux utilisés ci-dessus et qui sont nuls pour les états extérieurs au sous-espace produit. Alors, pour au moins un état de mécanique quantique, l'état "singlet" dans les sous-espaces combinés, les prédictions statistiques de la mécanique quantique sont incompatibles avec une prédétermination séparable.

VI. Conclusion

Dans une théorie dans laquelle les paramètres sont ajoutés à la mécanique quantique pour déterminer les résultats des mesures individuelles, sans changer les prédictions statistiques, il doit y avoir un mécanisme selon lequel la prise d'une mesure peut influencer la lecture d'un autre instrument, même éloigné. De plus, le signal impliqué doit se propager instantanément, de telle manière qu'une telle théorie ne puisse être invariante par Lorentz.

Bien sûr, la situation est différente si les prédictions de la mécanique quantique sont de validité limitée. On peut concevoir qu'elles ne pourraient s'appliquer qu'aux expériences dans lesquelles la préparation des instruments est effectuée suffisamment à l'avance pour les autoriser à atteindre une certaine relation mutuelle par échange de signaux à une vitesse moindre ou égale à celle de la lumière. Dans cette relation, les expériences de ce type proposées par Bohm et Aharonov [6], dans lesquelles les paramètres sont modifiés pendant le trajet des particules, sont cruciales.

Je suis reconnaissant aux Docteurs M. Bander et J. K. Perring pour des discussions très utiles de ce problème. Le premier jet de cet article a été écrit durant un séjour à l'Université Brandeis ; je suis reconnaissant aux collègues là et à l'Université du Wisconsin pour leur intérêt et leur hospitalité.

Références

1. A. EINSTEIN, N. ROSEN, B. PODOLSKY, *Phys. Rev.* **47**, 777 (1935) ; voir aussi N. BOHR, *Ibid.* **48**, 696 (1935), W. H. FURRY, *Ibid.* **49**, 393 et 476 (1936), et D. R. INGLIS, *Rev. Mod. Phys.* **33**, 1 (1961).

2. "Mais sur une supposition nous devrions, selon moi, absolument tenir bon : la situation factuelle réelle du système S_2 est indépendante de ce qui est fait avec le système S_1, qui est séparé spatialement du premier" A. EINSTEIN dans *Albert Einstein, Philosopher Scientist*, (Édité par P. A. SCHILP) p. 85, Librairie des philosophes vivants, Evanston, Illinois (1949).

3. J. VON NEUMANN, *Mathematishe Grundlagen der Quanten-mechanik.* Verlag Julius-Springer, Berlin (1932), [traduction anglaise : Imprimerie de l'Université de Princeton (1955)] ; J. M. JAUCH ET C. PIRON, *Helv. Phys. Acta* **36**, 827 (1963).

4. J. S. BELL, à paraître.

5. D. BOHM, *Phys. Rev.* **85**, 166 et 180 (1952).

6. D. BOHM, Y. AHARONOV, *Phys. Rev.* **108**, 1070 (1957).

7. P. A. M. DIRAC, *The Principles of Quantum Mechanics* (3rd Ed.) p. 37. The Clarendon Press, Oxford (1947).