# Correction du devoir maison 7

**Exercice 1**

***Savoir-faire évalués dans cet exercice :***

- *Déterminer l'équation d'une tangente.*
- *Dériver la fonction exponentielle.*
- *Connaître les propriétés des coordonnées d'un point d'une courbe représentative de fonction, d'un projeté orthogonal, d'un point sur un axe de coordonnées.*
- *Interpréter et déterminer les coordonnées d'un point d'intersection avec l'axe des abscisses.*
- *Déterminer les coordonnées d'un vecteur.*
- *Montrer que des vecteurs sont égaux à l'aide des coordonnées.*
- *Repérer et résoudre une équation différentielle du type $y' = ay$.*

## Partie A

**1.** *On note $T$ la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $a$.*
*$T$ a alors pour équation :*

$$T \ : \ y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

*Or, comme $f(x) = e^x$, $f'(x) = e^x$. D'où*

$$T \ : \ y = e^a(x-a) + e^a$$

*$T$ coupe l'axe des abscisses au point d'ordonnée 0. Donc l'abscisses $x$ du point P, intersection de $T$ et de l'axe des abscisses, est la solution de :*

$$\begin{array}{rcl} e^a(x-a)+e^a & = & 0 \\ e^a(x-a) & = & -e^a \\ x-a & = & -1 \\ x & = & a-1 \end{array}$$

*Donc $T$ coupe l'axe des abscisses au point $P(a-1;0)$.*

**2.** *On sait que $M$ est le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse $a$. Donc $M$ a pour coordonnées $(a;e^a)$.*
*Comme $N$ est le projeté orthogonal de $M$ sur l'axe des abscisses, $N$ a pour coordonnées $(a;0)$.*
*Or $P$ a pour coordonnées $(a-1;0)$.*
*Donc $\overrightarrow{NP}$ a pour coordonnées $\overrightarrow{NP}(a-1-a;0)$, c'est-à-dire $\overrightarrow{NP}(-1;0)$. Donc*

$$\overrightarrow{NP} = -\overrightarrow{i}$$

## Partie B

**1.** *Comme $T_a$ est la tangente à $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse $a$, elle a pour équation :*

$$T_a \ : \ y = g'(a)(x-a) + g(a)$$

*$T_a$ coupe l'axe des abscisses au point d'ordonnée 0. Donc l'abscisses $x$ du point P, intersection de $T_a$ et de l'axe des abscisses, est la solution de :*

$$\begin{array}{rcl} g'(a)(x-a)+g(a) & = & 0 \\ g'(a)(x-a) & = & -g(a) \\ x-a & = & -\dfrac{g(a)}{g'(a)} \\ x & = & a-\dfrac{g(a)}{g'(a)} \end{array}$$

*Donc $T_a$ coupe l'axe des abscisses au point $P\left(a-\dfrac{g(a)}{g'(a)};0\right)$.*

**2.** *On sait que $M$ est le point de $\mathscr{C}_g$ d'abscisse $a$. Donc $M$ a pour coordonnées $(a;g(a))$.*
*Comme $N$ est le projeté orthogonal de $M$ sur l'axe des abscisses, $N$ a pour coordonnées $(a;0)$.*

*Or $P$ a pour coordonnées* $\left(a - \dfrac{g(a)}{g'(a)} ; 0\right)$.

*Donc* $\overrightarrow{NP}$ *a pour coordonnées* $\overrightarrow{NP}\left(a - \dfrac{g(a)}{g'(a)} - a ; 0\right)$, *c'est-à-dire* $\overrightarrow{NP}\left(-\dfrac{g(a)}{g'(a)} ; 0\right)$.

*Or*

$$\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{i} \Leftrightarrow \overrightarrow{NP}(1;0) \Leftrightarrow -\frac{g(a)}{g'(a)} = 1 \Leftrightarrow g(a) = -g'(a)$$

*Donc $g$ est solution de l'équation différentielle $y' = -y$.*
*$g$ est alors une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = ke^{-x}$ avec $k \in \mathbb{R}$.*
*Comme $g(0) = 2$, $k = 2$.*
*Par conséquent, il existe une unique fonction $g$ telle que $g(0) = 2$ et $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{i}$ qui est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2e^{-x}$.*

**Exercice 2**

***Savoir-faire évalués dans cet exercice :***

- *Déterminer les points invariants d'une application.*
- *Résoudre une équation complexe.*
- *Déterminer un argument d'un complexe.*
- *Interpréter avec les arguments l'appartenance au cercle de diamètre [AB].*
- *Déterminer l'image d'un point par une application.*
- *Interpréter géométriquement les arguments.*
- *Déterminer un ensemble de points à partir d'une condition sur les arguments (et inversement).*

**Partie A** *(cf cours)*

**Partie B**

**1.** **a.** *Déterminons tout d'abord les affixes des points invariants par $f$.*
*Déterminer les points invariants par $f$ revient à déterminer les points $M$ tels que :*

$$\begin{aligned} f(M) = M &\Leftrightarrow z' = z \\ &\Leftrightarrow \frac{iz+3}{z+i} = z \\ &\Leftrightarrow iz + 3 = z^2 + iz \\ &\Leftrightarrow z^2 = 3 \\ &\Leftrightarrow z = \sqrt{3} \text{ ou } z = -\sqrt{3} \end{aligned}$$

*Donc, les points invariants par $f$ sont les points $I$ et $J$ d'affixes respectives $\sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$.*
*Montrons que $I$ et $J$ appartiennent au cercle de diamètre [AB].*
*Comme $I$ et $J$ sont distincts de $A$ et $B$, ils appartiennent au cercle de diamètre [AB] si et seulement si $IAB$ et $JAB$ sont respectivement rectangles en $I$ et $J$, c'est-à-dire* $\left(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}\right) = \dfrac{\pi}{2}[\pi]$ *et* $\left(\overrightarrow{JA}, \overrightarrow{JB}\right) = \dfrac{\pi}{2}[\pi]$.
*Déterminons* $\left(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}\right)$.

$$\begin{aligned} \left(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}\right) &= \arg\left(\frac{z_B - z_I}{z_A - z_I}\right) \\ &= \arg\left(\frac{3i - \sqrt{3}}{-i - \sqrt{3}}\right) \\ &= \arg\left(\frac{(3i - \sqrt{3})(-\sqrt{3} + i)}{(-i - \sqrt{3})(-\sqrt{3} + i)}\right) \\ &= \arg\left(\frac{-3\sqrt{3}i - 3 + 3 - i\sqrt{3}}{3+1}\right) \\ &= \arg\left(-\sqrt{3}i\right) \\ &= -\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{aligned}$$

*Comme* $\left(\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IB}\right)=-\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$, *le triangle IAB est rectangle en I. Donc I appartient au cercle de diamètre [AB].*
*Déterminons* $\left(\overrightarrow{JA},\overrightarrow{JB}\right)$.

$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{JA},\overrightarrow{JB}\right) &= \arg\left(\frac{z_B-z_J}{z_A-z_J}\right)\\ &= \arg\left(\frac{3i+\sqrt{3}}{-i+\sqrt{3}}\right)\\ &= \arg\left(\frac{(3i+\sqrt{3})(\sqrt{3}+i)}{(-i+\sqrt{3})(\sqrt{3}+i)}\right)\\ &= \arg\left(\frac{3\sqrt{3}i-3+3+i\sqrt{3}}{3+1}\right)\\ &= \arg\left(\sqrt{3}i\right)\\ &= \frac{\pi}{2}[2\pi]\end{aligned}$$

*Comme* $\left(\overrightarrow{JA},\overrightarrow{JB}\right)=\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$, *le triangle JAB est rectangle en J. Donc J appartient au cercle de diamètre [AB].*
***Remarques :*** *Les points I et J sont donc sur l'axe des abscisses (car leurs affixes sont réelles) et sur le cercle de diamètre [AB]*

**b.** *Déterminons l'affixe $c'$ du point C', image de C par $f$.*

$$c'=\frac{i(-2+i)+3}{-2+i+i}=\frac{-2i+2}{-2+2i}=-1$$

*Donc, comme $c'$ est un réel, C' est sur l'axe des abscisses.*

**2.** *Exprimons* $\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)$ *en fonction de* $\arg(z')$.

$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right) &= \arg\left(\frac{z_B-z}{z_A-z}\right)\\ &= \arg\left(\frac{3i-z}{-i-z}\right)\\ &= \arg\left(\frac{z-3i}{z+i}\right)\\ &= \arg\left(\frac{-i\left(\frac{z}{-i}+3\right)}{z+i}\right)\\ &= \arg(-i)+\arg\left(\frac{iz+3}{z+i}\right) \quad \textit{car } \frac{z}{-i}=\frac{iz}{-i\times i}=iz\\ &= -\frac{\pi}{2}+\arg(z') \textit{ à } 2\pi \textit{ près}\end{aligned}$$

*On a donc bien :*

$$\arg(z')=\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)+\frac{\pi}{2} \textit{ à } 2\pi \textit{ près}$$

**3.** **a.** *$z'$ est un imaginaire pur si et seulement si $\arg(z') = \frac{\pi}{2}[2\pi]$. On a alors :*

$$\begin{aligned}\arg(z') = \frac{\pi}{2}[2\pi] &\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}[2\pi]\\ &\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}[2\pi]\\ &\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) = 0[2\pi]\\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \textit{ et } \overrightarrow{MB} \textit{ sont colinéaires}\\ &\Leftrightarrow M \in (AB)\end{aligned}$$

*Donc l'ensemble des points M tels que $z'$ soit un imaginaire pur est la droite (AB).*

**b.** *M appartient au cercle de diamètre [AB] privé de A et B si et seulement si $\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) = \frac{\pi}{2}[\pi]$, c'est-à-dire :*

$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) = \frac{\pi}{2}[\pi] &\Leftrightarrow \arg(z') - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}[\pi]\\ &\Leftrightarrow \arg(z') = 0[\pi]\\ &\Leftrightarrow z' \in \mathbb{R}^*\\ &\Leftrightarrow M' \textit{ appartient à l'axe des abscisses}\end{aligned}$$

*Donc si M appartient au cercle de diamètre [AB] privé de A et B alors M' est sur l'axe des abscisses.*

**Exercice 3**

***Savoir-faire évalués dans cet exercice :***

- *Utiliser les formules de trigonométrie dans un triangle rectangle pour déterminer des longueurs.*
- *Dériver les fonctions trigonométriques.*
- *Déterminer le minimum d'une fonction en étudiant ses variations.*
- *Résoudre des inéquations trigonométriques dans un intervalle donné.*
- *Connaître les valeurs remarquables des cosinus et sinus.*

**1.** **a.** *Dans le triangle BMQ rectangle en M :*

$$\cos\theta = \frac{MQ}{BM} \Leftrightarrow BM = \frac{5}{\cos\theta}$$

**b.** *Dans le triangle BMQ rectangle en M :*

$$\tan\theta = \frac{BQ}{MQ} \Leftrightarrow BQ = 5\tan\theta$$

*On a alors :*

$$MH = BC - BQ = 6 - 5\tan\theta$$

**2.** *Pour tout $\theta \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$,*

$$l(\theta) = AM + BM + MH = 2BM + MH = \frac{10}{\cos\theta} + 6 - 5\tan\theta$$

**3.** *Comme $\cos\theta$ ne s'annule pas sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, la fonction est dérivable sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ en tant que somme de fonctions dérivables.*
*Pour tout $\theta \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$,*

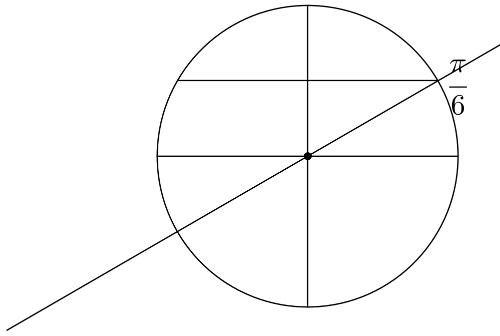
$$l'(\theta) = 10 \times \left(-\frac{-\sin\theta}{\cos^2\theta}\right) - 5 \times \frac{1}{\cos^2\theta} = 5\,\frac{2\sin\theta - 1}{\cos^2\theta}$$

**4.** *Afin de déterminer le minimum de la fonction $l$ sur* $\left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[$, *étudions les variations de $l$.*

*Comme* $\cos^2\theta > 0$ *pour tout* $\theta \in \left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[$, $l'(\theta)$ *est du signe de* $2\sin\theta - 1$.

*Résolvons* $2\sin\theta - 1 < 0$ *sur* $\left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[$ :

$$\begin{aligned} 2\sin\theta - 1 < 0 &\Leftrightarrow 2\sin\theta < 1 \\ &\Leftrightarrow \sin\theta < \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \theta \in \left]0; \frac{\pi}{6}\right[ \end{aligned}$$




*On a alors le tableau de variations suivant :*

| $\theta$ | $0$ | | $\dfrac{\pi}{6}$ | | $\dfrac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $l'(\theta)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | ‖ |
| $l(\theta)$ | ‖ | ↘ | $\dfrac{15}{\sqrt{3}} + 6$ | ↗ | ‖ |

*La fonction $l$ est donc minimisée pour un angle* $\theta_0 = \dfrac{15}{\sqrt{3}} + 6$. *La longueur minimale des trois tuyaux est alors environ 14,66 mètres.*