Exercice 1 :

Représentez la fonction en escalier f indiquée puis calculez l'intégrale $I(f)$ dans chacun des cas.

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{5}{3} \; si -3 \leq x < 0 \\ \frac{5}{4} \; si \; 0 \leq x \leq 4 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} -2\sqrt{3} \; si -\sqrt{3} \leq x < \sqrt{3} \\ -\sqrt{2} \; si \; \sqrt{3} \leq x \leq 2\sqrt{2} \end{cases}$

c) $f(x) = E(x)$ sur l'intervalle $[-3; 3]$. $E(x)$désigne la partie entière du réel x.

Exercice 2 :

Les fonctions affines par morceaux f et g sont définies sur $[-1; 5]$ par :

$f(x) = \begin{cases} x+1 \; si -1 \leq x \leq 0 \\ -x+1 \; si \; 0 < x \leq 3 \\ x-5 \; si \; 3 < x \leq 5 \end{cases}$ et $g(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \; si -1 \leq x < 1 \\ -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4} \; si \; 1 \leq x \leq 5 \end{cases}$

1) Calculez les intégrales sur $[-1; 5]$ de f et de g.

2) Déduisez-en les intégrales sur $[-1; 5]$ des fonctions $f + 4g$ et $5f - 2g$.

Exercice 3 :

Comparez, sans les calculer, les réels I et J.

a) $I = \int_1^2 xe^x dx$ et $J = \int_1^2 x^2 e^x dx$.

b) $I = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt$ et $J = \int_0^1 \frac{t}{1+t^2} dt$.

c) $I = \int_0^1 x^2 \sin x \, dx$ et $J = \int_0^1 x \sin x \, dx$.

Exercice 4 :

1) Démontrez les inégalités et encadrements suivants :

a) $\int_{\frac{1}{2}}^1 \ln t \, dt \geq -\frac{\ln 2}{2}$

b) $\int_1^2 \frac{1}{1+x^3} dx \leq \frac{1}{2}$

c) $-\frac{\pi}{2} \leq \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(t^2+1) \, dt \leq \frac{\pi}{2}$

d) $2e^{-4} \leq \int_0^2 \frac{1}{e^{x^2}} dx \leq 2$

2) La suite (I_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$I_n = \int_0^1 (1 + t^n) \, dt$$

a) Prouvez que la suite (I_n) est décroissante.

b) Est-elle convergente ?

Exercice 5 :

1) Calculez la valeur moyenne μ sur l'intervalle $I = [-1; 1]$ de la fonction $f: x \mapsto \sqrt{1-x^2}$.

2) Dans chacun des cas, μ désigne la valeur moyenne d'une fonction continue f sur l'intervalle I. Calculez l'intégrale indiquée.

a) $\mu = 2$; $I = [1; 4]$; $\int_1^4 f(t) \, dt$

b) $\mu = \frac{2}{\pi}$; $I = \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$; f est paire ; $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) \, dx$

3) Trouvez un encadrement de la valeur moyenne de la fonction sur l'intervalle I donné.

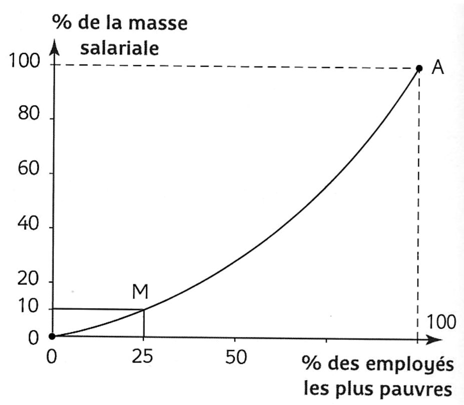
a) $\mapsto \frac{1}{1+x^2}$; $I = [0; 1]$.

b) $\mapsto \ln x$; $I = [1; e]$.

c) $\mapsto e^{x^2}$; $I = [1; \sqrt{2}]$.

<u>Exercice 6 :</u> Courbe de Lorentz et coefficient de Gini.

I – Une répartition représentée graphiquement

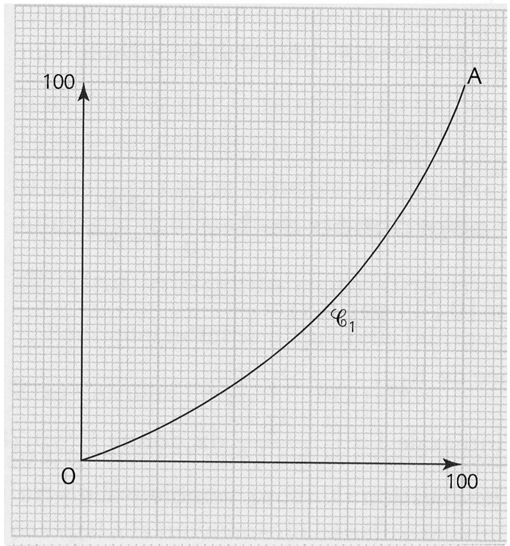


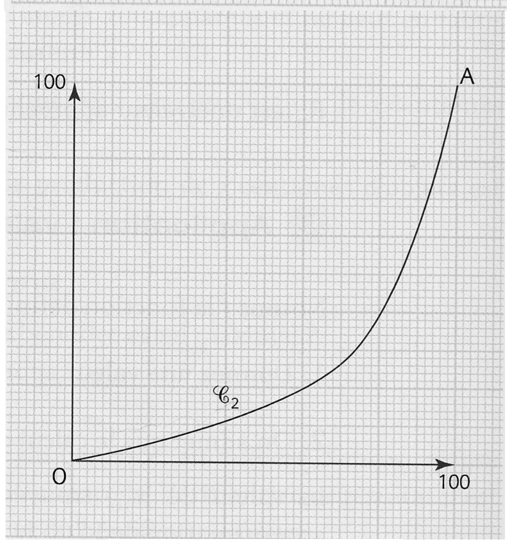
Dans une entreprise, on s'intéresse à la répartition de la masse salariale, c'est-à-dire à la façon dont sont répartis les salaires entre les différents employés.
Plus précisément, pour avoir une idée sur l'étendue sur l'échelle des salaires, et sur d'éventuelles inégalités, il peut être utile d'avoir des réponses aux questions suivantes :
Quelle part de la masse salariale revient aux 25% des employés les moins payés, ou aux 40% les moins payés ?

Lorentz a eu l'idée de représenter cette situation par une courbe qui, depuis porte son nom.

Exemple de lecture :
Les coordonnées du point M signifient que 10% de la masse salariale est attribuée aux 25% des employés les moins payés.

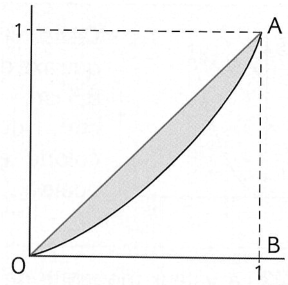
II – Lecture graphique





1) En utilisant cette courbe, indiquez :
a) quel pourcentage de la masse salariale revient aux 50% des employés les moins payés ;
b) quel pourcentage approximatif de la masse salariale revient aux 25% des employés les mieux payés.
2) On suppose que tous les employés ont le même salaire. Expliquez pour quoi la courbe de Lorentz est le segment [OA].
3) Voici les courbes de Lorentz C_1 et C_2 associées à deux entreprises E_1 et E_2. Dans quelle entreprise la répartition des salaires est-elle la moins inégale ?
4) Expliquez pourquoi une courbe de Lorentz :
a) passe toujours par les points O(0 ; 0) et A(100 ; 100) ;
b) une courbe de Lorentz est toujours située sous la droite (OA) ;
c) une courbe de Lorentz représente toujours une fonction croissante.

III) Le coefficient de Gini



Pour la concentration des salaires représentée par la courbe de Lorentz ci-contre, le coefficient de Gini est le nombre γ défini par :

$$\gamma = \frac{\text{aire de la partie coloriée}}{\text{aire du triangle OBA}}$$

1) a) Expliquez pour quoi : $0 \leq \gamma \leq 1$.
b) Notons f la fonction associée à cette courbe de Lorentz.

Montrez que : $\gamma = 1 - 2\int_0^1 f(x)dx$.

2) a) Vérifiez que les fonctions suivantes, définies sur [0 ; 1], satisfont les conditions a), b) et c) de la question 4).

$f_1 : x \longmapsto x$ $\quad f_2 : x \longmapsto x^2$ $\quad f_3 : x \longmapsto x^3$ $\quad f_4 : x \longmapsto -\frac{3}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{4}x$

b) Calculez les quatre coefficients de Gini correspondants.
c) Représentez ces quatre fonctions sur un même graphique.
3) Rangez les fonctions de la question 2) de celle correspondant à la répartition des salaires la plus égalitaire à celle correspondant à la répartition des salaires la moins égalitaire.