Bac Réunion 2000 : correction de l'exercice n°2 (spé)

1) $a = n^3 - n^2 - 12n = n(n^2 - n - 12) = n(n-4)(n+3)$ et $b = 2n^2 - 7n - 4 = (n-4)(2n+1)$.
2)a) On a $2\beta - \alpha = 2(n+3) - (2n+1) = 5$.
2)b) $d = \text{PGCD}(\alpha, \beta)$ divise α et β donc divise aussi $2\beta - \alpha = 5$.
2)c) • Supposons que $5 \mid \alpha$; $5 \mid (2n+1) - 5 = 2n - 4 = 2(n-2)$ donc d'après le théorème de Gauss, $5 \mid n - 2$ vu que 2 et 5 sont premiers entre eux.
• Si on suppose que $5 \mid \beta$, alors $5 \mid (n+3) - 5 = n - 2$.
• Réciproquement supposons que $5 \mid n - 2$; alors $5 \mid 2(n-2) + 5 = \alpha$ et $5 \mid (n-2) + 5 = \beta$.
(*) Remarque : - Si $n \equiv 2$ [5], $5 \mid n - 2$ donc $5 \mid \alpha$ et $5 \mid \beta$ d'où $5 \mid d$. Cela implique $d = 5$ puisque $d \in \{1; 5\}$ d'après 2)b).
- Si $n \not\equiv 2$ [5], 5 ne divise pas $n - 2$; d qui divise α et β, ne peut donc pas être égal à 5, ce qui prouve que $d = 1$.
3) Si $u = 1$ et $v = -2$, $u \times (2n+1) + v \times n = 1$ est une relation de Bézout. n et $2n+1$ sont donc premiers entre eux.
4)a) • $\text{PGCD}(a, b) = \text{PGCD}(n(n-4)(n+3); (n-4)(2n+1)) = (n-4)\text{PGCD}[n(n+3); 2n+1]$ par homogénéité du PGCD en tenant compte du fait que $n - 4 > 0$ vu que $n \geqslant 5$.
• Soit $\delta = \text{PGCD}[n(n+3), 2n+1]$; prouvons que $d = \delta$:
D'une part $\text{PGCD}(\delta, n)$ divise n. D'autre part $\text{PGCD}(\delta, n)$ divise δ donc divise également $2n+1$. Ainsi $\text{PGCD}(\delta, n)$ est un diviseur positif commun à n et $2n+1$ qui sont premiers entre eux (voir question précédente). Donc $\text{PGCD}(\delta, n) = 1$: δ et n sont premiers entre eux.
Comme $\delta \mid n(n+3)$, on a donc $\delta \mid n + 3$, d'après le théorème de Gauss. Cela prouve que δ est un diviseur commun à $n+3$ et $2n+1$ et donc que δ divise d (leur PGCD).
Enfin, $d \mid n+3$ et $d \mid 2n+1$ donc d est aussi un diviseur commun à $n(n+3)$ et $2n+1$: cela démontre que $d \mid \delta$.
$d > 0$, $\delta > 0$, $d \mid \delta$ et $\delta \mid d$ donc $d = \delta$.
• Conséquence : $\text{PGCD}(a, b) = (n-4)d = \begin{cases} 5(n-4) & \text{si } n \equiv 2 \ [5] \\ n-4 & \text{sinon} \end{cases}$
(voir (*) à la fin du 2)c))
4)b) • Si $n = 11$, $a = 1078 = 7 \times 154$ et $b = 161 = 7 \times 23$. $\text{PGCD}(154, 23) = 1$ donc $\text{PGCD}(a, b) = 7$. Le résultat fourni par la question précédente quand $n \not\equiv 2$ [5] est bien indentique : $n - 4 = 11 - 4 = 7$.
• Si $n = 12$, $a = 1440 = 40 \times 36$ et $b = 200 = 40 \times 5$. $\text{PGCD}(36, 5) = 1$ donc $\text{PGCD}(a, b) = 40$. Le résultat fourni par la question précédente quand $n \equiv 2$ [5] est bien indentique : $5(n-4) = 5 \times 8 = 40$.