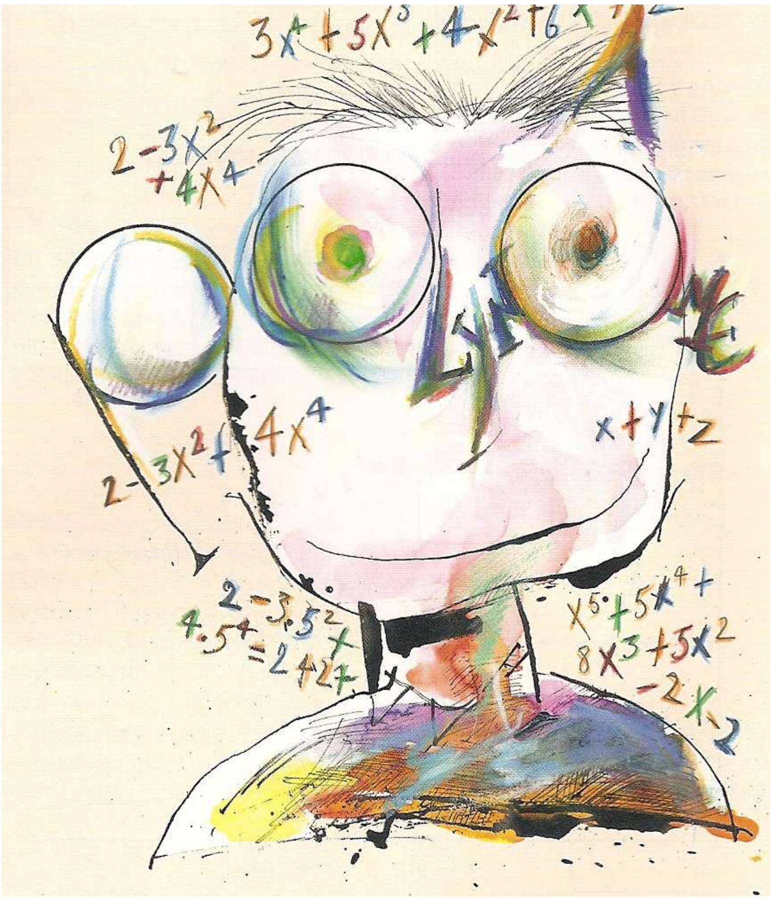
Cours de mathématiques



Terminale S3

Année 2009-2010

Table des matières

Première partie

Les fonctions.

Chapitre 1

Les limites (suite du cours)

IV Limites par comparaison

1 Théorème de majoration, minoration

Théorème 2 (ROC)
Soit f, u et v des fonctions définies sur un intervalle du type $]a;+\infty[$ où a est un réel.

- *Si, pour x assez grand, on a $f(x) \geq u(x)$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = +\infty$ alors :*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

- *Si, pour x assez grand, on a $f(x) \leq v(x)$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} v(x) = -\infty$ alors :*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

Remarque : Ce théorème reste valable lorsque l'on considère la limite en $-\infty$ ou en un réel a. La démonstration est alors analogue à celle donnée ci-dessous.

Exemple 10
Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} x + \sin x$.

2 Théorème des gendarmes

Théorème 3 (ROC)
Soit f, u et v des fonctions définies sur un intervalle du type $]a;+\infty[$, où a est un réel. Soit l un nombre réel.
Si, pour x assez grand, $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} v(x) = l$ alors

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$$

Remarque : On obtient des résultats analogues lorsqu'on considère la limite en $-\infty$ ou en un réel a.

Exemple 11
Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin x}{x}$.

V Fonctions et suites

Théorème 4 (ROC)
Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite de terme général $u_n = f(n)$ où f est une fonction définie sur $[n_0;+\infty[$.
Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$, l étant finie ou infinie, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.

Chapitre 2

Dérivation

I Dérivabilité

1 Nombre dérivé

Définition 1

f est une fonction définie sur un intervalle I et a est un réel appartenant à I. h est un réel différent de 0.

*Dire que f est **dérivable en** a signifie que le **taux d'accroissement** $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admet une limite finie lorsque h tend vers 0.*

*Si f est dérivable en a, on appelle **nombre dérivé** de f en a, le nombre réel $f'(a)$, défini par :*

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Remarque : La définition de la dérivabilité peut aussi s'écrire : "*Dire que f est dérivable en a signifie que $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie lorsque x tend vers a.*"

Exemple 1

Démontrer que la fonction $x\mapsto\dfrac{1}{x}$, définie sur $]0;+\infty[$, est dérivable en 2 et déterminer $f'(2)$.

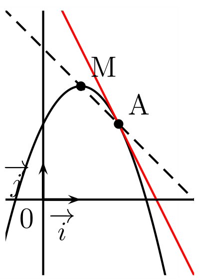
Exemple 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=|x|$. Montrer que f n'est pas dérivable en 0.

Exercice 1

Montrer que la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0.

2 Interprétation graphique et tangente



Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative dans un repère $\left(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'une fonction f définie sur I.

a et $a+h$ sont deux réels de I avec $h\neq 0$.

A et M sont des points d'abscisses respectives a et $a+h$.

Le taux d'accroissement $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ est le coefficient directeur de la droite (AM).

Dire que $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tend vers $f'(a)$ quand h tend vers 0 signifie que le coefficient directeur de (AM) tend vers $f'(a)$ quand M se rapproche de A.

Autrement dit, quand M se rapproche de A sur la courbe, la droite (AM) tend vers une position limite : celle de la droite passant par A et de coefficient directeur $f'(a)$, appelée tangente à $\mathscr{C}$ en A.

Définition 2

f est une fonction définie sur I, dérivable en un réel a de I.

*Dans un repère, la **tangente** à la courbe représentative de f **au point d'abscisse** a est la droite **passant par A** et de **coefficient directeur** $f'(a)$.*

Une équation de cette tangente au point d'abscisse a est donc :

$$y=f'(a)(x-a)+f(a)$$

Exemple 3
Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.
On note $\mathscr{H}$ sa courbe représentative dans un repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{H}$ au point d'abscisse 2.

Proposition 1
f est une fonction définie sur I et a est un réel de I. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère.
On suppose que f n'est pas dérivable en a.

- *Si $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \pm\infty$, on dit que $\mathscr{C}$ admet au point d'abscisse a une tangente verticale d'équation $x = a$.*
- *Si $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ a des limites en a à droite et à gauche, distinctes, on dit que $\mathscr{C}$ admet deux "demi-tangentes".*

3 Interprétation numérique et approximation affine

Proposition 2
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et x un réel appartenant à I.
Il existe une fonction ϵ telle que pour tout réel h non nul tel que $x+h$ appartient à I

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + h\epsilon(h) \text{ avec } \lim_{h\to 0} \epsilon(h) = 0$$

On obtient ainsi l'approximation $f(x+h) \approx f(x) + hf'(x)$ lorsque h est proche de 0.

Exemple 4
Donner une valeur approchée de $\dfrac{1}{2,05}$.

II Fonctions dérivées

1 Fonction dérivée

Définition 3
f est une fonction définie sur un intervalle I.
Dire que f est ***dérivable sur I*** *signifie que f est dérivable en tout a de I.*
Si f est dérivable sur I, on appelle ***fonction dérivée*** *de f la fonction, notée f', définie sur I par :*

$$f' \ : \ x \mapsto f'(x)$$

Exemple 5
Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$, définie sur $]0;+\infty[$ est dérivable sur $]0;+\infty[$. Déterminer sa fonction dérivée.

2 Dérivées de fonctions usuelles.

fonction f	fonction dérivée $f'(x)$	validité
$f : x \mapsto k,\ k \in \mathbb{R}$	$f' : x \mapsto 0$	$\mathbb{R}$
$f : x \mapsto x$	$f' : x \mapsto 1$	$\mathbb{R}$
$f : x \mapsto x^2$	$f' : x \mapsto 2x$	$\mathbb{R}$
$f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$f' : x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$f : x \mapsto x^n,\ n \in \mathbb{Z}$	$f' : x \mapsto nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$ si $n > 0$, $\mathbb{R}^*$ si $n < 0$
$f : x \mapsto \sqrt{x}$	$f' : x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$
$f : x \mapsto \cos x$	$f' : x \mapsto -\sin x$	$\mathbb{R}$
$f : x \mapsto \sin x$	$f' : x \mapsto \cos x$	$\mathbb{R}$

3 Opérations sur les dérivées

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervale I. k est un nombre réel.

Théorème 1

- *La fonction $u + v$ est dérivable sur I et*

$$(u+v)' = u' + v'$$

- *La fonction uv est dérivable sur I et :*

$$(uv)' = u'v + v'u$$

- *La fonction ku est dérivable sur I et :*

$$(ku)' = ku'$$

- *La fonction $\dfrac{u}{v}$ est dérivable pour tout réel x de I tels que $v(x) \neq 0$ et :*

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

- *La fonction $\dfrac{1}{v}$ est dérivable sur I et :*

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$$

Proposition 3

- *Les fonctions **polynômes** sont dérivables sur $\mathbb{R}$.*
- *Les fonctions **rationnelles** sont dérivables sur chaque intervalle de leur ensemble de définition.*

4 Dérivée d'une fonction composée

Activité 2 p. 41

Théorème 2 (R.O.C.)
u est une fonction dérivable sur un intervalle I et v est une fonction dérivable sur un intervalle J tel que :

pour tout x appartenant à I, $u(x)$ appartient à J.

Alors la fonction composée $v \circ u$ est dérivable sur I et, pour tout x appartenant à I :

$$(v \circ u)'(x) = u'(x) \times v'\left(u(x)\right)$$

Démonstration

Exemple 6
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos\left(x^2\right)$.
Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa dérivée f'.

Théorème 3
Soit u une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

- *Si u est dérivable sur I alors, pour tout entier naturel n non nul, la fonction u^n est dérivable sur I et*

$$(u_n)' = nu'u^{n-1}$$

- *Si u est dérivable sur I et ne s'annule pas sur I alors, pour tout entier naturel n non nul, la fonction $\dfrac{1}{u^n}$ est dérivable sur I et*

$$\left(\frac{1}{u_n}\right)' = -\frac{nu'}{u^{n+1}}$$

- *Si u est dérivable sur I et est strictement posititve sur I alors la fonction $\sqrt{u}$ est dérivable sur I et*

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

Remarques : On peut seulement retenir que : "Si u est dérivable sur I et ne s'annule pas sur I alors, pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$, la fonction u^n est dérivable sur I et $(u_n)' = nu'u^{n-1}$."

Exercice 2
Démontrer les formules du théorème précédent en utilisant le théorème 2 et la fonction v adéquate.

Exemple 7
Dériver la fonction f définie sur $[1; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

5 Dérivées successives

Définition 4
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

- *Lorsque f' est elle-même dérivable sur I, f' admet une dérivée sur I appelée* ***dérivée seconde*** *de f et notée f'' ou $f^{(2)}$. On dit alors que f est* ***deux fois dérivable*** *sur I.*
- *Lorsque f'' est elle-même dérivable sur I, f'' admet une dérivée sur I appelée* ***dérivée troisième*** *de f et notée f''' ou $f^{(3)}$. On dit alors que f est* ***trois fois dérivable*** *sur I.*
- *Plus généralement, on définit la* ***dérivée n-ième*** *de f notée $f^{(n)}$; c'est la dérivée sur I de $f^{(n-1)}$ lorsque $f^{(n-1)}$ est dérivable sur I.*

Exemple 8
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{1}{3}\,x^3 - 5x^2 + x - \sqrt{3}$$

Déterminer les dérivées successives de f sur $\mathbb{R}$.

III Applications de la dérivation

1 Dérivées et calculs de limites

On peut utiliser le nombre dérivé pour calculer certaines limites. En effet, si l'expression donnée est de la forme $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ où f est une fonction dérivable en a alors $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$.

Exemple 9
Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x}$.

2 Dérivées et variations d'une fonction

Théorème 4 (Du sens de variation de f au signe de f')
Soit f une fonction dérivable et monotone sur un intervalle I.
- *Si f est constante sur I alors, pour tout x appartenant à I, $f'(x) = 0$.*
- *Si f est croissante sur I alors, pour tout x appartenant à I, $f'(x) \geq 0$.*
- *Si f est décroissante sur I alors, pour tout x appartenant à I, $f'(x) \leq 0$.*

Théorème 5 (Du signe de f' aux variations de f)
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et f' sa dérivée sur I.
- *Si f' est nulle sur I alors f est constante sur I.*
- *Si f' est strictement positive sur I, sauf éventuellement pour un nombre fini de valeurs où elle s'annule, alors f est strictement croissante sur I.*
- *Si f' est strictement négative sur I, sauf éventuellement pour un nombre fini de valeurs où elle s'annule, alors f est strictement décroissante sur I.*

Méthode :
Pour étudier le sens de variation d'une fonction f dérivable sur son ensemble de définition $\mathscr{D}_f$:
- ▷ On détermine la dérivée f' de f.
- ▷ On étudie le signe de f' sur $\mathscr{D}_f$.
- ▷ On applique le théorème précédent sur chacun des intervalles de $\mathscr{D}_f$ où le signe de f' est constant.

Exemple 10
Etudier le sens de variation de f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 4$

Théorème 6
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I ouvert de $\mathbb{R}$ et a un réel appartenant à I.
- *Si f admet un extremum local en a alors $f'(a) = 0$.*
- *Si f' s'annule en a en changeant de signe alors f admet un extremum local en a.*

Exemple 11
La fonction $f : x \mapsto x^3$ admet-elle un extremum local en zéro ?

Bilan : Dérivation.

IV R.O.C.

- ***Théorème 2*** : Démontrer la formule de dérivation d'une fonction composée.
- ***Théorème 3*** : Connaissant la formule de dérivation d'une fonction composée, retrouver les formules pour les dérivées de u^n et $\sqrt{u}$.

V Ce qu'il faut savoir faire

Les exercices du livre sont entre les pages 56 et 67.

- Etudier la dérivabilité d'une fonction en un point.
  Exemples 1 et 2, exercices 6, 7, 62 à 64
- Déterminer le **nombre dérivé** d'une fonction en un point.
  - En calculant un **taux d'accroissement**.
    Exemple 1 et exercice 7a
  - Par lecture graphique du **coefficient directeur de la tangente.**
    Exercices 9 et 24.
- Déterminer l'**équation d'une tangente**.
  Exemple 3 et TD "fonction tangente"
- Déterminer l'**approximation affine** d'une fonction au voisinage d'un réel.
  Exemple 4
- Utiliser une approximation affine pour déterminer des valeurs approchées.
  Exemple 4, exercice 10
- Démontrer les formules de fonctions dérivées
  Exemple 5.
- Justifier la dérivabilité d'une fonction en utilisant les opérations sur les fonctions de référence, la composée de fonctions de référence ou la définition de la dérivabilité
  Exemples 6 et 7 et exercices 14 à 24
- Déterminer la fonction dérivée d'une fonction en utilisant les opérations sur les fonctions de référence.
  Exemple 8 et exercices 14 à 18, 43(DM)
- Déterminer la fonction dérivée d'une fonction composée.
  Exemples 6, 7 et exercices 19 à 24, 86(DM)
- Déterminer la **position relative** entre une courbe et ses tangentes
  TD "fonction tangente"
- Déterminer les dérivées successives de f.
  Exemple 8
- Déterminer une limite en utilsant le nombre dérivé.
  Exemple 9, exercices 25 à 28.
- Déterminer les variations d'une fonction en étudiant le signe de sa dérivée.
  Exemples 10 et 11, Exercices 29 à 37, 40, 43(DM)
- Déterminer le signe d'une fonction à partir de son tableau de variations et de ses extrema locaux.
  TD "fonction tangente", exercice 43(DM)
- Résoudre des équations et inéquations trigonométriques dans un intervalle donné.
  TD "équations et inéquations trigonométriques", exercices 45 à 51, 80, 81, 86(DM)
- Etudier une fonction trigonométrique (parité, périodicité, dérivée, courbe représentativee...)
  TD "fonction tangente", exercices 54, 56, 86(DM).

VI Pour préparer le BAC.

- Exercices D(1 à 4), E, F et G p. 68-69

Chapitre 3

La fonction exponentielle.

I Equation différentielle ; $y' = y$ et $y(0) = 1$

Théorème 1 (ROC)
Il existe une unique fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ solution de l'équation différentielle (E) :

$$(E)\left\{\begin{array}{l} y' = y \\ y(0) = 1 \end{array}\right.$$

Démonstration :

- **Existence**
  L'existence de cette fonction sera établie dans un chapitre ultérieur. Cependant, nous avons vu que la méthode d'Euler nous permet de tracer la courbe "approchée" d'une telle fonction (cf. "Activité vers une nouvelle fonction")
- **Unicité** :
  On suppose qu'il existe une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ solution de (E). On souhaite démontrer que f est unique. Pour cela, nous avons besoin du lemme suivant :

  Lemme 1
  Si f est une solution de (E) alors f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

  Démonstration :
  La démonstration a été faite au I2a de l'activité "vers une nouvelle fonction". Rappelons l'idée de la démonstration.
  - On considère la fonction $c: \ x \mapsto f(x)f(-x)$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
  - On démontre que $c(x) = 1$ pour tout réel x (on montre que $c'(x) = 0$ pour montrer que c est constante puis que $c(0) = 1$)
  - On en déduit que f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ par un raisonnement par l'absurde.

  Démonstration de l'unicité : la démonstration de l'unicité d'une solution de (E) en utilisant le lemme précédent a été faite au I2b de l'activité "vers une nouvelle fonction". Rappelons l'idée de la démonstration.
  - On suppose qu'il existe deux fonctions f et g solutions de (E).
  - On considère la fonction $h: \ x \mapsto \dfrac{g(x)}{f(x)}$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ (car f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ d'après le lemme).
  - On démontre que $h(x) = 1$ pour tout réel x (on montre que $h'(x) = 0$ pour montrer que h est constante puis que $h(0) = 1$)
  - On en déduit que f et g sont égales sur $\mathbb{R}$.

Définition 1
L'unique fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ solution de l'équation différentielle $\left\{\begin{array}{l} y' = y \\ y(0) = 1 \end{array}\right.$ *est appelée la* ***fonction exponentielle.***
Elle est notée exp

II Propriété algébrique de la fonction exponentielle

1 Relations fonctionnelles

Théorème 2 (ROC)
Pour tous réels a et b,

$$\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$$

Démonstration :
Soit a un réel quelconque fixé.
On considère la fonction h définie par $h(x) = \dfrac{\exp(a+x)}{\exp(a)}$.
On veut démontrer que, pour tout réel x, $h(x) = \exp(x)$.
h est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ car la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ (par définition) et ne s'annule pas (d'après le lemme). On a alors, pour tout réel x,

$$h'(x) = \frac{\exp'(a+x)}{\exp(a)}$$

Or $\exp(a+x) = \exp(u(x))$ avec $u(x) = a+x$. Donc $(\exp(a+x))' = u'(x) \times \exp'(u(x)) = \exp(a+x)$.
Donc

$$h'(x) = \frac{\exp(a+x)}{\exp(a)} = h(x)$$

Or $h(0) = \dfrac{\exp(a+0)}{\exp(a)} = 1$.
Ainsi, h est l'unique solution de l'équation $(E) \left\{ \begin{array}{l} y' = y \\ y(0) = 1 \end{array} \right.$, c'est-à-dire la fonction exponentielle.
Par conséquent, pour tout réel x,

$$h(x) = \frac{\exp(a+x)}{\exp(a)} = \exp(x)$$

On a donc démontré que, a étant un réel quelconque, pour tout réel x,

$$\exp(a+x) = \exp(a)\exp(x)$$

On a donc prouvé que, pour tout réel a, pour tout réel b,

$$\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$$

Remarque : On dit que la fonction exponentielle vérifie la relation fonctionnelle fondamentale $f(x+y) = f(x)f(y)$. Ceci signifie que la fonction exp transforme les sommes en produits.

Théorème 3 (ROC)
Pour tout réel a et tout réel b, on a :

- $\exp(-a) = \dfrac{1}{\exp(a)}$
- $\exp(a-b) = \dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}$
- $\exp(na) = (\exp(a))^n$, *pour tout entier relatif n.*

Démonstration :
- Soit a un réel quelconque.
  D'une part, $\exp(a-a) = \exp(0) = 1$.
  D'autre part, $\exp(a-a) = \exp(a+(-a)) = \exp(a) \times \exp(-a)$.
  Donc $\exp(a) \times \exp(-a) = 1$, c'est-à-dire

$$\exp(-a) = \frac{1}{\exp(a)}$$

- Soit a et b deux réels quelconques, on a alors :

$$\begin{aligned}\exp(a-b) &= \exp(a+(-b))\\ &= \exp(a)\times\exp(-b)\\ &= \exp(a)\times\frac{1}{\exp(b)}\\ &= \frac{\exp(a)}{\exp(b)}\end{aligned}$$

- Soit a un réel quelconque. Montrons tout d'abord par récurrence que $\exp(na) = (\exp(a))^n$, pour tout entier naturel n.
  - pour n=0, $\exp(0\times a) = \exp(0) = 1$ et $\exp(a)^0 = 1$. Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.
  - Soit n un entier naturel. On suppose que $\exp(na) = (\exp(a))^n$.
    On a alors $\exp((n+1)a) = \exp(na+a) = \exp(na)\times\exp(a) = (\exp(a))^n\times\exp(a) = (\exp(a))^{n+1}$.
    Donc la propriété est vraie au rang $n+1$.

  Donc $\exp(na) = (\exp(a))^n$, pour tout entier naturel n.
  Si p est une netier relatif alors $p = -n$ avec n un entier naturel. On a alors :

$$\exp(pa) = \exp(-na) = \exp(-a)^n = \left(\frac{1}{\exp(a)}\right)^n = \frac{1}{(\exp(a))^n} = \exp(a)^{-n} = \exp(a)^p$$

Exemple 1
Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (\exp(x)+\exp(-x))^2 - \exp(x)\times(\exp(x)+\exp(-3x))$ est constante.

Théorème 4 (ROC)
Pour tout réel x,

$$\exp(x) > 0$$

Démonstration
Soit x un réel :

$$\exp(x) = \exp\left(2\times\frac{x}{2}\right) = \left(\exp\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2$$

Donc, pour tout réel x, $\exp(x) \geq 0$.
Or, d'après le lemme 1, pour tout réel x, $\exp(x) \neq 0$.
Donc, pour tout réel x,

$$\exp(x) > 0$$

Exemple 2
Montrer que la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{\exp(x)-1}{\exp(x)+1}$ est impaire sur $\mathbb{R}$.

2 Une nouvelle notation

Définition 2
On note e le nombre $\exp(1)$

On a alors, pour tout $p \in \mathbb{Z}$, d'après le théorème 3(3), $\exp(p) = \exp(p\times 1) = \exp(1)^p = e^p$. On décide alors de prolonger cette égalité vrai pour $\mathbb{Z}$ à tous les réels, par la convention d'écriture suivante :

Définition 3
pour tout réel x, $\exp(x) = e^x$.

Les théorèmes 2 et 3 s'écrivent alors :

Théorème 5
pour tout réel a, pour tout réel b :

$$e^{a+b} = e^a e^b \ ;\ e^{-a} = \frac{1}{e^a}\ ;\ e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}\ ;\ e^{na} = (e^a)^n$$

Exemple 3
Simplifier l'expression suivante :

$$\frac{e^{x^2-2x}\times(e^x)^2}{(e^{2x})^3}$$

III Etude de la fonction exponentielle

1 Sens de variation et limites

Théorème 6 (Sens de variation)
La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration :
La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x :

$$\exp'(x)=\exp(x)>0\ (\textit{theo}\ 4)$$

Donc la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Exemple 4
Déterminer le sens de variation de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=e^{x^2}$.

Proposition 1 (Nombre dérivé en zéro)
- *Pour tout réel h, $e^h=1+h+h\varepsilon(h)$ avec $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$.*
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$
- *La courbe représentative de la fonction exponentielle admet une tangente au point d'abscisse 0 d'équation $y=x+1$*

Théorème 7 (Limites aux bornes de son ensemble de définition)

$$\lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty\ \textit{et}\ \lim_{x\to-\infty}e^x=0$$

Démonstration :
- Limite en $+\infty$.
  On considère la fonction définie par $g(x)=e^x-x$.
  g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x)=e^x-1$ Or la fonction exponentielle est strictement croissante avec $e^0=1$.
  Donc, pour tout réel x strictement positif : $e^x>1$. Et donc

  $$g'(x)>0\ si\ x>0$$

  La fonction est donc croissante sur $[0;+\infty[$ avec $g(0)=e^0-0=1$.
  Donc, pour tout réel x positif, $g(x)\geq g(0)\geq 0$. On en déduit que

  $$e^x\geq x+1$$

  Or $\lim\limits_{x\to+\infty}x+1=+\infty$. Donc d'après le théorème de comparaison

  $$\lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty$$

- Limite en $-\infty$.
  Si x tend vers $-\infty$ alors $-x$ tend vers $+\infty$. Donc, d'après le théorème de composition des limites,

  $$\lim_{x\to-\infty}e^x=\lim_{x\to+\infty}e^{-x}$$

  Or $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x}=0$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x$.
  Donc

  $$\lim_{x\to-\infty}e^x=0$$

Exemple 5

Déterminer les limites aux bornes de leur ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes :

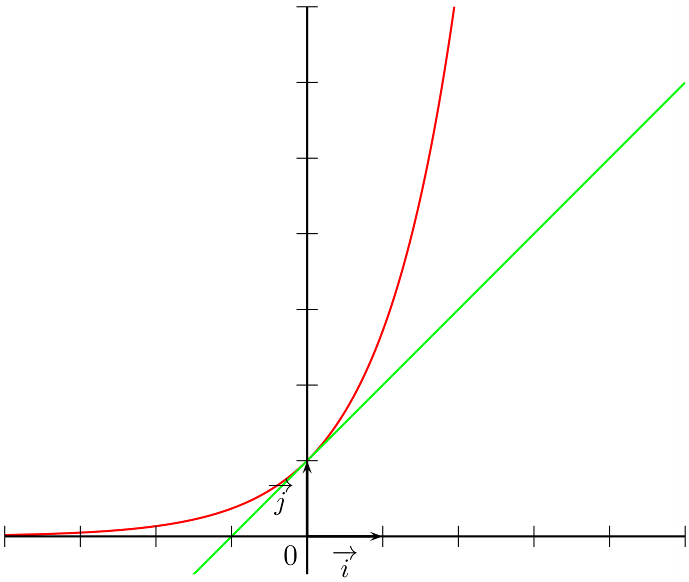
1. $g \;:\; x \mapsto e^{x^2+x+1}$
2. h : x‘ $\mapsto e^x \sin(x)$.
3. $f : x \mapsto e^{2x} - e^x$

Bilan :

- ***Tableau de variations.***

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$\exp'(x)$	$+$
$\exp(x)$	$0 \nearrow +\infty$

- ***Courbe représentative :***



Exercice 1

Montrer que la courbe représentative de la fonction exponentielle est toujours au-dessus de la droite $T : y = x + 1$.

2 Autres limites de référence

Proposition 2 (Croissance comparée)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \textit{ et } \lim_{x \to -\infty} xe^x = 0$$

Démonstration :

- Limite de $\dfrac{e^x}{x}$ en $+\infty$.

  $\dfrac{e^x}{x} = \left(\dfrac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}} \right)$.

On sait d'après la démonstration du théorème 7 que

$$\begin{array}{rcl} e^x & \geq & x+1 \\ e^{\frac{x}{2}} & \geq & \dfrac{x}{2}+1 \\ e^{\frac{x}{2}} & \geq & \dfrac{x}{2} \\ \dfrac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}} & \geq & \dfrac{\frac{x}{2}}{\sqrt{x}} \\ \dfrac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}} & \geq & \dfrac{1}{2}\sqrt{x} \\ \dfrac{e^x}{x} & \geq & \dfrac{1}{4}\,x \end{array}$$

Or, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{4}\,x = +\infty$. Donc, par comparaison des limites,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

- Limite de xe^x en $-\infty$.
  $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} xe^x = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} -\frac{-x}{e^{-x}} = \lim_{X\to+\infty} -\frac{X}{e^X}$.
  Or $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} \frac{X}{e^X} = \lim_{X\to+\infty} \frac{1}{\frac{e^X}{X}} = 0$, d'après la limite précédente.
  D'où
  $$\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$$

Exemple 6
Déterminer la limite en $+\infty$ *de* $3+\dfrac{x}{e^x+1}$.

Proposition 3
Plus généralement, on a, pour tout entier naturel n *non nul :*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \textit{ et } \lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$$

IV Equations et inéquations avec la fonction exponentielle

Théorème 8
Pour tous réels a *et* b,

$$e^a = e^b \Leftrightarrow a = b \qquad\qquad e^a > e^b \Leftrightarrow a > b$$

Démonstration
La démonstration découle de la stricte croissance de la fonction exponentielle.

Exemple 7
1. *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *l'équation* $\dfrac{e^{2x+1}}{e^{x-4}} = e^{x^2-1}$.
2. $e^{2x} \leq 1$.

V La fonction composée $x \mapsto e^{u(x)}$

Théorème 9
Siot u *une fonction définie et dérivable sur un intervalle* I *de* $\mathbb{R}$.
La fonction f *définie sur* I *par* $f(x) = e^{u(x)}$ *est dérivable sur* I *et, pour tout* x *appartenant à* I,

$$f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$$

Exemple 8
Etudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right) e^{-x^2}$$

VI Equations différentielles

1 Equation différentielle $y' = ky$

Théorème 10
Soit k un réel.
L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = ky$ est l'ensemble des fonctions $x \mapsto Ce^{kx}$ où C est une constante réelle quelconque.

Démonstration.

Exemple 9
Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y' = 2y$.

Théorème 11 (avec condition initiale)
Pour tout couple de réels $(x_0; y_0)$, il existe, sur $\mathbb{R}$, une unique solution f de l'équation différentielle $y' = ky$ vérifiant la condition initiale $y(x_0) = y_0$.

Démonstration :

Exemple 10
Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y' = 2y$ avec la condition initiale $y(1) = 1$.

2 Equation différentielle $y' = ay + b$

Théorème 12
Soit a et b deux réels avec a non nul.

L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = ay+b$ est l'ensemble des fonctions $x \mapsto Ce^{ax} - \dfrac{b}{a}$ où C est une constante réelle quelconque.

Démonstration

Théorème 13 (avec condition initiale)
Pour tout couple de réels $(x_0; y_0)$, il existe, sur $\mathbb{R}$, une unique solution f de l'équation différentielle $y' = ay+b$ vérifiant la condition initiale $y(x_0) = y_0$.

Démonstration : Remarques :
- L'équation $y' = ay+b$ est une équation différentielle du premier ordre linéaire et à coefficients constants.
- Toute solution de l'équation différentielle $y' = ay + b$ est la **somme** de la **solution générale** de l'équation différentielle $y' = ay$ et de la **solution particulière** constante de l'équation différentielle $y' = ay + b$.

Exemple 11
Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : (E) : $y' = y + 2$ avec $y(1) = 0$.

VII Relation fonctionnelle caractéristique

Théorème 14
Les trois propositions suivantes sont équivalentes :
- *f est une fonction non nulle dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que*
  pour tout réel a et b, $f(a + b) = f(a) \times f(b)$.
- *Il existe un réel k tel que la fonction f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = ky$ avec $f(0) = 1$.*
- *Il existe un réel k tel que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{kx}$.*

Démonstration

Bilan : La fonction exponentielle.

VIII ROC

- ***Théorème 1*** : unicité de la solution de $y' = y$ avec $y(0) = 1$.
- ***Théorèmes 2, 3 et 4*** : propriétés algébriques de la fonction exponentielle.
- ***Théorème 7*** : limites aux bornes de son ensemble de définition de la fonction exponentielle.

IX Ce qu'il faut savoir faire

- **Simplifier des expressions avec exponentielle et logarithme**
  Exemples 1, 2 et 3, Exercices 2, 5 à 10 p. 90

- **Déterminer des limites avec exponentielle**
  Exemple 5, Exercices 11 à 17 p. 90, 28, 29, 32, 33, 35 p. 92-93

- **Déterminer une dérivée avec exponentielle**
  Exercices 28, 29, 32, 33, 35 p. 92-93

- **Résoudre des équations et inéquations simples avec exponentielle**
  Exemple 7, exercices 22 à 26 p. 91

- **Déterminer la limite de exp(u)**
  Exemples 6 et 8, Exercices 41 à 43, 47, 48 p. 92 et 76 p. 95

- **Déterminer la dérivée de exp(u)**
  Exemple 8, exercices 44 à 48 p. 92, 76 p. 95

X Pour préparer le Bac

- Exercice C p. 100
- ***Antilles-Guyane, juin 2009*** : exercice 3 (2a, b et c).
- ***Pondichéry, avril 2009*** : Exercice 1 (1a et 1b)

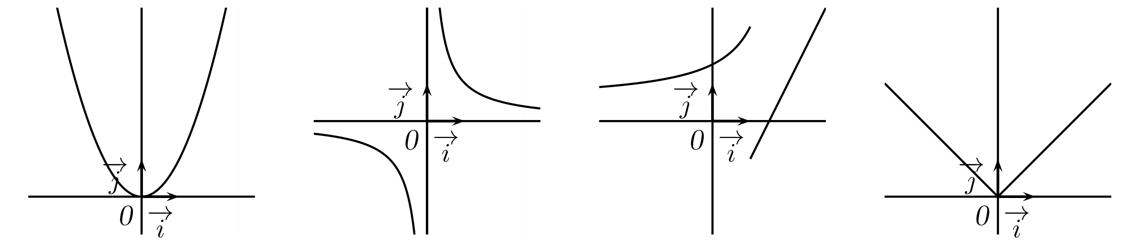
Chapitre 4

Continuité et applications.

I Continuité d'une fonction

1 Approche graphique

Exemple 1
On a représenté ci-dessous 4 fonctions f, g, h et k.
Classer ces fonctions en deux groupes.



f est une fonction définie sur un intervalle I.
Lorsque la courbe représentative de f se trace "***sans lever le crayon***", on dira que f est une fonction **continue** sur I.
Dans le cas contraire, on dira que f n'est **pas continue** sur I.

Exemple 2 (La fonction partie entière)
cf. Activité "La fonction partie entière"
La partie entière d'un réel x, notée $E(x)$, est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x.
On définit donc la fonction partie entière, notée E, pour tout réel x par

$$E(x) = n \text{ si } x \in [n; n+1[$$

avec n un entier relatif.
La fonction partie entière est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

2 Définition et exemples.

Définition 1
f est une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ contenant un réel a.
- *Dire que f est* ***continue en*** *a signifie que*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

- *Dire que f est* ***continue sur I*** *signifie que f est continue en tout réel appartenant à I.*

Exemple 3
1. *Démontrer que la fonction partie entière n'est pas continue en -1.*
2. *f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$f(x) = \begin{cases} -x & si \quad x \leq 0 \\ x^2 & si \quad 0 < x < 1 \\ 2 & si \quad x \geq 1 \end{cases}$$

f est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Si non, déterminer le plus grand ensemble sur lequel elle est continue.

Propriété 1
*Les **fonctions de référence** (fonctions puissances, fonction inverse, fonction racine carrée, fonction valeur absolue, fonction exponentielle, fonctions trigonométriques...) sont **continues sur leurs ensembles de définition.***

En utilisant la définition de la continuité et les règles opératoires sur les limites, on démontre la propriété suivante :

Propriété 2
- *La somme et le produit de deux fonctions continues sur I sont continues sur I.*
- *Le quotient $\dfrac{f}{g}$ de deux fonctions f et g continues sur I telles que g ne s'annule pas sur I est continue sur I.*
- *La composée $g \circ f$ d'une fonction f continue sur I et d'une fonction g continue sur J, tel que $f(I) \subset J$, est continue sur I.*

3 Continuité et dérivabilité

Théorème 1
f est une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ contenant a.
- *Si f est dérivable en a alors f est continue en a.*
- *Si f est dérivable sur I alors f est continue sur I.*

Démonstration.
Remarque : La réciproque de ce théorème est fausse ***(cf. contre-exemple de l'exercice 52, 3)***

Propriété 3
- *Les **fonctions polynômes** sont **continues sur** $\mathbb{R}$.*
- *Les **fonctions rationnelles** sont **continues sur chaque intervalle de leur ensemble de définition.***

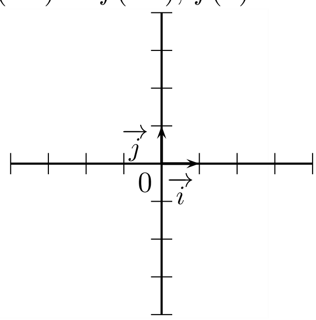
II Continuité et résolution d'équations

1 Exemples

Soit f un fonction définie sur $[-2; 3]$. Soit k un réel compris entre $f(-2)$ et $f(-3)$.

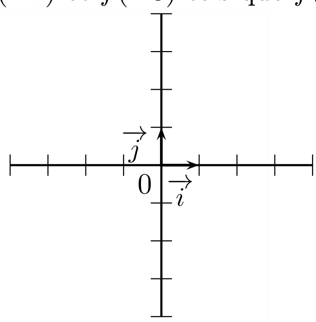
1. Dans le repère ci-dessous, construire une courbe représentative "possible" de f satisfaisant la condition suivante :

pour tout réel k compris entre $f(-2)$ et $f(-3)$, $f(x) = k$ admet au moins une solution.



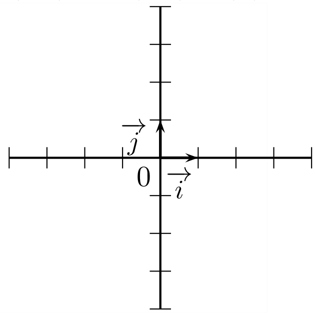
2. Dans le repère ci-dessous, construire une courbe représentative "possible" de f satisfaisant la condition suivante :

il existe des réels k compris entre $f(-2)$ et $f(-3)$ tels que $f(x) = k$ n'admet pas de solution.



3. Dans le repère ci-dessous, construire une courbe représentative "possible" de f satisfaisant la condition suivante :

pour tout réel k compris entre $f(-2)$ et $f(-3)$, $f(x) = k$ admet une unique solution.



2 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 2 (Théorème des valeurs intermédiaires)
Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et a, b deux réels appartenant à I tels que $a < b$.
*Si f est **continue sur** $[a; b]$ alors pour tout réel k **compris entre** $f(a)$ **et** $f(b)$, il existe au moins un réel c appartenant à $[a; b]$ tel que $f(c) = k$. Autrement dit, l'équation $f(x) = k$ admet **au moins une solution** c dans l'intervalle $[a; b]$.*

Remarque : Autrement dit, si f est continue sur $[a; b]$ alors elle prend toutes les valeurs entre $f(a)$ et $f(b)$.

Exemple 4

1. *f est une fonction continue sur un intervalle I, a et b sont deux réels de I tels que $f(a)f(b) < 0$. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution sur $[a; b]$.*

2. *Démontrer que l'équation $x^3 + 4x^2 + 4x + 2 = 0$ admet au moins une solutiion dans l'intervalle $[-3; -1]$.*

3 Théorème de la bijection ou de LA valeur intermédiaire

Théorème 3 (ROC)
Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et a, b deux réels appartenant à I tels que $a < b$.
*Si f est **continue** et **strictement monotone** sur $[a; b]$ alors, pour tout réel k **compris entre** $f(a)$ **et** $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une **unique solution** c dans l'intervalle $[a; b]$.*

Exemple 5
Soit f la fonction définie sur $I = \left[-\frac{\pi}{2}\ ;\ \pi\right]$ par $f(x) = x - 2\cos x + 1$.
Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur I.

Remarques :

- On peut remplacer l'intervalle $[a; b]$ par un intervalle de la forme $[a; +\infty[$ ou $]-\infty; b]$. Dans ce cas, on remplace $f(b)$ ou $f(a)$ par les limites aux bornes de l'ensemble de définition.
- Les réciproques des théorèmes 2 et 3 sont fausses. On dit que les théorèmes 2 et 3 donnent des ***conditions suffisantes*** pour que l'équation $f(x) = k$ admette une solution mais ***pas nécessaires***. (cf. exemples et remarques du 1)
- Dans les hypothèses du théorème 3 (c'est-à-dire f est continue et strictement monotone sur $[a; b]$), on dit que f réalise une bijection de $[a; b]$ sur l'intervalle $f([a; b])$.

4 Application : racine n-ième de l'unité

Exemple 6
Soit n un entier naturel non nul. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^n$. Montrer que $g(x) = k$, avec $k \geq 0$, admet une unique solution sur $[0; +\infty[$

Définition 2
Soit n un entier naturel non nul et soit k un réel positif.
*L'unique solution positive de l'équation $x^n = k$ est appelée la **racine n-ième** de k et est notée $\sqrt[n]{k}$, ou $k^{\frac{1}{n}}$.*

Exemple 7
Déterminer $\sqrt[5]{32}$, $\sqrt[3]{64}$, $\sqrt[4]{81}$.

Propriété 4
Pour tout réel x positif :

$$\sqrt[n]{x^n} = x \text{ et } \left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x$$

Définition 3
Soit n un entier naturel non nul.
*La **fonction racine n-ième** est la fonction f, définie sur $[0;+\infty[$, par $f(x) = \sqrt[n]{x}$.*

Propriété 5
Soit n un entier naturel non nul.

- *La fonction racine n-ième est définie et continue sur $[0;+\infty[$.*
- *La fonction racine n-ième est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.*
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$

Chapitre 5

Fonction logarithme népérien.

I Définition et propriétés algébriques de la fonction logarithme népérien

1 Définition

Activité : Bijection réciproque de la fonction exponentielle.

L'équation $\exp(x) = y$ où y est un réel strictement positif admet une unique solution sur $\mathbb{R}$. (théorème de la bijection)

Donc, il existe une fonction définie sur $]0;+\infty[$ qui à tout réel y strictement positif associe l'unique réel x tel que $\exp(x) = y$. Cette fonction est appelée la fonction réciproque de la fonction exponentielle.

Définition 1

La fonction ***logarithme népérien****, notée ......, est la fonction réciproque de la fonction exponentielle définie sur l'intervalle* $]0;+\infty[$.

Pour tout réel y *de l'intervalle* $]0;+\infty[$, $\ln y$ *est l'unique antécédent de* y *par la fonction exponentielle. On a alors :*

$$\textit{Pour tous réels } x \textit{ et } y \textit{ avec } y > 0,\ \ln(y) = x \Leftrightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Exemple 1

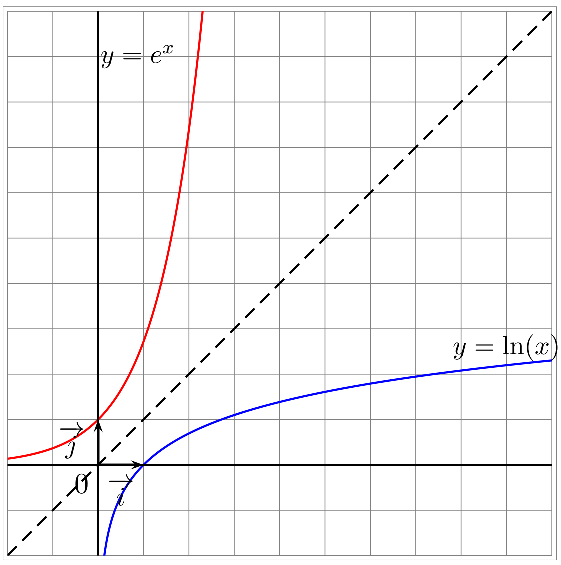
Déterminer $\ln(1)$ *et* $\ln(e)$.

Proposition 1

- *Pour tout réel* x *appartenant à l'intervalle* $]0;+\infty[$, $e^{\ln x} = \ldots\ldots$
- *Pour tout réel* x, $\ln(e^x) = \ldots\ldots$

Représentation graphique de la fonction logarithme népérien :

Comme ln est la bijection réciproque de la fonction exp, la courbe représentative de la fonction ln dans un repère orthonormé est le **symétrique** de la courbe représentative de la fonction exp par rapport à la droite Δ d'équation $y = x$.



2 Propriétés algébriques

Théorème 1 (ROC)
Pour tout réel a et tout réel b strictement positifs,

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b$$

Théorème 2 (ROC)
- *Pour tout réel a strictement positif,* $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln a$.
- *Pour tout réel a et b strictement positifs,* $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$.
- *Pour tout réel a strictement positif et tout entier relatif n,* $\ln(a^n) = n\ln a$
- *Pour tout réel a strictement positif,* $\ln(\sqrt{a}) = \dfrac{1}{2}\ln a$.

Exemple 2
Démontrer les propriétés suivantes après avoir déterminé les ensembles sur lesquels elles sont valables :
- $\ln(x^2 - x - 2) - \ln(x+1) = \ln(x-2)$.
- $\ln(1+e^x) = x + \ln(1+e^{-x})$

II Etude de la fonction ln

1 Dérivabilité

Dérivabilité et sens de variation

Théorème 3 (ROC)
La fonction ln *est continue et dérivable sur* $]0;+\infty[$ *et :*

$$\text{pour tout } x \text{ de }]0;+\infty[,\ \ln'(x) = \dots\dots\dots$$

Théorème 4
La fonction ln *est* ***strictement croissante*** *sur* $]0;+\infty[$.

Proposition 2
Pour tout réel x e y strictement positiifs :
- $\ln x < 0 \Leftrightarrow x \in]0;1[$
- $\ln x > 0 \Leftrightarrow x \in [1;+\infty[$
- $\ln x = \ln y \Leftrightarrow x = y$
- $\ln x < \ln y \Leftrightarrow x < y$

Exemple 3
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :
- $\ln(x-3) + \ln(2x+1) = 2\ln(2)$
- $\ln(2x+1) - \ln(x-3) \leq 0$
- $(\ln x)^2 - 5\ln x + 6 \geq 0$

Approximation affine au voisinage de 1

Proposition 3
- *Pour tout réel h strictement supéreieur à -1 :*

$$\ln(1+h) = h + h\varepsilon(h) \text{ avec } \lim_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0$$

- $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\ln(x)}{x-1} = 1$ *et* $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$
- *La courbe représentative de la fonction* ln *admet une tangente au point d'abscisse 1 et cette tangente a pour équation $y = x - 1$.*

Remarque : pour h proche de 0, $\ln(1+h) \approx h$

2 Limites

Limites aux bornes de son ensemble de définition

Théorème 5 (ROC)

$$\lim_{x\to 0} \ln x = -\infty \text{ et } \lim_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$$

Tableau de variation complet de la fonction $\ln$

x	0		$+\infty$
$\ln x$	$\|\|$	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

Croissances comparées de la fonction logarithme népérien et des fonctions $x \mapsto x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$

Théorème 6 (ROC)

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

Remarque : Plus généralement, pour tout entier naturel n non nul,

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$$

Théorème 7 (ROC)

$$\lim_{x\to 0} x \ln x = 0$$

Remarque : Plus généralement, pour tout entier naturel n non nul,

$$\lim_{x\to 0} x^n \ln x = 0$$

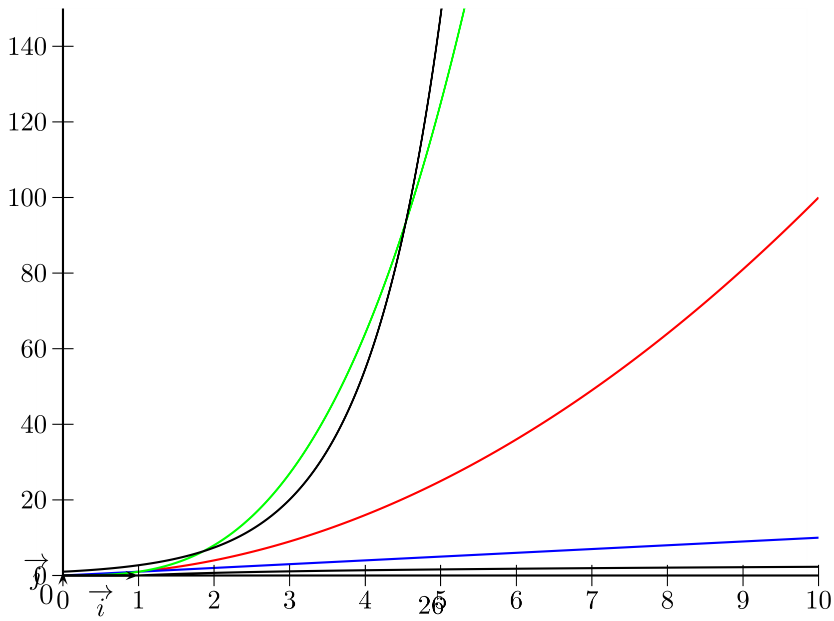
Exemple 4

Déterminer les limites suivantes :

- $\lim\limits_{x\to 0} (x^4 + x^2) \ln x$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

Interprétation graphique des théorèmes sur les croissances comparées :

On a tracé sur le graphique ci-dessous les courbes représentatives de la fonction exp, ln, $x \mapsto x$, $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^3$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$. Ce graphique illustre les théorèmes de croissance comparée en $+\infty$.



III La fonction $\ln u$

Théorème 8 (ROC)
*Soit u une fonction définie, dérivable et **strictement positive** sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.*
La fonction f définie sur I par $f(x) = \ln[u(x)]$ est définie et dérivable sur I. On a alors :

pour tout x appartenant à I, $f'(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Exemple 5
On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

Etudier le fonction f (ensemble de définition, variations, limites aux bornes de l'ensemble de définition, asymptotes...)

IV Le logarithme décimal

Définition 2
On appelle fonction logarithme décimal la fonction, notée $\log$, définie sur $]0;+\infty[$ par

$$\log(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Proposition 4
- *La fonction $\log$ a les mêmes propriétés algébriques que la fonction $\ln$.*
- *Comme $\ln 10 > 0$, la fonction $\log$ a le même sens de variation et les mêmes limites aux bornes de son ensemble de définition que la fonction $\ln$.*

Proposition 5
Pour tout réel x strictement positif et tout entier relatif n,

$$\log\left(10^n\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

En particulier

$$\log(10) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Exemple 6
Exprimer le logarithme décimal des nombres suivants en fonction de $\log 2$ et $\log 3$: 0,00648 ; 108 000 ; 81200×1280

Bilan : La fonction logarithme népérien.

V ROC

- ***Théorèmes 1,2*** : propriétés algébriques de la fonction logarithme népérien.
- ***Théorème 3*** : Dérivée de la fonction ln
- ***Théorème 5*** : limites aux bornes de son ensemble de définition de la fonction ln.
- ***Théorèmes 6 et 7*** : limites de croissance comparée.

VI Ce qu'il faut savoir faire

- **Déterminer l'ensemble sur lequel** $\ln(u(x))$ **est défini.**
  Exemples 2 et 3, Exercices 2, 7 à 12 p. 122

- **Simplifier des expressions avec le logarithme, montrer que deux expressions sont égales.**
  Exemple 2, Exercices 4, 5, 6 p. 122, Devoir maison.

- **Résoudre des équations et inéquations avec exponentielle ou logarithme.**
  Exemple 3, exercices 7 à 14 p. 122

- **Déterminer des limites avec logarithme.**
  Exemple 4, Exercices 22 à 29 p. 123

- **Déterminer une dérivée avec logarithme.**
  Exercices 15 à 21 p. 122-123

- **Déterminer la limite de** $\ln(u)$
  Exemple 5, Exercices 32, 33, 34 p. 124, A p. 129

- **Déterminer la dérivée de** $\ln(u)$
  Exemple 5, Exercices 32, 33, 34 p. 124, A p. 129
- **Simplifier des expressions avec le logarithme décimal.**
  Exemple 6, Exercices 44, 45 p. 125, Devoir maison.

VII Pour préparer le Bac

- Exercice A, B, C et E p. 131
- ***France métropolitaine, juin 2009*** : exercice 2 (Partie A)
- ***Liban, , juin 2009*** : Exercice 2 (Partie A)
- ***Antilles-Guyane , juin 2009*** : Exercice 4

Chapitre 6

Intégration et primitives.

I Intégrales.

Dans cette partie :

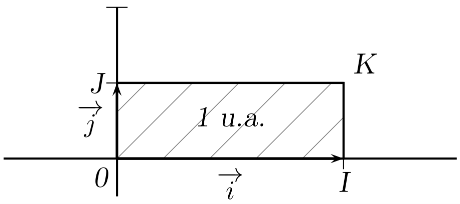
- le plan est muni d'un repère orthogonal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$
- a et b sont deux réels tels que $a < b$.
- f est une fonction dont on note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative dans le repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1 Aire sous une courbe et intégrale.

Définition 1 (Unité d'aire)
*On appelle **unité d'aire**, et on note u.a., l'unité de mesure des aires définie par*

$$1 \ u.a. = \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$$

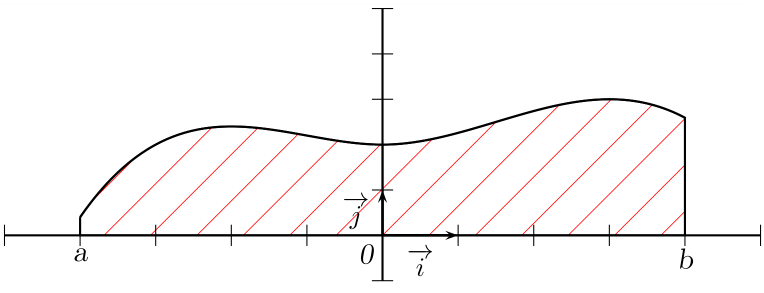
Autrement dit, une unité d'aire est l'aire du rectangle OIKJ où I, J et K sont les points définis par : $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$, $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$ et $\overrightarrow{OK} = \vec{i} + \vec{j}$



Définition 2 (Intégrale d'une fonction positive.)
*Soit f une fonction définie, **continue et positive** sur un intervalle $[a; b]$.*
On note $\mathscr{D}_f$ le domaine du plan délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équation $x = a$ et $x = b$:

$$\mathscr{D}_f = \{M(x; y) \text{ tels que } a \leq x \leq b \text{ et } 0 \leq y \leq f(x)\}$$

*On appelle **intégrale** de f entre a et b l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine $\mathscr{D}_f$. On la note $\int_a^b f(x)\,dx$.*
*Les réels a et b sont appelés les **bornes de l'intégrale** $\int_a^b f(x)\,dx$.*



Remarque : La variable x de l'intégrale est muette ; elle peut être notée par toute autre lettre. Le symbole dx ne joue aucun rôle si ce n'est de préciser quelle est la variable.

Exemple 1
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + 1$. Déterminer

$$\int_1^3 f(x)\,dx$$

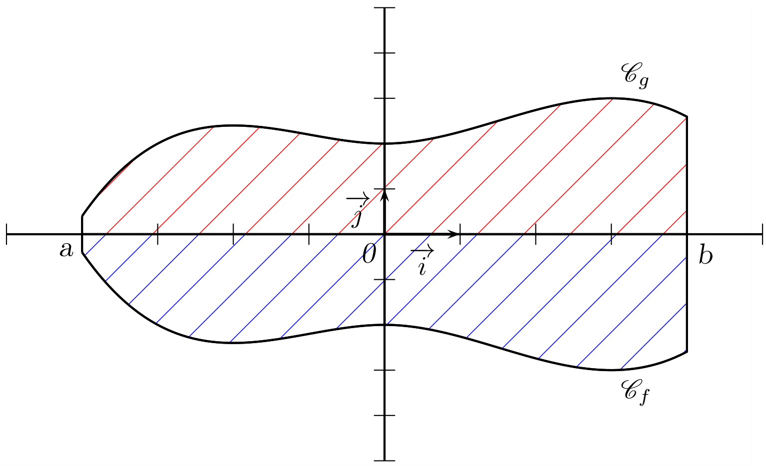
Exemple 2
f est la fonction définie sur $[-1;1]$ par $f(t) = \sqrt{1-t^2}$

1. *Vérifier que la courbe $\mathscr{C}_f$ représentant f est le demi-cercle de centre O et de rayon 1 qui est situé dans le demi-plan des ordonnées positives.*
2. *En déduire que*

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2}\,dt = \frac{\pi}{2}$$

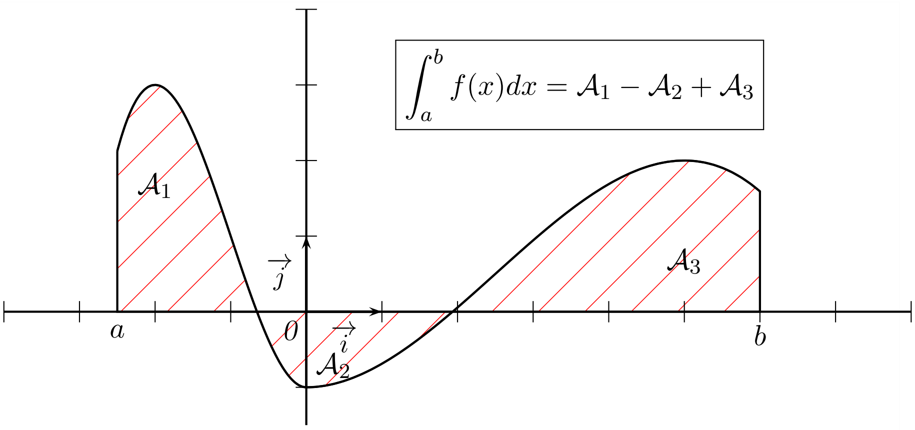
Définition 3 (Intégrale d'une fonction négative.)
*Soit f une fonction définie, **continue et négative** sur un intervalle $[a;b]$.*
On définit la fonction g sur $[a;b]$ par $g(x) = -f(x)$.
L'intégrale de f entre a et b est le réel défini par

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_a^b g(x)\,dx$$



Remarque :
On note $\mathscr{D}_f$ le domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équation $x = a$ et $x = b$. On a alors si f est négative $\int_a^b f(x)\,dx = -\mathscr{A}(\mathscr{D}_f)$.
$\int_a^b f(x)\,dx$ est appelée **aire algébrique** du domaine $\mathscr{D}_f$.
L'aire $\mathscr{A}(\mathscr{D}_f)$ du domaine $\mathscr{D}_f$ est appelée **aire géométrique**.

Définition 4 (Intégrale d'une fonction de signe non constant.)
Soit f une fonction définie, continue et de signe non constant sur un intervalle $[a;b]$.
L'intégrale de f entre a et b est la somme des aires algébriques des domaines situés entre $\mathscr{C}_f$ et l'axe des abscisses.



Exemple 3
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -0.5x + 1$.

1. *Calculer les intégrales $I = \int_0^2 f(x)\,dx$ et $J = \int_2^6 f(x)\,dx$*
2. *En déduire la valeur de $K = \int_0^6 f(x)\,dx$*

2 Propriétés de l'intégrale.

Définition 5 (Convention.)
Si f est une fonction continue sur un intervalle I alors pour tous réels a et b de I tels que $a > b$, on pose :

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx}$$

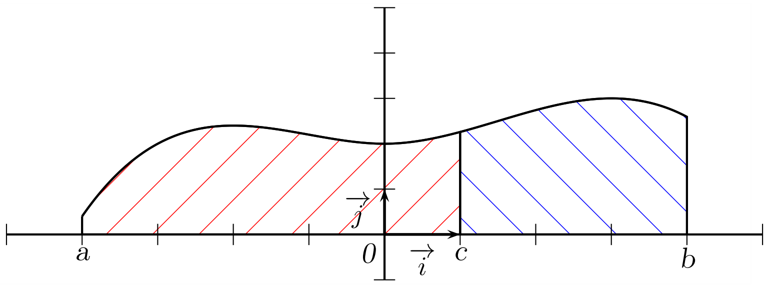
Propriété 1
Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Pour tout réel a de I, on a :

$$\boxed{\int_a^a f(x)\,dx = 0}$$

Relation de Chasles.

Propriété 2 (Relation de Chasles.)
Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Pour tous réels a, b et c de I, on a

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx}$$



Exemple 4
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-2; 5]$ par

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{2}{3}x + 2, & si\ x \in [-2; 2[\\ \dfrac{2}{3}x - \dfrac{2}{3}, & si\ x \in [2; 5] \end{cases}$$

1. *Justifier que f est continue sur $[-2; 5]$.*
2. *Déterminer la valeur exacte de $\int_{-2}^5 f(x)dx$.*

Linéarité de l'intégrale.

Propriété 3 (Admise.)
Soit f et g des fonctions définies et continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Pour tous réels a et b appartenant à I, et pour tout réel λ :

$$\boxed{\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx} \text{ et } \boxed{\int_a^b \lambda\, f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx}$$

Exemple 5

1. *Déterminer, à l'aide de considérations géométriques,* $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\,dt$.

2. *On pose* $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos^2 t\,dt$ *et* $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin^2 t\,dt$.

On admet que $J = \dfrac{\pi^2+4}{16}$.

Déterminer la valeur exacte de I.

Intégrales et inégalités.

Propriété 4 (Positivité)

*f est une fontion **continue** sur un intervalle $[a;b]$ de $\mathbb{R}$.*

- *Si f est **positive** sur $[a;b]$ alors* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.
- *Si f est **négative** sur $[a;b]$ alors* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leq 0$.

Remarque : Dans l'hypothèse de la propriété, $[a;b]$ est un intervalle. On a donc $a \leq b$.

Exemple 6

Déterminer le signe de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{\frac{1}{2}} \ln x\,dx$.

Propriété 5 (ROC)

*Soit f et g deux fonctions définies et **continues** sur un intervalle $[a;b]$ de $\mathbb{R}$.*
Si, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[a;b]$, $f(x) \leq g(x)$ alors

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

Exemple 7 (D'après Pondichéry, avril 2010)

Soit n un entier naturel non nul. On pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \ln\left(1+x^n\right)\,dx$.

Montrer que la suite (I_n) est décroissante.

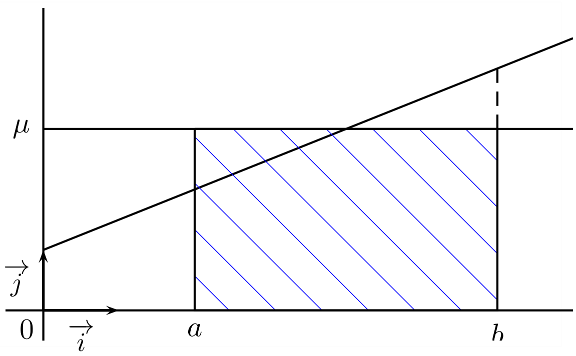
Valeur moyenne.

Définition 6 (Valeur moyenne.)

*Soit f une fonction définie et **continue** sur un intervalle $[a;b]$ avec $a < b$.*
*On appelle **valeur moyenne** de f sur $[a;b]$ le réel μ défini par*

$$\boxed{\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx}$$

Remarque : Lorsque f est positive sur $[a;b]$, l'aire du domaine délimité par $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ est égale à l'aire du rectangle de dimensions $b-a$ et μ.



Propriété 6 (Inégalité de la moyenne - ROC)

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle $[a;b]$.
Si pour tout x appartenant à l'intervalle $[a;b]$, $m \leq f(x) \leq M$ alors

$$\boxed{m \times (b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M \times (b-a)}$$

Exemple 8 (D'après Pondichéry, avril 2010)
Suite de l'exemple précédent.

1. *Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $0 \leq I_n \leq \ln(2)$.*
2. *En déduire que la suite (I_n) est convergente.*

II Primitives d'une fonction.

1 Notion de primitive.

Définition 7
Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
*On appelle **primitive** de f une fonction F dérivable sur I telle que :*

$$\boxed{F' = f \text{ sur } I}$$

Exemple 9
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x^4 - 2x - \sin x$.
Déterminer une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.

Théorème 1
Si f est une fonction continue sur un intervalle I alors f admet une primitive sur I.

Remarque : La réciproque est fausse : il exite des fonctions non continues sur I qui admettent des primitives sur I.

Théorème 2 (Ensemble des primitives.)
Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et F une primitive de f sur I.
- *Pour tout réel k, la fonction $x\ :\mapsto F(x) + k$ est aussi une primitive de f sur I.*
- *Si G est aussi une primitive de f sur I alors il existe un réel k tel que :*
  Pour tout $x \in I$, $G(x) = F(x) + k$

Remarques :
- Toute fonction ***continue*** sur I admet donc une **infinité** de primitives sur I.
- Deux primitives de f sur I diffèrent d'une constante.

Théorème 3 (Condition initiale.)
Soit f une fonction admettant des primitives sur un intervalle I, $x_0 \in I$ et y_0.
Il existe une unique primitive F de f sur I telle qe $F(x_0) = y_0$.

Exemple 10 (Suite de l'exemple 9)
Déterminer la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.

2 Primitives des fonctions de référence.

Fonction f	Fonction primitive F avec c une constante	Intervalle I
$f(x) = k$, constante	$F(x) = kx + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$, avec $n \in \mathbb{Z}^*$ et $n \neq -1$	$F(x) = \dfrac{1}{n+1}\,x^{n+1} + c$	$\mathbb{R}$ si $n > 0$ $\mathbb{R}^*$ si $n < -1$
$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x} + c$	$]0; +\infty[$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$F(x) = \ln x + c$	$]0; +\infty[$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = 1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$F(x) = \tan x + c$	$\mathbb{R}$

3 Opérations sur les primitives.

u et v sont des fonctions dérivables sur un intervalle I.

Fonction	Primitive	Conditions
$u' + v'$	$u + v$	I
ku' avec k une constante	ku	I
$u'u^n$ avec $n \in \mathbb{Z}$ et $n \neq -1$	$\dfrac{1}{n+1}\,u^{n+1}$	sur I si $n > 0$, sinon pour $x \in I$ tels que $u(x) \neq 0$
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$x \in I$ tels que $u(x) > 0$
$\dfrac{u'}{u^2}$	$-\dfrac{1}{u}$	pour $x \in I$ tels que $u(x) \neq 0$
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln u$	pour $x \in I$ tels que $u(x) > 0$
$u'e^u$	e^u	I
$v' \times (u' \circ v)$	$u \circ v$	

Exemple 11
Déterminer les primimitives des fonctions suivantes :

1. $f \ : \ x \mapsto 3e^{6x} + x^2 - 5$ *sur* $\mathbb{R}$.
2. $g \ : \ x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ *sur* $\mathbb{R}$.
3. $h \ : \ x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$ *sur* $]0; +\infty[$.

4. $n \ : \ x \mapsto \dfrac{\sin x}{1-\sin^2 x}$ *sur* $\mathbb{R}$

III Intégrales et primitives.

Théorème 4
Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et a un réel appartenant à I.
La fonction F définie sur I par

$$F \ : \ x \mapsto \int_a^x f(t)dt$$

est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a.

Exemple 12
Démontrer que pour tout réel x, $\displaystyle\int_0^x tdt = \frac{x^2}{2}$

Théorème 5 (R.O.C.)
Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, a et b deux réels appartenant à I.
On a alors

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

où F est une primitive de f sur I.

Remarque : Il est fréquent de noter $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b$

Exemple 13
Calculer $I = \displaystyle\int_0^1 x^2dx$, $J = \displaystyle\int_e^{e^2} \frac{1}{t\ln t}dt$ et $K = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \tan x dx$.

Théorème 6 (Intégrations par partie - R.O.C.)
Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I, et dont les dérivées u' et v' sont continues sur I.
Pour tous réels a et b de I, on a :

$$\boxed{\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx}$$

Exemple 14
Calculer en fonction de x $\displaystyle\int_1^x \ln t dt$

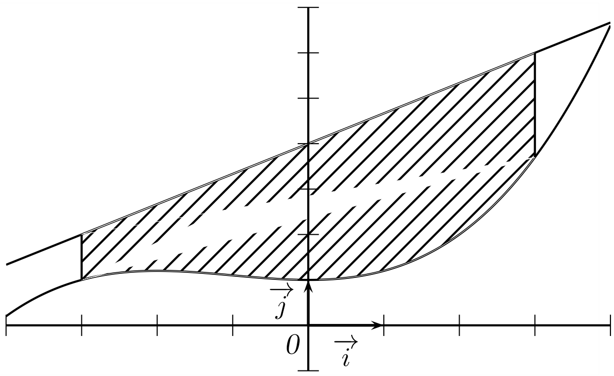
Exemple 15 (France, juin 2009)
A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\displaystyle\int_0^\lambda xe^{-x}dx$ en fonction de λ.

IV Applications du calcul intégral.

1 Aire entre deux courbes.

Théorème 7
Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a;b]$ telles que, pour tout x appartenant à $[a;b]$, $g(x) \leq f(x)$.
L'aire du domaine, $\mathscr{D}$, délimité par $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ (les courbes représentatives de f et g dans un repère orthogonal) et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est donné en unités d'aires par

$$\boxed{\mathscr{A}\left(\mathscr{D}\right) = \int_a^b \left(f(x) - g(x)\right)dx}$$



Exemple 16
Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + x - 3$ et $g(x) = 2x - 1$.

1. *Montrer que pour tout réel $x \in [-1; 2]$, $f(x) \leq g(x)$.*
2. *Déterminer en unités d'aire l'aire,$\mathscr{A}(\mathscr{D})$, du domaine $\mathscr{D}$ défini par*

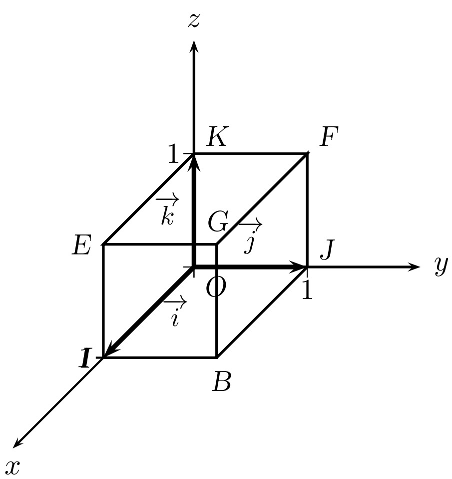
$$\mathscr{D} = \{M(x; y) tq \ -1 \leq x \leq 2 \ et \ f(x) \leq x \leq g(x)\}$$

2 Calcul de volumes.

Définition 8 (Unité de volume)
L'espace est muni d'un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.
*On appelle **unité de volume**, et on note u.v., l'unité de mesure des volumes définie par*

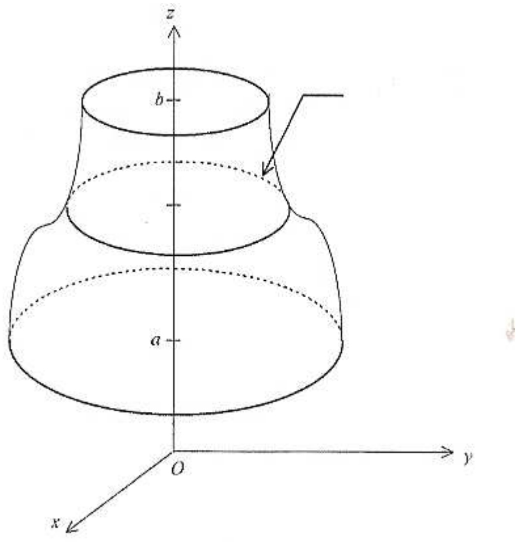
$$1 \ u.v. = \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| \times \|\vec{k}\|$$

Autrement dit, une unité de volume est le volume du parallélépipède OIDJKEGF ci-dessous :



Théorème 8 (Admis)
Dans l'espace muni d'un repère orthogonal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère un solide délimité par des plans parallèles d'équation $z = a$ et $z = b$ avec $a \leq b$.
On note $\mathscr{S}(t)$ l'aire de la section du solide par le plan $\mathscr{P}t$ d'équation $z = t$, avec $a \leq t \leq b$.
Si la fonction $\mathscr{S} \ : \ t \mapsto \mathscr{S}(t)$ est continue sur $[a; b]$ alors le volume du solide, en unités de volume, est donné par

$$\boxed{\mathscr{V} = \int_a^b \mathscr{S}(t) dt}$$



Exemple 17
Dans le repère de l'espace $\left(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$*, déterminer le volume de la sphère de rayon* R *et de centre* O *en fonction de* R*.*

Bilan : Intégration et primitives.

V ROC

- ***Propriété 5 :*** Intégrales et inégalitès.
- ***Propriété 6 :*** Inégalité de la moyenne.
- ***Théorème 2 :*** Ensemble des primitives d'une fonction.
- ***Théorème 5 :*** Formule "intégrale et primitive"
- ***Théorème 6 :*** Intégration par parties.

VI Savoir Faire

- **Calculer une intégrale en passant par un calcul d'aire.**
  Exemples 1, 2, 3, 4, 5 et Exercices 1 à 3 p. 186
- **Interpréter géométriquement une intégrale.**
  Exemples 1, 2, 3, 4, 5, Exercices 35, 36, 37 p. 189, Exercice 2 des exos de bac, exercice 2 du DM11
- **Utiliser la propriété de linéarité de l'intégrale**
  Exemples 5, Exercice 8 p. 186, Exercice 1 des exos de bac, exercice 1 du DM11
- **Comparer des intégrales.**
  Exemples 5, 7, exercice 2 du DM11
- **Calculer la valeur moyenne d'une intégrale**
  Exemples 7, Exercice 28 p. 188
- **Utiliser l'inégalité de la moyenne.**
  Exemples 8.
- **Montrer qu'une fonction est une primitive d'une autre.**
  Exercices 12 et 13 p. 187, exercice 1 des exos de bac.
- **Calculer une primitive d'une fonction.**
  Exemple 11, Exercices 14 à 18 p. 187
- **Calculer la primitive d'une fonction vérifiant une condition initiale**
  Exemple 10, Exercice 14 p. 187
- **Calculer une intégrale en passant par une primitive.**
  Exemple 13, Exercices 21 à 27 et 32 p. 188, Exercice 1 des exos de bac.
- **Calculer une intégrale à l'aide d'une intégration par parties.**
  Exemples 14 et 15, Exercices 29 à 32 p. 188, Exercices 1 et 2 des exos de bac, DM11
- **Déterminer l'aire comprise entre deux courbes.**
  Exemple 16, Exercices 38 p. 188, Exercices 1 des exos de bac, Exercice 2 du DM11.

VII Pour préparer le BAC

- Exercices A, B, C, D et E p. 196.
- ***France, juin 2009 :*** Exercice 2
- ***Liban, juin 2009 :*** Exercice 2.
- ***Amérique du nord, juin 2009 :*** Exercice 2. (donné en soutien)
- ***Pondichery, avril 2009 :*** Exercice 1.

Chapitre 7

Fonction exponentielle de base a.

I Puissance d'un réel strictement positif.

On sait que :

- Pour tout réel a strictement positif et pour tout entier relatif n, $\ln(a^n) = n \ln a$.
- Pour tout réel x strictement positif, $\exp(\ln x) = x$.

On en déduit que

$$a^n = \exp\left(\ln(a^n)\right) = \exp\left(n \ln a\right) = e^{n \ln a}$$

On ***généralise*** alors ce résultat en définissant la ***puissance réelle d'un nombre strictement positif***.

Définition 1
*Pour tout réel a strictement positif et tout **réel** b,*

$$\boxed{a^b = e^{b \ln a}}$$

Remarque : On a alors, pour tout réel a strictement positif, $a^0 = e^{0 \ln a} = 1$, convention admise dans les classes précédentes.

Proposition 1
Pour tout réel a strictement positif et tout réel b,

$$\boxed{\ln a^b = b \ln a}$$

En utilisant les propriétés algébriques de la fonction exponentielle, on retrouve alors les règles de calcul connues pour les puissances entières :

Proposition 2
Pour tous réels a strictement positifs et tous réels c et d :

$$\begin{array}{lll} a^c \times a^d = a^{c+d} & \left(a^c\right)^d = a^{cd} & a^c \times b^c = (ab)^c \\ \dfrac{1}{a^d} = a^{-d} & \dfrac{a^c}{a^d} = a^{c-d} & \dfrac{a^c}{b^c} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^c \end{array}$$

II Fonction exponentielle de base a.

Définition 2
Soit a un réel strictement positif.
On appelle fonction exponentielle de base a la fonction f_a définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\boxed{f_a \ : \ x \ \mapsto a^x}$$

Exemple 1

- *La fonction exponentielle de base e est la fonction $f \ : \ x \mapsto e^x$, c'est-à-dire la fonction exponentielle elle-même.*
- *La fonction exponentielle de base 1 est la fonction $f \ : \ x \mapsto 1$*

Proposition 3 (ROC)
Soit a un réel strictement positif.
La fonction exponentielle de base a est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $x\ :\mapsto (\ln a)a^x$

Exemple 2
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2^x$.
Déterminer sa fonction dérivée f' et en déduire son sens de variation.

Proposition 4
Soit a un réel strictement positif :
- *Si $0 < a < 1$, alors la fonction $f_a\ :\ x\ \mapsto a^x$ est strcitement décroissante sur $\mathbb{R}$.*
- *Si $a = 1$, alors la fonction $f_a\ :\ x\ \mapsto a^x$ est constante sur $\mathbb{R}$, égale à 1.*
- *Si $a > 1$, alors la fonction $f_a\ :\ x\ \mapsto a^x$ est strcitement croissante sur $\mathbb{R}$.*

Proposition 5
Si a est un réel strictement positif.
- *Si $0 < a < 1$ alors*

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty} \text{ et } \boxed{\lim_{x\to+\infty} a^x = 0}$$

- *Si $a > 1$ alors*

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} a^x = 0} \text{ et } \boxed{\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty}$$

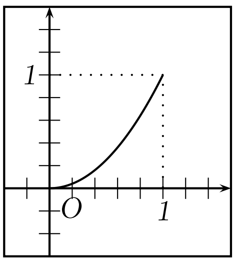
III Sujet de Bac.

Exercice 1 (D'après Polynésie, septembre 2007)
On désigne par (E) l'ensemble des fonctions f continues sur l'intervalle [0 ; 1] et vérifiant les conditions (P_1), (P_2) et (P_3) suivantes :
- *(P_1) : f est strictement croissante sur l'intervalle [0 ;1].*
- *(P_2) : $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.*
- *(P_3) : pour tout réel x de l'intervalle [0 ; 1], $f(x) \leqslant x$.*

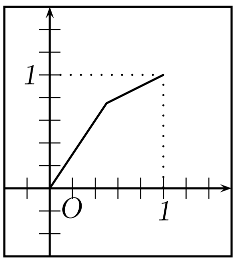
Dans un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ du plan, on note $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative d'une fonction f de l'ensemble (E) et (D) la droite d'équation $y = x$.

À toute fonction f de (E), on associe le nombre réel $I_f = \displaystyle\int_0^1 [x - f(x)]\, dx$.

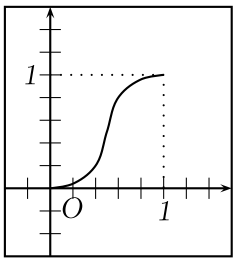
1. a. *Une seule des trois courbes ci-dessous représente une fonction de (E). La déterminer en justifiant l'élimination des deux autres.*



Courbe nř 1



Courbe nř 2



Courbe n^o 3

b. *Montrer que, pour toute fonction f de (E), $I_f \geqslant 0$.*

2. *Soit h la fonction définie sur l'intervalle [0 ; 1] par $h(x) = 2^x - 1$. (On rappelle que, pour tout x réel, $2^x = e^{x\ln 2}$).*

a. *Montrer que la fonction h vérifie les conditions (P_1) et (P_2).*

b. *Soit φ la fonction définie sur l'intervalle [0 ; 1] par $\varphi(x) = 2^x - x - 1$.*
Montrer que, pour tout x de [0 ; 1], $\varphi(x) \leqslant 0$. (On pourra étudier le sens de variation de la fonction φ sur [0 ă ; 1]).
En déduire que la fonction h appartient à l'ensemble (E).

c. *Montrer que le réel I_h associé à la fonction h est égal à $\dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{\ln 2}$.*

Chapitre 8

Les fonctions - Sujets du Bac 2009

Exercice 1 (Antilles-Guyane, juin 2009)
Commun à tous les candidats

PARTIE A.

La température de refroidissement d'un objet fabriqué industriellement est une fonction f du temps t. f est définie sur l'ensemble des nombres réels positifs et vérifie l'équation différentielle :

$$f'(t) + \frac{1}{2}f(t) = 10.$$

La température est exprimée en degrés Celsius (°C) et le temps t en heures.

1. *Déterminer $f(t)$ pour $t \geqslant 0$, sachant que pour $t = 0$, la température de l'objet est 220 ° C.*

2. *On pourra admettre désormais que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}^+$ par*

$$f(t) = 200e^{-\frac{t}{2}} + 20.$$

On note $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthogonal ; les unités graphiques sont 2 cm pour un heure en abscisse et 1 cm pour vingt degrés Celsius en ordonnée.

a. *Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}^+$.*

b. *Étudier la limite de la fonction f en $+\infty$.*
En déduire l'existence d'une asymptote $\mathscr{D}$ à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

c. *Construire $\mathscr{D}$ et $\mathscr{C}$ sur l'intervalle $[0\ ;\ 7]$.*

3. **a.** *Utiliser le graphique pour déterminer une valeur approchée, en heures et minutes, du moment où la température de l'objet est 50 ° C. On laissera apparents les traits de construction.*

b. *Retrouver ce résultat par le calcul.*

PARTIE B.

On considère la suite de terme général $d_n = f(n) - f(n+1)$ où $n \in \mathbb{N}$. d_n représente l'abaissement de température de l'objet entre l'heure n et l'heure $n + 1$.

1. **a.** *Calculer des valeurs approchées au dixième de d_0, d_1 et d_2.*

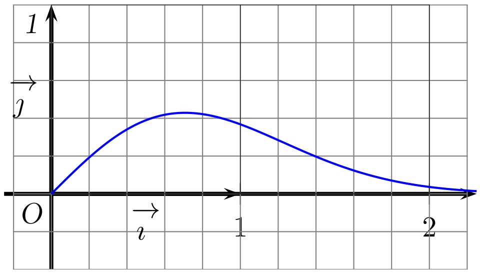
b. *Quelle est la limite de d_n quand n tend vers $+\infty$?*

2. *Déterminer la plus petite valeur de l'entier n à partir de laquelle l'abaissement de température est inférieur à 5ř C.*

Exercice 2 (Pondichéry, avril 2009)
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = xe^{-x^2}$$

On désigne par $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $\left(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ du plan. Cette courbe est représentée ci-contre.



Partie A

1. **a.** *Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.*

   (On pourra écrire, pour x différent de 0 : $f(x) = \dfrac{1}{x} \times \dfrac{x^2}{\mathrm{e}^{x^2}}$).

   b. *Démontrer que f admet un maximum en $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et calculer ce maximum.*

2. *Soit a un nombre réel positif ou nul. Exprimer en unités d'aire et en fonction de a, l'aire $F(a)$ de la partie du plan limitée par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = a$.*

   Quelle est la limite de $F(a)$ quand a tend vers $+\infty$?

Partie B

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

On ne cherchera pas à expliciter u_n.

1. **a.** *Démontrer que, pour tout entier naturel n différent de 0 et de 1*

$$f(n+1) \leqslant u_n \leqslant f(n).$$

   b. *Quel est le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$?*

   c. *Montrer que la suite (u_n) converge. Quelle est sa limite ?*

2. **a.** *Vérifier que, pour tout entier naturel strictement positif n, $F(n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u_k$.*

   b. Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

   On donne ci-dessous les valeurs de $F(n)$ obtenues à l'aide d'un tableur, pour n entier compris entre 3 et 7.

n	3	4	5	6	7
$F(n)$	0,4999382951	0,4999999437	0,5	0,5	0,5

   Interpréter ces résultats.

Exercice 3 (France, juin 2009)
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \ln\left(1 + x\mathrm{e}^{-x}\right).$$

On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal. La courbe $\mathcal{C}$ est représentée en annexe 1 (à rendre avec la copie).

PARTIE I

1. *Justifier que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.*
2. *Justifier que pour tout nombre réel positif x, le signe de $f'(x)$ est celui de $1 - x$.*
3. *Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.*

PARTIE II

Soit λ un nombre réel strictement positif. On pose $\mathcal{A}(\lambda) = \int_0^\lambda f(x)\,dx$. On se propose de majorer $\mathcal{A}(\lambda)$ à l'aide de deux méthodes différentes.

1. *Première méthode*

a. *Représenter, sur l'annexe jointe, la partie du plan dont l'aire en unité d'aire, est égale à $\mathcal{A}(\lambda)$.*

b. *Justifier que pour tout nombre réel λ strictement positif, $\mathcal{A}(\lambda) \leqslant \lambda \times f(1)$.*

2. *Deuxième méthode*

a. *Calculer à l'aide d'une intégration par parties $\int_0^\lambda xe^{-x}\,dx$ en fonction de λ.*

b. *On admet que pour tout nombre réel positif u, $\ln(1+u) \leqslant u$.*
Démontrer alors que, pour tout nombre réel λ strictement positif,
$\mathcal{A}(\lambda) \leqslant -\lambda e^{-\lambda} - e^{-\lambda} + 1$.

3. *Application numérique*
Avec chacune des deux méthodes, trouver un majorant de $\mathcal{A}(5)$, arrondi au centième. Quelle méthode donne le meilleur majorant dans le cas où $\lambda = 5$?

Exercice 4 (Antilles-Guyane, juin 2009)
On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n non nul, par :

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

1. *On considère la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :*

$$f(x) = x - \ln(1+x).$$

a. *En étudiant les variations de la fonction f, montrer que, pour tout réel x positif ou nul, $\ln(1+x) \leqslant x$.*

b. *En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $\ln(u_n) \leqslant 1$.*

c. *La suite (u_n) peut-elle avoir pour limite $+\infty$?*

2. *On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n non nul, par : $v_n = \ln(u_n)$.*

a. *On pose $x = \frac{1}{n}$. Exprimer v_n en fonction de x.*

b. *Que vaut $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$? Aucune justification n'est demandée.*

Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

c. *En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.*

Exercice 5 (Liban, juin 2009)
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln\left(1 + e^{-x}\right) + \frac{1}{3}x.$$

La courbe $(\mathcal{C})$ représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal est donnée en annexe.

Cette annexe sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.

Partie A

1. **a.** *Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.*

b. *Montrer que la droite (D) d'équation $y = \frac{1}{3}x$ est asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$. Tracer (D).*

c. *Étudier la position relative de (D) et de $(\mathcal{C})$.*

d. *Montrer que pour tout réel x, $f(x) = \ln\left(e^x + 1\right) - \dfrac{2}{3}x$.*

e. *En déduire la limite de f en $-\infty$.*

2. **a.** *On note f' la fonction dérivée de la fonction f.*
Montrer que pour tout x réel, $f'(x) = \dfrac{e^x - 2}{3\left(e^x + 1\right)}$.

b. *En déduire les variations de la fonction f.*

Partie B

Soit n un entier naturel non nul. On appelle d_n, l'aire, en unités d'aire, du domaine du plan délimité par la courbe $(\mathcal{C})$, la droite (D) d'équation $y = \dfrac{1}{3}x$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = n$.

1. *Justifier que pour tout entier naturel n non nul, $d_n = \displaystyle\int_0^n \ln\left(1 + e^{-x}\right)\,dx$.*

2. *On admet que pour tout réel x, $\ln\left(1 + e^{-x}\right) \leqslant e^{-x}$.*
Montrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $d_n \leqslant 1$. La suite $(d_n)_{n\geqslant 1}$ est-elle convergente ?

Partie C

Dans cette partie, on cherche à mettre en évidence une propriété de la courbe $(\mathcal{C})$.
On note (T) la tangente à la courbe $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 0.

1. *Calculer le coefficient directeur de (T) puis construire (T) sur le graphique.*

2. Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.
Soient M et N deux points de la courbe $(\mathcal{C})$ d'abscisses non nulles et opposées. Montrer que la droite (MN) est parallèle à la droite (T).

Exercice 6 (Amérique du Nord, juin 2009)
Partie A : Restitution organisée de connaissances

On supposera connus les résultats suivants :
Soient u et v deux fonctions continues sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ avec $a < b$.

- *Si $u \geqslant 0$ sur $[a\ ;\ b]$ alors $\displaystyle\int_a^b u(x)\,dx \geqslant 0$.*
- *Pour tous réels α et β, $\displaystyle\int_a^b [\alpha u(x) + \beta v(x)]\,dx = \alpha\int_a^b u(x)\,dx + \beta\int_a^b v(x)\,dx$.*

Démontrer que si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ avec $a < b$ et si, pour tout x de $[a\ ;\ b]$, $f(x) \leqslant g(x)$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ par $f(x) = e^{-x^2}$ et on définit la suite (u_n) par :

$$\begin{cases} u_0 = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 e^{-x^2}\,dx \\ \text{pour tout entier naturel } n \text{ non nul, } u_n = \int_0^1 x^n f(x)\,dx = \int_0^1 x^n e^{-x^2}\,dx \end{cases}$$

1. **a.** *Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0\ ;\ 1]$, $\dfrac{1}{e} \leqslant f(x) \leqslant 1$.*

b. *En déduire que $\dfrac{1}{e} \leqslant u_0 \leqslant 1$.*

2. *Calculer u_1.*

3. **a.** *Démontrer que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n$.*

b. *Étudier les variations de la suite (u_n).*

c. *En déduire que la suite (u_n) est convergente.*

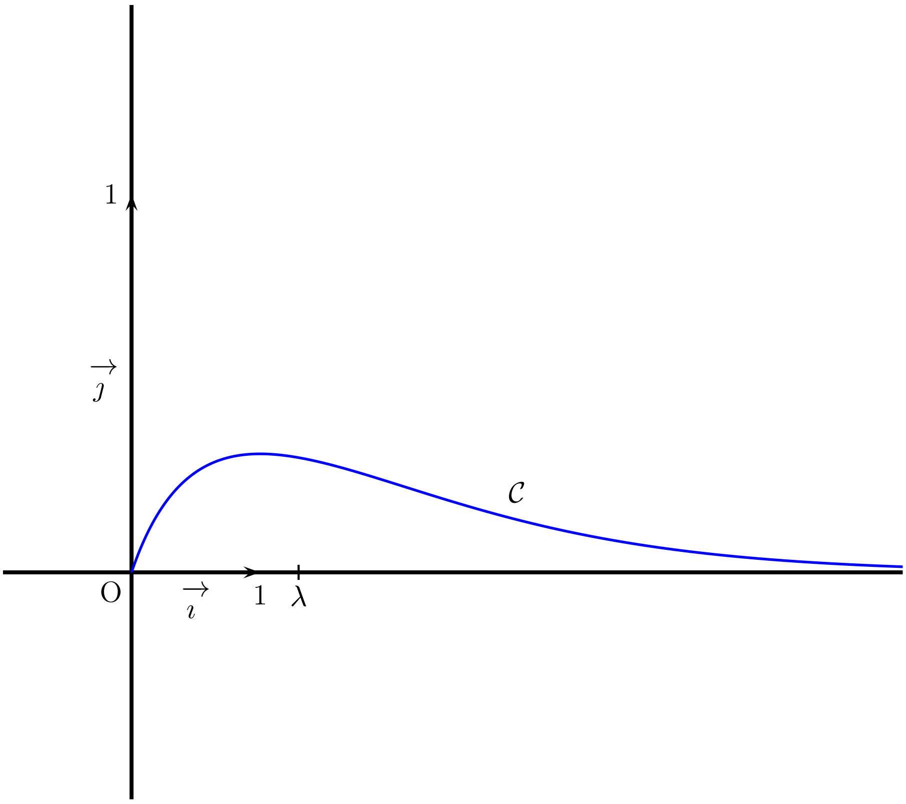
4. **a.** *Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.*

b. *En déduire la limite de la suite (u_n).*

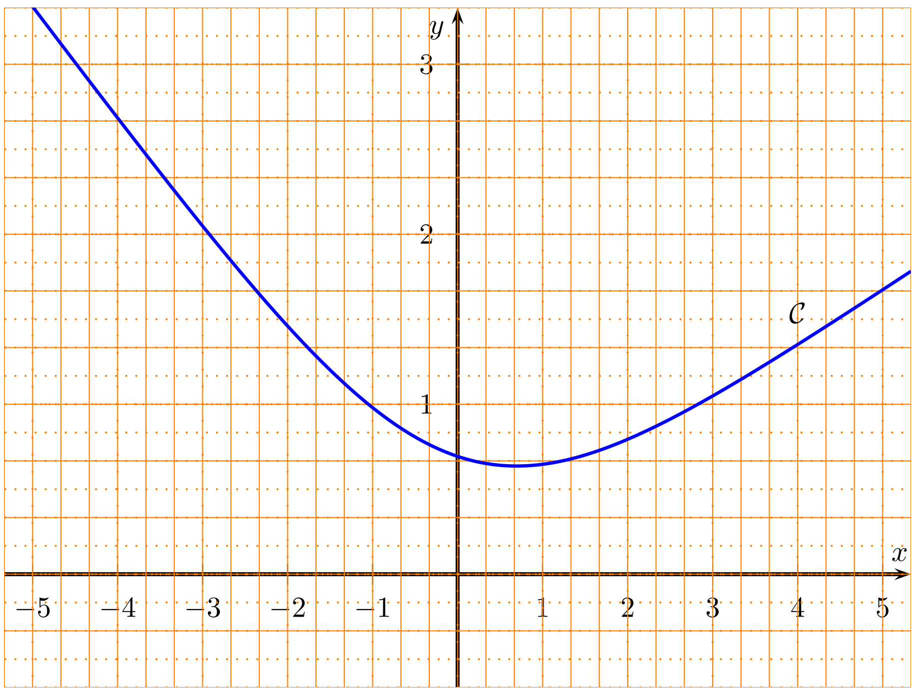
ANNEXES

Exercice 3 (France, juin 2009)

(À rendre avec la copie)



Exercice 5 (Liban, juin 2009)



Deuxième partie

Les suites.

Chapitre 9

Les suites.

I Rappels de première.

1 Définitions et modes de génération

Définition 1
*Une **suite** u est une fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{N}$, où à partir d'un certain entier naturel :*

$$u : n \mapsto u(n),\ \text{avec } n \in \mathbb{N}$$

*L'image de l'entier naturel n par une suite u, notée u_n, est appelée **terme d'indice** n ou de **rang** n de la suite.*

Remarques :
- Une suite u définie sur $\mathbb{N}$ est aussi notée (u_n) ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- Une suite u définie à partir du rang n_0 est notée $(u_n)_{n\geq n_0}$.

Il existe deux façons de définir une suite :

Définition 2
- *Une suite u est définie de façon **explicite** lorsque le terme général u_n est donné en fonction de n.*
- *Une suite u est définie **par récurrence** lorsqu'on connaît son terme initial et une relation permettant de calculer chaque terme à partir du terme précédent.*

Exemple 1
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 + 1$.
On définit la suite (u_n) par $u_n = f(n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.
On définit la suite (v_n) par $v_0 = 0$ et $v_{n+1} = f(v_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

- *Déterminer u_0, u_1, u_2 ; puis, v_0, v_1 et v_2.*
- *Comment sont définies ces deux suites ?*
- *Déterminer u_{99}. Comment peut-on déterminer v_{99} ?*

Remarques :
- Lorsqu'une suite est définie par une formule explicite, on sait calculer directement chaque terme connaissant son indice.
- Lorsqu'une suite est définie par récurrence, on ne peut pas calculer u_n à partir de n. Pour calculer u_n, il faut calculer tous les termes précédents.

2 Suites arithmétiques et suites géométriques

	Suites arithmétiques.	Suites géométriques
Définition	Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_{n+1} = u_n + r}$	Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_{n+1} = u_n \times q}$
Formule explicite	$u_n = u_0 + nr,\ n \in \mathbb{N}$ ou $u_n = u_p + (n-p)r, n, p \in \mathbb{N}$	$u_n = u_0 \times q^n,\ n \in \mathbb{N}$ ou $u_n = u_p \times q^{n-p}, n, p \in \mathbb{N}$
$S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$	$S_n = (n+1)\dfrac{u_0 + u_n}{2}$	$S_n = u_0 \times \dfrac{1 - q^{n+1}}{1-q}$
$S = u_m + u_{m+1} + ... + u_{m+p-1}$	S=(Nbre de termes)$\times \dfrac{1er + dernier}{2}$	S=(1er terme)$\times \dfrac{1 - q^{Nbre\ termes}}{1-q}$

Exemple 2
On considère la suite v_n définie sur $\mathbb{N}$ par $v_0 = 2$ et $v_{n+1} = 5v_n + 3$.

On définit la suite w_n par $w_n = v_n + \frac{3}{4}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démontrer que la suite $(w_n)_{n \in N}$ est une suite géométrique, puis calculer $\sum\limits_{i=0}^{n} w_i$ et $\sum\limits_{i=0}^{n} v_i$.

II Raisonnement par récurrence

Axiome 1 (Démonstration par récurrence)
Soit P_n une propriété dépendant de l'entier naturel n et n_0 un entier naturel.
Pour démontrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à n_0, la propriété P_n est vraie, on procède en trois étapes :
- ***Initialisation** : on vérifie que la propriété est vraie pour n_0, c'est-à-dire P_{n_0} est vraie.*
- ***Hérédité** : on* suppose *que la propriété est vraie pour un certain entier naturel n, avec $n \geq n_0$, et on* démontre *qu'alors elle est vraie pour $n+1$.*
- ***Conclusion :** lorsqu'on a démontré que la propriété P_n est initialisée et héréditaire, alors on peut conclure que la propriété P_n est vraie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à n_0.*

Remarques :
- Lorsque P_n satisfait l'étape d'initialisation (P_{n_0} est vraie), on dit que P_n est ***initialisée***. Lorsque P_n satisfait l'étape d'hérédité (Si P_n est vraie alors P_{n+1} est vraie), on dit que P_n est ***héréditaire***.
- Dans l'étape "hérédité", l'hypothèse "P_n est vraie" est appelée l'***hypothèse de récurrence***.

Exemple 3
Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, $5^n - 2^n$ est un multiple de 3.

III Comportement global

1 Suites majorées, minorées, bornées

Définition 3
Soit (u_n) une suite réelle.
- *On dit que la suite (u_n) est **majorée** s'il existe un réel M tel que :*
  pour tout entier naturel n, $u_n \leq M$
  *On dit que M est un **majorant** de la suite (u_n).*
- *On dit que la suite (u_n) est **minorée** s'il existe un réel m tel que :*
  pour tout entier naturel n, $u_n \geq m$
  *On dit que m est un **minorant** de la suite (u_n).*
- *On dit que la suite (u_n) est **bornée** lorsqu'elle est majorée et minorée.*

Remarques
- Si une suite (u_n) est majorée alors elle a une infinité de majorants. En effet, si le réel M est un majorant de (u_n) alors tous les réels supérieurs à M sont aussi des majorants de la suite (u_n). On peut faire une remarque analogue sur les minorants.

- Pour montrer que suite (u_n) est bornée, il suffit de montrer qu'il existe un réel M tel que, pour tout entier naturel, n $|u_n| \leq M$.

Exemple 4

1. *Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = \dfrac{n+1}{n+2}$.*

2. *Soit (u_n) la suite définie par :*

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 5} \end{cases}$$

Démontrer que, pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq 3$.

2 Sens de variation

Défnitions

Définition 4

Soit p un entier naturel.

- *Dire qu'une suite u est **croissante** à partir du rang p signifie que :*
  pour tout $n \geq p$, on a $u_n \leq u_{n+1}$
- *Dire qu'une suite u est **décroissante** à partir du rang p signifie que :*
  pour tout $n \geq p$, on a $u_n \leq u_{n+1}$
- *Une suite u est monotone lorsqu'elle est soit croissante, soit décroissante.*
- *Dire qu'une suite u est **constante** (ou stationnaire) à partir du rang p signifie que :*
  pour tout $n \geq p$, on a $u_n = u_{n+1}$

Remarque : Comme pour les fonctions, lorsqu'on remplace les inégalités larges par des inégalités strictes, on parle de suite strictement croissante, strictement décroissante ou strictement monotone.

Exemples et méthodes.

Pour étudier le sens de variation d'une suite, on est donc amené à comparer u_n et u_{n+1}.

1. *Etude du signe de* $u_{n+1} - u_n$.

Exemple 5

On considère la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 0,5 \\ u_{n+1} = u_n(1 - u_n) \end{cases}$$

Etudier le sens de variation de la suite (u_n).

2. *Comparaison de* $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ *et 1 avec* $u_n > 0$*, pour tout* n.

Exemple 6

Soit v la suite définie sur $\mathbb{N}$ par

$$v_n = \frac{2^n}{3^n}$$

Etudier le sens de variation de la suite (v_n).

3. *Etude sur* $[0; +\infty[$ *de la fonction* f *avec* $u_n = f(n)$.

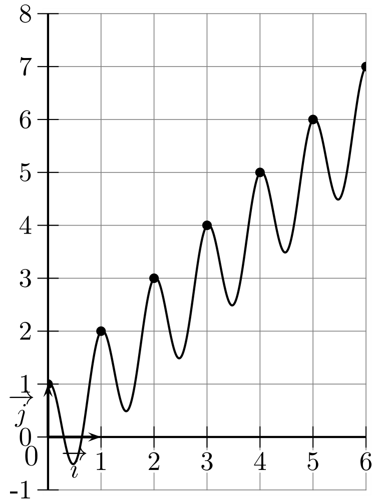
Exemple 7

Soit w la suite définie sur $\mathbb{N}$ par

$$w_n = n^2 + 6n + 1$$

Etudier le sens de variation de la suite (w_n).

Remarque : La suite (u_n) définie par $u_n = f(n)$ peut être croissante (respectivement décroissante) sans que la fonction f soit croissante (respectivement décroissante) sur $[0; +\infty[$.



4. ***Utiliser un raisonnement par récurrence.***

Exemple 8
Soit f la fonction définie sur $[-2;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x+2}$.
Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par

$$\begin{cases} u_0 = 6 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Montrer que pour tout entier naturel n, $-2 \leq u_{n+1} \leq u_n$ et en déduire le sens de variation de la suite (u_n).

5. ***Un contre-exemple.***

Exemple 9 (Contre-exemple)
La suite u de terme général $u_n = \cos(\pi n)$ n'est pas monotone.

Suites arithmétiques et suites géométriques

Théorème 1
Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.
- *La suite (u_n) est strictement croissante si et seulement si $r > 0$.*
- *La suite (u_n) est strictement décroissante si et seulement si $r < 0$.*
- *La suite (u_n) est constante si et seulement si $r = 0$.*

Théorème 2
Soit q un réel non nul.
- *La suite (q^n) est strictement croissante si et seulement si $q > 1$.*
- *La suite (q^n) est strictement décroissante si et seulement si $0 < q < 1$.*
- *La suite (q^n) est constante si et seulement si $q = 1$.*
- *La suite (q^n) n'est pas monotone si et seulement si $q < 0$.*

CHAPITRE 3 : LES SUITES.

IV R.O.C.

- ***Théorème 1*** : sens de variation d'une suite arithmétique suivant les valeurs de sa raison.
- ***Théorème 2*** : sens de variation d'une suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivant les valeurs de q

V Ce qu'il faut savoir faire

- Calculer les termes d'indice donné d'une suite définie par une formule explicite
  Exemple 1 , Exercices 1, 5, 7 de la feuille 1, pas à pas
- Calculer les premiers termes d'une suite définie par une formule de récurrence.
  Exemple 1, Exercices 2, 6 de la feuille 1, pas à pas 2
- "Manipuler" les indices et "simplifier des expressions".
  Exercices 2, pas à pas, pas à pas 2.
- Démontrer une propriété par récurrence.
  Exemple 3 , Exercices 11, 14, 15, 16, 21, 44 p. 154-156, DM2
- Déterminer le sens de variation d'une suite :
  - En étudiant le signe de $u_{n+1} - u_n$.
    Exemple 5, DM2, exercices 75, 76 de la feuille 2
  - En comparant le rapport $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 quand les termes de la suite sont positifs.
    Exemple 6, exercices 75, 76, 77 de la feuille 2
  - En étudiant les variations de la fonction f quand $u_n = f(n)$.
    Exemple 7, exercices 79, 80 de la feuille 2
  - En faisant une démonstration par récurrence.
    Exemple 8
- Démontrer qu'une suite est minorée, majorée ou bornée.
  Exemple 4, exercice 41, 42, 44 p. 156
- Connaître et savoir utiliser la définition d'une suite arithmétique et d'une suite géométrique.
  Exemple 2
- Déterminer si une suite est arithmétique ou non.
  DM2, exercice 7 p. 155
- Déterminer si une suite est géométrique ou non.
  Exemple 2, exercices 7 et 8 p. 155
- Déterminer la raison d'une suite arithmétique ou d'une suite géométrique.
  Exemple 2, DM2, exercice 7 p. 154
- Déterminer "u_n en fonction de n" pour une suite arithmétique (ou géométrique) *exercice 8*
- Utiliser une suite intermédiaire arithmétique ou géométrique pour étudier une suite.
  Exemple 2, exercice 8
- Calculer la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique ou géométrique .
  Exemple 2, DM2, exercice 1, 5 p. 154

VI Pour préparer le BAC.

- Exercice E p. 165 (1)
- ***Antilles-Guyane, juin 2009*** : exercice 1 partie A(sans les limites).
- ***Polynésie, septembre 2008*** : Exercice 3, partie A (sans 3), partie B (sans 2).

Chapitre 10

Limites de suites.

I Suites convergentes

1 Définitions

Définition 1
Soit (u_n) une suite et L un nombre réel.

- *On dit qu'une suite (u_n) **converge vers un réel** L lorsque tout intervalle ouvert contenant L contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang n_0.*
- *On dit que la suite (u_n) est **convergente** lorsqu'il existe un **réel** L tel que la suite (u_n) converge vers L.*

Exemple 1
Soit la suite définie sur $\mathbb{N}$ par

$$u_n = \frac{1-2n}{n+1}$$

Montrer que la suite converge vers -2.

Définition 2
*On dit qu'une suite **diverge** ou est **divergente** lorsqu'elle ne converge pas.*

Exemple 2
La suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = (-1)^n$ est divergente.

Proposition 1 (Unicité de la limite)
Si une suite est convergente alors il exite un unique réel L vers lequel elle converge.
On dit alors que L est la limite de la suite et on note :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = L$$

Théorème 1
Soit L un réel et f une fonction définie sur $[n_0;+\infty[$ où n_0 est un entier naturel.
On considère la suite définie à partir du rang n_0 par $u_n = f(n)$.
Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$ alors la suite converge vers L.

Proposition 2 (Limites de suites de référence)
Les suites $\left(\dfrac{1}{n^p}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$, avec $p \in \mathbb{N}^*$, et $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent vers 0.

Théorème 2
*Toute suite **convergente** est **bornée**.*

Remarques :

- Le théorème précédent nous permet d'affirmer :"si une suite n'est pas bornée (non majorée ou non minorée) alors elle n'est pas convergente", c'est-à-dire "toute suite non bornée est divergente". Il s'agit de la contraposée du théorème.
- La réciproque de ce théorème est fause. En effet, la suite $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée (pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq \sin(n) \leq 1$) et est divergente.

2 Limites et opérations

Théorème 3
Soit k, L, et L' trois réels. Soit ĕt (v_n) deux suites convergentes telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = L'$.
Alors les suites $(u_n + v_n)$, $(u_n v_n)$ et (ku_n) sont convergentes et :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n + v_n = L + L' \quad \lim_{n\to+\infty} u_n v_n = LL' \quad \lim_{n\to+\infty} ku_n = kL$$

De plus, si tous les termes de la suite (v_n) sont non nuls et si $L' \neq 0$ alors les suites $\left(\frac{1}{v_n}\right)$ et $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ sont convergentes et :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{v_n} = \frac{1}{L'} \ ; \ \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{L}{L'}$$

3 Ordre et limites

Théorème 4
*Toute suite convergente à **termes positifs** (à partir d'un certain rang) admet une **limite positive**.*
Autrement dit, si à partir d'un rang n_0, $u_n \geq 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$ alors $L \geq 0$.

Remarque : Lorsqu'une suite à termes strictement positifs converge vers un réel L, on ne peut pas dire que la limite L est strictement positive. (***exemple*** : la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n>0}$ est à termes strictement positifs et tend vers 0)

Théorème 5
Soit ĕt (v_n) deux suites convergeant vers les réels L et L'.
Si à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$ alors $L \leq L'$

Théorème 6
Soit L un réel, ŭne suite qui converge vers L et n_0 un entier naturel.
- *S'il existe un réel M tel que, pour tout entier $n \geq n_0$, $u_n \leq M$ alors $L \leq M$.*
- *S'il existe un réel m tel que, pour tout entier $n \geq n_0$, $u_n \geq m$ alors $L \geq m$.*

II Limite infinie de suites

Définition 3
- *On dit qu'une suite ă pour limite $+\infty$ lorsque tout intervalle $]A;+\infty[$, avec A un réel, contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang n_0.*
  On écrit alors
  $$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$
- *On dit qu'une suite ă pour limite $-\infty$ lorsque tout intervalle $]-\infty;A[$, avec A un réel, contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang n_0.*
  On écrit alors
  $$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$$

Remarques :
- Une suite qui admet pour limite $+\infty$ ou $-\infty$ est une suite qui admet une limite mais qui ne converge vers aucun réel. Elle est donc divergente.
- Une suite est alors ***divergente*** lorsqu'elle n'admet ***aucune limite*** ou lorsqu'elle admet une ***limite infinie***.

Théorème 7
Soit f une fonction définie sur $[n_0;+\infty[$, où n_0 est un entier naturel.
On considère la suite ďéfinie à partir du rang n_0 par $u_n = f(n)$.
Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (respectivement vers $-\infty$) alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ (respectivement $-\infty$)

Exemple 3
On considère la suite dĕfinie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{n^3+2n}{3n^2+2}$.
Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Proposition 3
Les suites $(n^p)_{n\in\mathbb{N}}$, avec $p \in \mathbb{N}^*$, $(\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(e^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ont pour limite $+\infty$.

III Limites de suites et comparaison

Théorème 8 (Théorème des gendarmes)
Soit ˛ (v_n) et (w_n) trois suites.
Si, à partir d'un certain rang, $v_n \leq u_n \leq w_n$ et si les suites (v_n) et (w_n) convergent vers un même réel L alors la suite ĕst convergente et sa limite est L.

Exemple 4
Démontrer que la suite dĕfinie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \dfrac{\sin n}{n}$ est convergente.

Théorème 9
Soit ĕt (v_n) deux suites.
- *Si, à partir d'un certain rang, $u_n \geq v_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.*
- *Si, à partir d'un certain rang, $v_n \geq u_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.*

Exemple 5
Démontrer que la suite dĕfinie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ a pour limite $+\infty$.

IV Limites de suites arithmétiques et suites géométriques

Proposition 4
Soit ŭne suite arithmétique de raison r et de terme initial u_0.
- *Si $r > 0$, la suite ďiverge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.*
- *Si $r < 0$, la suite ďiverge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.*
- *Si $r = 0$, la suite čonverge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = u_0$.*

Théorème 10
Soit q un réel non nul.
- *Si $q > 1$ alors la suite $(q^n)_{n\in N}$ diverge et $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = -\infty$.*
- *Si $q = 1$ alors la suite $(q^n)_{n\in N}$ est constante et égale à 1.*
- *Si $-1 < q < 1$ alors la suite $(q^n)_{n\in N}$ converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.*
- *Si $q \leq -1$ alors la suite $(q^n)_{n\in N}$ diverge et n'admet pas de limite*

Exemple 6
Etudier la convergence des suites définies par $u_n = \dfrac{2}{3^n}$, $v_n = e^n$ et $w_n = 2^{n+3} - 3^n$.

V Limites de suites et opérations

1 Limtes de suites et opérations algébriques

Les suites étant des fonctions particulières, on retrouve des résultats analogues à ceux des limites de fonction.

Limites et somme

ĕt $(v_n$ sont deux suites et L, et L' deux nombres réels.

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n =$	L+L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.

Limites et produit

ět (v_n sont deux suites et L, et L' deux nombres réels.

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	L	$L \neq 0$	$\pm\infty$	0
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	L'	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times v_n =$	$\times L'$	$\pm\infty$ et signes	$\pm\infty$ et signes	F.I.

Limites et quotient

ět (v_n sont deux suites telles que les termes v_n sont non nuls à partir d'un certain rang. L, et L' deux nombres réels.

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	L	L	$\pm\infty$	$L \neq 0$ ou $\pm\infty$	0	$\pm\infty$
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	$L' \neq 0$	$\pm\infty$	$L' \neq 0$	0	0	$\pm\infty$
Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} =$	$\dfrac{L}{L'}$	0	$\pm\infty$ et signes	$\pm\infty$ et signes	FI	FI

Exemple 7
Déterminer si elles existent les limites des suites suivantes :

1. *la suite ďéfinie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \left(2 - n^2\right) e^n$.*
2. *la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{3}{n^3 + \sqrt{n}}$.*

2 Limite de suites et composition

Théorème 11
L et L' désignent deux nombres réels ou $+\infty$, ou $-\infty$.
Soit ŭne suite et f une fonction définie au voisinage de L.
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$ et si $\lim\limits_{x\to L} f(x) = L'$ alors la suite $(f(u_n))$ admet pour limite L'.

Exemple 8
Etudier la convergence de la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{2^n}{e^{2^n}}$.

Théorème 12
L désigne un réel.
Soit ŭne suite et f une fonction définie sur un intervalle contenant L et tous les termes de la suite ă partir d'une certain rang.
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$ et si f est continue en L alors

$$\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(L)$$

On écrit alors

$$\lim_{n\to+\infty} f\left(u_n\right) = f\left(\lim_{n\to+\infty} u_n\right)$$

Remarque : Ce théorème se démontre directement à partir du théorème précédent dans le cas particulier où f est continue.

Théorème 13
f est une fonction définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ telle que, pour tout x appartenant à I, $f(x)$ appartient aussi à I.
ěst la suite définie par $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Si la suite (u_n) ***converge vers un réel L*** appartenant *à I alors $f(L) = L$*

Exemple 9
Démontrer que si la suite ďéfinie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$ converge alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 4$.

VI Limites de suites et monotonie

Théorème 14 (R.O.C.)
Soit ŭne suite réelle ***croissante***.
- *Si ěst* ***majorée*** alors elle est **convergente.**
- *Si ň'est* ***pas majorée*** alors elle **diverge** vers $+\infty$.*(R.O.C.)*

Exemple 10
Montrer que la suite ďe l'exemple précédent est convergente.

Théorème 15
Soit ŭne suite réelle ***décroissante***.
- *Si ěst* ***minorée*** alors elle est **convergente.**
- *Si ň'est* ***pas minorée*** alors elle **diverge** vers $-\infty$. *(R.O.C.)*

Exercice 1
Soit ľa suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 3 \text{ et } u_{n+1} = \frac{1}{4}\, u_n^2 \text{ pour tout } n \geq 0$$

1. *Montrer que pour tout $n \geq 0$, on a $0 \leq u_n \leq 3$.*
2. *Etudier le sens de variation de*
3. *Prouver que čonverge et déterminer sa limite.*

Remarques :
Les premiers points des théorèmes précédents constituent un théorème appelé "théorème de la convergence monotone" qui peut s'énoncer ainsi :

Toute suite croissante majorée est convergente.
Toute suite décroissante minorée est convergente.

Proposition 5 (R.O.C.)
Soit ŭne suite réelle.
- *Si ěst* ***croissante et convergente*** alors elle est **majorée par sa limite.**
- *Si ěst* ***décroissante et convergente*** alors elle est **minorée par sa limite.**

VII Suites adjacentes

Définition 4
On dit que deux suites ět (v_n) sont adjacentes lorsque :
- *l'une des deux suites est croissante et l'autre est décroissante.*
- $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = 0$

Exemple 11
Soit ět (v_n) les suites définies sur $\mathbb{N}$ par

$$u_n = 3 - \frac{2}{n} \text{ et } v_n = 3 + \frac{2}{n^2}$$

Montrer que les suites ět (v_n) sont adjacentes.

Proposition 6

Si ět (v_n) sont adjacentes avec čroissante et (v_n) décroissante alors :

- *pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$*
- *les suites ět (v_n) sont convergentes et ont la même limite L.*
- *pour tout $n \in N$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$, $u_n \leq L \leq v_n$.*

Exercice 2

Soit les deux suites ět (v_n) définies par la donnée de u_0 et v_0 avec $u_0 < v_0$ et les relations de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3} \text{ et } v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}$$

1. *Montrer que les suites ět (v_n) sont adjacentes.*

2. *Montrer que la suite $(u_n + v_n)$ est constante.*

3. *En déduire la valeur de la limite commune des suites ět (v_n).*

BILAN : LIMITES DE SUITES.

VIII ROC

- ***Proposition 1*** : unicité de la limite.
- ***Théorème 2*** : convergente et bornée.
- ***Théorème 8*** : théorème des gendarmes.
- ***Théorème 13*** : suites et composition.
- ***Théorème 14 -15*** : suite croissante non majorée non convergente.

IX Ce qu'il faut savoir faire.

- **Savoir déterminer les limites de suites définies explicitement par opérations sur les limites usuelles.**
  Exercices 25, 26, 28 p. 155, Exemples 3 et 7

- **Savoir utiliser le théorème des gendarmes ou les théorèmes de comparaison pour déterminer la limite d'une suite.**
  Exercices 30, 31, 32 p. 155, DS5, exemple 5

- **Savoir déterminer les limites de suites géométriques.**
  Exercices 25, 26 p. 155, exemple 6, DS5, Exos 89, 90, 91 de la feuille.

- **Savoir étudier une suite arithmético-géométrique.**
  DS5, Exercices 89, 90, 91 de la feuille, Exercices 52, 53, 55, 82 p. 157

- **Savoir déterminer les limites de suites définies explicitement par opérations sur les limites usuelles.**
  Exercices 25, 26, 28 p. 155

- **Savoir déterminer les limites de suites de la forme $f(u_n)$.**
  Exemple 8

- **Savoir déterminer les limites éventuelles de suites définies par $u_{n+1} = f(u_n)$**
  Exemple 9, Exercices 80, 81 p. 159

- **Savoir utiliser le théorème de convergence monotone.**
  Exemple 10, Exercice 1 du cours, Exercices 80, 81, 82 p. 159.

- **Savoir démontrer que deux suites sont adjacentes.**
  Exemple 11, Exercices 56, 57 p.157, Exercice 2 du cours, Exercices 91, 93 p. 161, DM5

- **Savoir utiliser des suites adjacentes pour montrer une convergence.**
  Exercices 93, DM5, Exercice 2 du cours. Et aussi tous les savoir-faire du chapitre 3 "'les suites"'.

X Pour préparer le Bac

- ***France métropolitaine, juin 2009*** : exercice 1
- ***Antilles-Guyane, juin 2009*** : Exercice 4 (avec du logarithme!!!

Chapitre 11

Les suites - Sujets du Bac 2009

Exercice 1 (Antilles-Guyane, juin 2009)
On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n non nul, par :

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

1. *On considère la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :*

$$f(x) = x - \ln(1+x).$$

a. *En étudiant les variations de la fonction f, montrer que, pour tout réel x positif ou nul, $\ln(1+x) \leqslant x$.*

b. *En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $\ln(u_n) \leqslant 1$.*

c. *La suite (u_n) peut-elle avoir pour limite $+\infty$?*

2. *On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n non nul, par : $v_n = \ln(u_n)$.*

a. *On pose $x = \dfrac{1}{n}$. Exprimer v_n en fonction de x.*

b. *Que vaut $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$? Aucune justification n'est demandée.*

Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

c. *En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.*

Exercice 2 (Polynésie, septembre 2008)
Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A
On considère l'ensemble (E) des suites (x_n) définies sur $\mathbb{N}$ et vérifiant la relation suivante :
pour tout entier naturel n non nul, $x_{n+1} - x_n = 0,24x_{n-1}$.

1. *On considère un réel λ non nul et on définit sur $\mathbb{N}$ la suite (t_n) par $t_n = \lambda^n$.*
Démontrer que la suite (t_n) appartient à l'ensemble (E) si et seulement si λ est solution de l'équation $\lambda^2 - \lambda - 0,24 = 0$.
En déduire les suites (t_n) appartenant à l'ensemble (E).

On admet que (E) est l'ensemble des suites (u_n) définies sur $\mathbb{N}$ par une relation de la forme :

$$u_n = \alpha(1,2)^n + \beta(-0,2)^n \quad \text{où } \alpha \text{ et } \beta \text{ sont deux réels.}$$

2. *On considère une suite (u_n) de l'ensemble (E).*
Déterminer les valeurs de α et β telles que $u_0 = 6$ et $u_1 = 6,6$.
En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{39}{7}(1,2)^n + \dfrac{3}{7}(-0,2)^n$.

3. *Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.*

Partie B

On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$v_0 = 6 \text{ et, pour tout entier naturel } n,\ v_{n+1} = 1,4v_n - 0,05v_n^2$$

1. *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1,4x - 0,05x^2$.*

- **a.** *Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,8]$.*
- **b.** *Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n,*
  $0 \leqslant v_n < v_{n+1} \leqslant 8$.

2. *En déduire que la suite (v_n) est convergente et déterminer sa limite ℓ.*

Exercice 3 (France, juin 2009)

Les deux questions de cet exercice sont indépendantes.

1. *On considère la suite (u_n) définie par :*

$$u_0 = 1 \quad \text{et, pour tout nombre entier naturel } n,\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 4.$$

On pose, pour tout nombre entier naturel n, $v_n = u_n - 6$.

- **a.** *Pour tout nombre entier naturel n, calculer v_{n+1} en fonction de v_n. Quelle est la nature de la suite (v_n) ?*
- **b.** *Démontrer que pour tout nombre entier naturel $n, u_n = -5\left(\frac{1}{3}\right)^n + 6$.*
- **c.** *Étudier la convergence de la suite (u_n).*

2. *On considère la suite (w_n) dont les termes vérifient, pour tout nombre entier $n \geqslant 1$:*

$$nw_n = (n+1)w_{n-1} + 1 \quad \text{et} \quad w_0 = 1.$$

Le tableau suivant donne les dix premiers termes de cette suite.

w_0	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9
1	*3*	*5*	*7*	*9*	*11*	*13*	*15*	*17*	*19*

- **a.** *Détailler le calcul permettant d'obtenir w_{10}.*
- **b.** Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.
  Donner la nature de la suite (w_n). Calculer w_{2009}.

Troisième partie

Probabilités

Chapitre 12

Probabilités conditionnelles.

I Rappels de première : évènements et probabilités.

1 Vocabulaire.

Définition 1
On considère l'expérience aléatoire qui consiste a lancé un dé à 6 faces, les faces étant numérotées de 1 à 6.

- *Chaque résultat possible et prévisible d'une expérience aléatoire est appelé* ***éventualité*** *(ou* ***élément****) liée à l'expérience aléatoire.*
- *L'ensemble formé par les éventualités liées à une expérience aléatoire est appelé* ***univers*** *de l'expérience ; il est généralement noté Ω.*
- *Un* ***événement*** *de l'expérience aléatoire est une partie quelconque (un sous-ensemble) de l'univers. Un événement ne comprenant qu'une seule éventualité est qualifié d'****événement élémentaire***
- *L'événement qui ne contient aucune éventualité est qualifié d'****événement impossible****, et est noté $\varnothing$. L'événement qui est composé de toutes les éventualités (c'est-à-dire Ω lui-même) est appelé* ***événement certain****. Soient A, B deux événements.*
- *L'événement* ***A et B*** *est l'événement qui se réalise lorsque A et B se réalisent* ***simultanément****.* ***On le note $\mathbf{A \cap B}$****.*
- *L'événement* ***A ou B*** *est l'événement qui se réalise lorsque* ***au moins*** *l'un des événements A et B se réalise.* ***On le note $\mathbf{A \cup B}$***
- *Deux évènements A et B sont dits* ***incompatibles*** *lorsque $A \cap B = \emptyset$, c'est-à-dire lorsque A et B n'ont aucune éventualité commune.*
- *Pour tout événement A il existe un événement noté $\overline{A}$, et appelé* ***événement contraire*** *de A, qui est composé des éléments de Ω* ***qui ne sont pas dans A****.*
  On a en partculier $A \cup \overline{A} = \Omega$

Exemple 1
On dispose d'un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et d'un dé tétraédrique dont les faces sont notées A, B, C et D.
On lance les deux dés et on note le chiffre et la lettre apparus sur la face supérieure de chacun des dés.

1. *A l'aide d'un tableau à double entrée, déterminer l'univers Ω de cette expérience.*
2. *Soit A l'évènement "obtenir le nombre 3". Déterminer les éléments de A.*
3. *Soit B l'évènement "obtenir la lettre A" et C l'évènement "obtenir un nombre pair". Déterminer les éléments de B, de C, de B∩C, et de B∪C.*
4. *Définir par une phrase $\overline{B}$ et $\overline{C}$.*

2 Loi de probabilité

Définition 2
On définit une ***loi de probabilité*** *P sur l'univers $\Omega = \{e_1 ; e_2 ; ... ; e_n\}$ en associant à chaque issue possible e_i un réel positif ou nul p_i, tel que $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$.*
Le réel p_i est appelé la ***probabilité*** *de l'issue e_i.*

Remarque : Une loi de probabilité est souvent décrite par un tableau précisant les couples $(e_i; p_i)$.

Exemple 2
On considère l'expérience aléatoire consistant à lancer deux pièces de monnaie bien équilibrées.
On choisit comme univers $\Omega = \{2P, 2F, PF\}$. Déterminer la loi de probabilité sur Ω.

Définition 3
On dit qu'une expérience aléatoire est équiprobable lorsque les n issues de cette expérience ont la même probabilité, $p_i = \frac{1}{n}$.

Exemple 3
On considère toujours l'expérience aléatoire consistant à lancer deux pièces de monnaie bien équilibrées. On choisit cette fois comme univers $\Omega' = \{(P,P),(F,F),(P,F),(F,P)\}$. Déterminer la loi de probabilité sur Ω'.

3 Probabilités et évènements.

Définition 4
Supposons qu'une loi de probabilité soit définie sur l'univers $\Omega = \{e_1 \ ; \ e_2 \ ; \ ... \ ; \ e_n\}$ associé à une expérience aléatoire.
***La probabilité d'un événement A** non vide, notée $P(A)$, est définie comme la **somme des probabilités** p_i **des issues** e_i **qui le réalisent**.*

Exemple 4
On considère l'expérience de l'exemple 1 (lancer de deux dés tétraédriques).
Déterminer les probabilités $P(A)$, $P(B)$ et $P(C)$.

Proposition 1
- *Pour tout événement A on a :*
$$\mathbf{0} \leq \mathbf{P}(A) \leq \mathbf{1}$$
- *La probabilité de l'événement certain est égale à 1, celle de l'événement impossible est égale à 0 :*
$$\mathbf{P}(\boldsymbol{\Omega}) = \mathbf{1} \text{ et } \mathbf{P}(\varnothing) = \mathbf{0}$$

Proposition 2
*Dans le cas de l'**équiprobabilité** sur Ω, la probabilité d'un évenement A est :*

$$P(A) = \frac{\textit{nombre d'éléments de } A}{\textit{nombre d'éléments de } \Omega} = \frac{card(A)}{card(\Omega)}$$

Exemple 5
On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes.
On note A l'événement "Obtenir un coeur". Déterminer la probabilité de A.

Proposition 3
- *Pour tous événements A et B, on a*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- *Si A et B sont deux évènements **incompatibles**, on a alors :*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

- *Pour tout évènement A, on a*
$$p(\overline{A}) = 1 - p(A)$$

Exemple 6
On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes.
On note R l'évènement "tirer un roi" et C l'évenement "Tirer un coeur". Déterminer la probabilité de l'évènement "Tirer un roi ou un coeur" et celle de l'évènement "Ne pas tirer de coeur".

II Rappels de première : variables aléatoires.

Exemple 7
Un joueur lance deux fois une pièce bien équilibrée ; il gagne 2 € par pile obtenu et perd 1 € par face obtenu.

1. *Déterminer l'univers associé à cet expérience aléatoire.*
2. *Déterminer l'ensemble des gains possibles.*

3. *Quelle est la probabilité de gagner 4 € ?*

Définition 5
Soit $\Omega = \{e_1; e_2; ...; e_n\}$ un univers et P une loi de probabilité sur Ω.
- *On définit une* ***variable aléatoire*** *X sur Ω en associant un réel, x_i, à chaque issue, e_i, de Ω. (X est doncune fonction de Ω dans $\mathbb{R}$).*
- *Si $\{x_1; x_2; ...; x_r\}$ est l'ensemble des valeurs prises par la variable X sur l'univers Ω, alors pour tout i tel que $1 \leq i \leq r$:*
  - *l'évènement "X prend la valeur x_i" est noté "$X = x_i$".*
  - *sa probabilité, notée $P(X = x_i)$, est la probabilité de l'ensemble des issues ayant pour image x_i par X.*

Exemple 8 (suite de l'exemple 7)
1. *Définir la variable aléatoire X représentant les gains possibles.*
2. *Déterminer $P(X = 1)$*

Définition 6
Soit Ω un univers muni d'une loi de probabilité P. Soit X une variable aléatoire définie sur Ω pouvant prendre les valeurs x_1, x_2,..., x_r.
La loi de probabilité de X est la loi de probabilité définie sur $X(\Omega) = \{x_1; x_2; ...; x_r\}$ et qui, à chaque élément x_i associe la probabilité $P(X = x_i)$, souvent notée p_i.

Exemple 9 (Suite exemple 7)
Donner la loi de probabilité de X.

Définition 7
Soit Ω un univers muni d'une loi de probabilité P.
Soit X une variable aléatoire, définie sur Ω et pouvant prendre les valeurs x_1, x_2,..., x_r.
- *L'****espérance*** *de la variable aléatoire X, notée $E(X)$, est définie par :*

$$E(X) = \sum_{i=1}^{r} p_i x_i$$

- *La* ***variance*** *de la variable aléatoire X, notée $V(X)$, est définie par :*

$$V(X) = \sum_{i=1}^{r} p_i \left(x_i - E(X)\right)^2$$

- *L'****écart-type*** *de la variable aléatoire X, noté $\sigma(X)$, est défini par :*

$$\sigma(X) = \sqrt{V(x)}$$

Proposition 4
La variance de X est aussi donnée par :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{r} p_i x_i^2 - \left(E(X)\right)^2$$

Exemple 10 (Suite de l'exemple 7)
1. *Calculer l'espérance de X et interpréter le résultat. Le jeu est-il favorable ou défavrable au joueur ? Quelle devrait être la mise du joueur pour que le jeu soit équitable ?*
2. *Calculer la variance et l'écart-type. Que mesurent ces paramètres ?*

III Probabilités conditionnelles.

Dans cette partie, on considère un ensemble Ω sur lequel est défini une loi de probabilité P.

1 Probabilité de A sachant B.

Définition 8
Soit B un évènement de Ω tel que $P(B) \neq 0$.
*Pour tout évènement A de Ω, on appelle **probabilité conditionnelle** de A sachant B le réel noté $P_B(A)$ défini par :*

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Remarques : La probabilité conditionnelle $P_B(A)$ se note aussi $P(A/B)$.

Exemple 11
On tire au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes : c'est un coeur.
Quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'un roi ?

2 Propriétés

La probabilité conditionnelle est une nouvelle probabilité définie au moyen de la probabilité P sur Ω, elle a donc toutes les propriétés d'une probabilité.

Proposition 5
Soit A et B deux évènements de Ω tels que $P(B) \neq 0$.
- $0 \leq P_B(A) \leq 1$
- $P_B(A) + P_B(\overline{A}) = 1$

Proposition 6 (Probabilité d'une intersection)
Soit A et B deux évènements de Ω tels que $P(B) \neq 0$ et $P(A) \neq 0$.

$$P(A \cap B) = P_B(A) \times P(B) \text{ ou } P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A)$$

Exemple 12
Soit A et B deux évènements de Ω tels que :

$$P(A) = P(B) + 0,2 \ ; \ P_A(B) = 0,3 \ ; \ P_B(A) = 0,4$$

Déterminer $P(A)$, $P(B)$ et $P(A \cap B)$

Exemple 13
Un sac contient 25 boules dont 15 blanches et 10 noires. L'expérience consiste à tirer une première boule, puis une seconde sans remise de la première dans le sac.
Déterminer les probabiltés suivantes :
- *A : la première boule est blanche.*
- *E : les deux boules sont blanches.*
- *F : la première boule est noire et la seconde est blanche.*
- *G : le tirage est bicolores.*
- *H : les deux boules sont noires.*

3 Formules des probabilités totales.

Activité : "des arbres pour illustrer, pour calculer."

Définition 9
Soit k un entier supérieur ou égal à 2.
*On dit que k évènements $A_1, A_2, \ldots, A_k$ forment une **partition de l'univers** Ω lorsque les trois conditions suivantes sont vérifiées :*
- *Pour tout entiers i tel que $1 \leq i \leq k$, $A_i \neq \emptyset$.*
- $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k = \Omega$
- *Pour tous entiers i et j tels que $1 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq k$ et $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$.*

Remarque : Pour tout évènement A distinct de Ω et $\emptyset$, A et $\overline{A}$ forment une partition de Ω.

Théorème 1 (Formules des probabilités totales)
Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_k$ k évènements de probabilités non nulles fromant une partition de l'univers Ω. Alors, pour tout évènement B de Ω, on a :

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \ldots + P(A_k \cap B) \\ &= P_{A_1}(B) \times P(A_1) + P_{A_2}(B) \times P(A_2) + \ldots + P_{A_k}(B) \times P(A_k) \end{aligned}$$

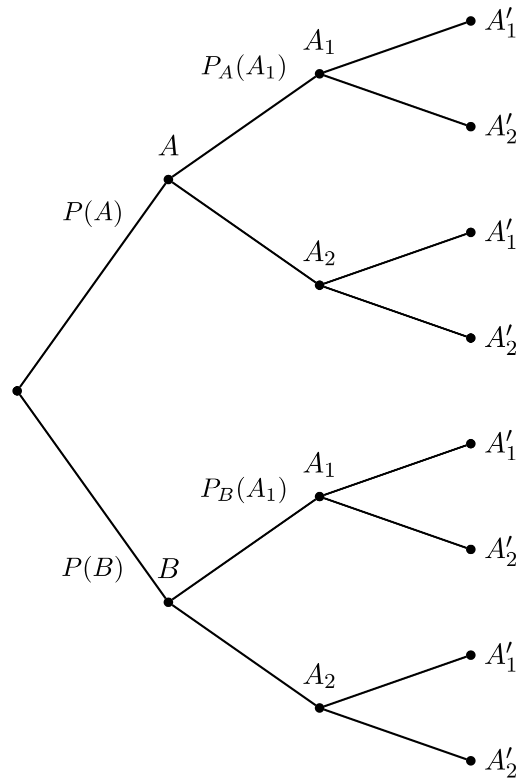
Remarque : En particulier, pour tout évènement A distinct de Ω et $\emptyset$, on a pour tout évènement B de Ω :

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) \\ &= P_A(B) \times P(A) + P_{\overline{A}}(B) \times P(\overline{A}) \end{aligned}$$

Exemple 14
Dans une animalerie, il n'y a que deux aquariums ; l'aquarium A, qui contient 5 poissons rouges et 6 poissons noirs, et l'aquarium B, qui contient 9 poissons rouges et 3 poissons noirs. Un client vient acheter un poisson. Il choisit l'un des deux aquariums puis demande au vendeur de pêcher au hasard un poisson dans cet aquarium.
Les deux aquariums sont placés de telle manière que la probabilité que le client choisisse l'aquarium A est $\frac{3}{5}$ et on suppose que, dans les deux aquariums, chaque poisson a autant de "chances" d'être pêché.
Déterminer la probabilité que le poisson acheté soit rouge.

4 Arbres pondérés.

Un expérience aléatoire peut être schématisée par un arbre pondéré :



- Un chemin complet (qui conduit donc à un sommet final) représente l'intersection de plusieurs évènements.
- Le **poids** d'une branche primaire est la probabilité de l'évènement qui se trouve à son extrémité. Le poids d'une branche secondaire est la probabilité conditionnelle de l'évènement qui se trouve à son extrémité sachant que l'évènement situé à son origine a été réalisé.

Afin de schématiser une expérience aléatoire par un arbre pondéré, on applique les règles suivantes :

Règle 1 La somme des probabilités affectées aux branches issues d'un même noeud est 1.

Règle 2 La probabilité d'un évènement représenté par un chemin est le produit des probabilités figurant sur ses branches.

Règle 3 La probabilité d'un évènement est la somme des probabilités de tous les chemins aboutissant à cet évènement.

BILAN : PROBABILITÉS CONDITIONNELLES.

IV Savoir-faire

- **Déterminer l'intersection et la réunion de deux évènements**
  Exemple 1
- **Déterminer un évènement contraire.**
  Exemple 1
- **Déterminer une loi de probabilité**
  Exemples 2, 3
- **Déterminer la probabilité d'un évènement en utilisant la définition.**
  Exemple 4, Exercices 1, 2, 5 p. 212, DM8
- **Déterminer la probabilité d'un évènement dans une situation d'équiprobabilité**
  Exemple 5, Exercices 1, 2... p. 212
- **Utiliser les formules pour déterminer la probabilité de la réunion de deux évènements, de l'intersection de deux évènements, d'un évènement contraire.**
  Exemple 6, Exercices 7, 8, 9 p. 212
- **Définir une variable aléatoire.**
  Exemples 7 et 8, Exercices 13, 14 p. 213, France-juin 2008
- **Déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire.**
  Exemple 9, Exercices 13, 14 p. 213, France-juin 2008
- **Calculer l'espérance, la variance et l'écart-type d'une variable aléatoire.**
  Exemple 10, Exercices 11, 12, 13, 14 p. 213, France-juin 2008
- **Reconnaître et calculer une probabilité conditionnelle**
  Exemple 11, Exercices 15, 19, 20, 22, 26, 35, 46, France-juin 2008, C p.222, DM8
- **Utiliser une probabilité conditionnelle pour calculer** $p(A \cap B)$
  Exemple 12, 13, Exercices 15, 17, 18, 20, France-juin 2008, C p.222, DM8
- **Utiliser la formule des probabilités totales**
  Exemple 14, Exerice 15, 26, 35, 46, France-juin 2008, C p.222, DM8
- **Construire, compléter et interpréter un arbre pondéré**
  Activité 2, Exercices 15, 22, 26, 35, 46, France-juin 2008, DM8
- **Montrer que des évènements sont indépendants**
  Exemples 15, 16, Exercices 35, 30.
- **Savoir calculer la probabilité d'un évènement résultant de la succession d'expériences indépendantes**
  Exemples 17, 19, France-juin 2008
- **Montrer que des variables aléatoires sont ou ne sont pas indépendantes.**
  Exemple 20, Exercice 32

V Pour préparer le Bac.

- Exercices A à E p.222-223.
- ***France, juin 2009 :*** Exercice 3. (Vous êtes capable de faire cet exercice avec les notions vues sur ce chapitre mais de futures notions rendront plus simples sa résolution. Il est donc possible que vous ne compreniez pas les corrigés proposés.)
- ***Liban, juin 2009 :*** Exercice 1 (questions 1 et 3).
- ***Amérique du Nord, juin 2009 :*** Exercice 1 (avec des équations différentielles !!!).
- ***Pondichéry, Avril 2009 :*** Exercice 4 (regroupe tout ce qu'on a vu)

Chapitre 13

Dénombrement-Lois de probabilités discrètes.

I Dénombrement.

1 Activité : des trios et des podiums.

Lors de la fête du lycée, dix élèves participent à une course de 2 000 mètres. A l'issue de cette épreuve, les trois premiers formeront un ***podium*** (en respectant l'ordre d'arrivée) et constitueront le groupe des sélectionnés (***trio***) pouvant participer à une rencontre inter-académique.
On se propose de déterminer à la fois de nombre p de podiums possibles et le nombre t de trios pouvant être sélectionnés.

1. **a.** A priori, existe-t-il plus de podiums ou de trios ?
   Comme dans les podiums, nous tenons compte de l'ordre d'arrivée et pas dans les trios, le nombre de podiums p est supérieur au nombre de trios t. En effet, à un même trio, il y a plusieurs podiums correspondants.

   b. Déterminer le nombre p.

   c. Déterminer le nombre de podiums pouvant être constitués à partir d'un trio $\{x; y; z\}$ fixé.

   d. En déduire une relation entre les nombres entiers p et t, puis calculer t.

2. **a.** Avec quinze participants au lieu de dix, quel aurait été le nombre de trios possibles ?

   b. Toujours avec quinze participants, mais avec quatre sélectionnés au lieu de trois, combien de groupes différents auraient pu être formés ?

2 Des situations de référence.

De nombreuses expériences aléatoires peuvent s'assimiler à des tirages dans une urne. Ce sont des situations de référence.

Tirages successifs avec remise.

Propriété 1
*Une urne contient n boules numérotées de 1 à n, $n \in \mathbb{N}^*$. On tire **successivement et avec remise** p boules, $p \in \mathbb{N}^*$. Il y a n^p résultats possibles.*

Remarques :

- Chaque résultat est appelé une **liste** de p éléments de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$ de n éléments ou une **p-liste**.
- Dans une liste de p éléments, l'*ordre des éléments est important*. Par exemple, les liste $(1; 2; 3)$ et $(2; 1; 3)$ sont distinctes.
- Une p-liste peut contenir ***plusieurs fois le même élément***. Par exemple, $(2, 3, 5, 4)$ est une 4-liste possible.

Exemple 1

1. *Un code de carte bancaire est composé de 4 chiffres de 0 à 9. Combien y a-t-il de codes possibles ?*
2. *Au loto foot, on coche une des trois cases $\boxed{1}\ \boxed{N}\ \boxed{2}$ pour chacun des 14 matches proposés. Dénombrer le nombre de grilles distinctes.*

3. *Roméo a retrouvé le début du numéro de téléphone de son amie Juliette. Il lui manque cependant les 3 derniers chiffres. Calculer la probabilité que Roméo retrouve le numéro au premier essai.*
4. *Au baccalauréat, un QCM contient 10 questions avec 4 réponses possibles pour chacune des questions dont une seule est exacte. Quel est le nombre de façons de répondre à ce QCM ?*

Tirages successifs sans remise.

Propriété 2
Une urne contient n boules numérotées de 1 à n, $n \in \mathbb{N}^*$. On tire ***successivement et sans remise*** *p boules, $1 \leq p \leq n$. Il y a $n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-(p-1))$ résultats possibles.*

Remarques :
- Chaque résultat est appelé un **arrangement** de p éléments de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$ de n éléments ou un **p-arrangement**.
- Un arrangement de p éléments est une liste de p éléments ***tous distincts***.

Propriété 3 (Cas particulier où $n = p$)
Le nombre d'arrangements formés de n éléments de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$ est $n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots 2 \times 1$.

Définition 1
Soit n un entier naturel avec $n \geq 2$.
Le nombre $n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots 2 \times 1$ est noté $n!$. On lit factorielle n.
Par convention : $0! = 1$ et $1! = 1$.

Avec ces notations, on a alors :

Propriété 4
Le nombre d'arrangements de p éléments d'un ensemble fini de n éléments est :

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Le nombre d'arrangements de n éléments d'un ensemble fini de n éléments est :

$$A_n^n = n!$$

Remarque : Un arrangement de n éléments d'un ensemble de n éléments est appelé une permutation de E.

Exemple 2
1. *Déterminer le nombre d'anagrammes du mot "CHIEN".*
2. *Lors de l'élaboration de son plan de classe, un professeur dispose de 8 élèves pour 10 places restantes. De combien de façon peut-il placer ces huit derniers élèves ?*
3. *Une course de chevaux comporte 20 partants. Combien y a-t-il de résultats possibles de tiercés dans l'ordre ?*

Tirages simultanés.

Propriété 5
Une urne contient n boules numérotées de 1 à n, $n \in \mathbb{N}^*$. On tire ***simultanément*** *p boules, $1 \leq p \leq n$.*
Chaque résultat est appelé une ***combinaison*** *de p éléments parmi les n éléments.*

Le nombre de résultats possibles, c'est-à-dire de combinaisons de p objets parmi n, est noté $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$ et est égal à

$$\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Remarques :

- Une combinaison de p éléments parmi n éléments est une partie à p éléments d'un ensemble à n éléments. *Exemple :* Si $E = \{a; b; c\}$ les combinaisons à 2 éléments de E sont les parties : $\{a; b\}, \{a; c\}, \{b; c\}$
- Une combinaison a p éléments d'un ensemble de n éléments ne contient que des ***éléments distincts***. *Exemple :* Si $E = \{a; b; c\}$, $\{a; a\}$ n'est pas une combinaison de deux éléments de E.
- Deux parties qui contiennent les mêmes éléments sont égales ; l'odre dans lequel on écrit les éléments n'a pas d'importance. *Exemple :* Si $E = \{a; b; c\}$, $\{a; b\}$=$\{b; a\}$

Exemple 3

1. *Au poker, dans un jeu de 32 cartes, on choisit 5 cartes au hasard (ces 5 cartes s'appellent un main) :*

a. *Quel est le nombre de mains possibles ?*

b. *Quel est le nombre de mains qui contiennent exactement 3 as ?*

c. *Quel est le nombre de mains qui contiennent exactement 5 coeurs ?*

d. *Quel est le nombre de mains qui contiennent au moins 3 as ?*

2. *Au loto, on tire au hasard 6 boules parmi 49. Combien existe-t-il de tirages possibles ?*

3. *Combien peut-on construire de segments avec N points distincts ? de triangles ?*

3 Propriétés des coefficients binomiaux.

Propriété 6

Pour tout entier naturel n,

$$\begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \ ; \ \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} = 1 \ ; \ \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} = n$$

Propriété 7

Pour tous entiers naturels n et p tels que $p \leq n$:

$$\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n-p \end{pmatrix}$$

Propriété 8 (Relation de Pascal - ROC)

Pour tout entier naturel n et tout entier naturel p tel que $1 \leq p \leq n-1$, on a :

$$\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n-1 \\ p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n-1 \\ p-1 \end{pmatrix}$$

Exemple 4

A l'aide des propriétés précédentes, calculer :

$$A = \begin{pmatrix} 250 \\ 249 \end{pmatrix} \ ; \ B = \begin{pmatrix} 348 \\ 123 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 347 \\ 128 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 347 \\ 122 \end{pmatrix}$$

Triangle de Pascal et formule du binôme de Newton.

Les propriétés précédentes permettent de compléter le tableau c-dessous où l'intersection d'une ligne n et d'une colonne p correspond à $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0									
1									
2									
3									
4									
5									
6									
7									
8									

Théorème 1 (Formule du binôme de Newton)
Pour tout nombre complexe a et b et tout entier naturel n non nul, on a :

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} a^{n-p}b^p = a^n + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} a^{n-1}b + \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} a^{n-2}b^2 + \ldots + \begin{pmatrix} n \\ n-1 \end{pmatrix} ab^{n-1} + b^n$$

Exemple 5
Développer $(x+1)^5$.

II Lois discrètes.

Lorsqu'une variable aléatoire prend des valeurs réelles en nombre fini, on dit que la loi de probabilité associée à cette variable est **discrète**.

1 Loi de Bernoulli.

Définition 2
*Une épreuve de Bernoulli de **paramètre** p est une expérience aléatoire ayant deux issues possibles ; l'une est appelée "**succès**" et l'autre "**échec**", ces deux issues ayant pour probabilités respectives p et $1-p$.*

Exemple 6
A partir des expériences suivantes, imaginer une épreuce de Bernoulli dont vous donnerez le paramètre p.

1. *Lancer un dé cubique non truqué (dont les faces sont numérotées de 1 à 6).*

2. *Se présenter à un feu tricolore où le rouge dure 30 secondes, l'orange, 5 secondes et le vert, 25 secondes.*

Théorème 2
*Dans une épreuve de Bernoulli de paramètre p, la loi de probabilité de la variable X prenant la valeur 1 si l'issue est "succès" et 0 sinon, appelée **loi de Bernoulli de paramètre** p, est :*

k	0	1
P(X=k)	1-p	p

*On dit que X **suit la loi de Bernoulli de paramètre** p.*

Exemple 7
Déterminer la loi de Bernoulli associée à l'expérience du feu tricolore.

Propriété 9 (ROC)
Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Bernoulli de paramètre p. On a alors

$$E(X) = p \text{ et } V(x) = p(1-p)$$

2 Loi binomiale.

Exemple 8

1. *On lance un dé cubique bien équilibré et on s'intéresse à la sortie d'un multiple de 3. On note S l'évènement "le nombre obtenu est un multiple de 3".*
   Définir une loi de Bernoulli associée à cette expérience.
2. *On répète 3 fois l'épreuve précédente. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de succès obtenus.*
   - **a.** *Quelles sont les valeurs prises par X ?*
   - **b.** *A l'aide d'un arbre pondéré, déterminer la loi de probabilité de X.*
3. *On répète maintenant six fois cette expérience. On note Y la variable aléatoire correspondant au nombre de succès obtenus.*
   On voudrait calculer la probabilité de l'évènement "$Y = 4$".
   - **a.** *Quelles sont les valeurs prises par Y ?*
   - **b.** *Calculer la probabilité qu'on commence par 4 succès suivis de deux échecs.*
   - **c.** *Les succès et les échecs n'apparaissent pas nécessairement dans cet ordre. Déterminer le nombre de façons d'obtenir 4 succès et 2 échecs sur ces 6 lancers.*
   - **d.** *En déduire la probabilité de l'évènement "$Y = 4$".*

Définition 3
L'expérience aléatoire qui consiste à répéter n fois une épreuve de Bernoulli de paramètre p et de façon indépendante est appelée un ***schéma de Bernoulli****.*
La loi de probabilité de la variable aléatoire X, qui prend pour valeurs le nombre de succès obtenus au cours de ces n épreuves, est appelé ***loi binomiale de paramètre*** *n* ***et*** *p, notée $\mathscr{B}(n;p)$.*
On dit que X ***suit la loi binomiale de paramètres*** *n* ***et*** *p.*

Théorème 3
Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n;p)$.
- *X est à valeurs dans $\{0;1;2;\dots;n\}$.*
- *Pour tout entier k appartenant à $\{0;1;2;\dots;n\}$, on a*

$$P(X = k) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k(1-p)^{n-k}$$

Exemple 9
Dans l'exemple 8, déterminer la loi de probabilité de Y.

Propriété 10
Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n;p)$.On a alors

$$E(X) = np \text{ et } V(X) = np(1-p)$$

III Sujets de Bac.

Exercice 1 (Pondichéry, avril 2009)
On dispose de deux dés cubiques dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Ces dés sont en apparence identiques mais l'un est bien équilibré et l'autre truqué. Avec le dé truqué la probabilité d'obtenir 6 lors d'un lancer est égale à $\dfrac{1}{3}$.

Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

1. *On lance le dé bien équilibré trois fois de suite et on désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre de 6 obtenus.*

a. *Quelle loi de probabilité suit la variable aléatoire X ?*

b. *Quelle est son espérance ?*

c. *Calculer $P(X = 2)$.*

2. *On choisit au hasard l'un des deux dés, les choix étant équiprobables. Et on lance le dé choisi trois fois de suite.*

On considère les évènements D et A suivants :

- *D « le dé choisi est le dé bien équilibré » ;*
- *A : « obtenir exactement deux 6 ».*

a. *Calculer la probabilité des évènements suivants :*

- *« choisir le dé bien équilibré et obtenir exactement deux 6 » ;*
- *« choisir le dé truqué et obtenir exactement deux 6 ».*

(On pourra construire un arbre de probabilité).

b. *En déduire que : $p(A) = \dfrac{7}{48}$.*

c. *Ayant choisi au hasard l'un des deux dés et l'ayant lancé trois fois de suite, on a obtenu exactement deux 6. Quelle est la probabilité d'avoir choisi le dé truqué ?*

3. *On choisit au hasard l'un des deux dés, les choix étant équiprobables, et on lance le dé n fois de suite (n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2).*

On note B_n l'évènement « obtenir au moins un 6 parmi ces n lancers successifs ».

a. *Déterminer, en fonction de n, la probabilité p_n de l'évènement B_n.*

b. *Calculer la limite de la suite (p_n). Commenter ce résultat.*

Exercice 2 (Antilles-Guyane, septembre 2008)

On dispose de deux urnes U_1 et U_2.

L'urne U_1 contient 2 billes vertes et 8 billes rouges toutes indiscernables au toucher.

L'urne U_2 contient 3 billes vertes et 7 billes rouges toutes indiscernables au toucher.

Une partie consiste, pour un joueur, à tirer au hasard une bille de l'urne U_1, noter sa couleur et remettre la bille dans l'urne U_1 puis de tirer au hasard une bille de l'ume U_2, noter sa couleur et remettre la bille dans l'urne U_2.

À la fin de la partie, si le joueur a tiré deux billes vertes il gagne un lecteur MP3. S'il a tiré une bille verte, il gagne un ours en peluche. Sinon il ne gagne rien. On note

V_1 l'événement : ń le joueur tire une boule verte dans U_1 ż

V_2 l'événement : ń le joueur tire une boule verte dans U_2 ż.

Les événements V_1 et V_2 sont indépendants.

1. *Montrer, à l'aide d'un arbre pondéré, que la probabilité de gagner un lecteur MP3 est $p = 0,06$.*

2. *Quelle est la probabilité de gagner un ours en peluche ?*

3. *Vingt personnes jouent chacune une partie. Déterminer la probabilité que deux d'entre elles exactement gagnent un lecteur MP3.*

On justifiera la réponse et on donnera une valeur approchée du résultat à 10^{-4} prés.

4. *On appelle n le nombre de personnes participant à la loterie un jour donné et jouant une seule fois.*

On note p_n la probabilité que l'une au moins de ces personnes gagne un lecteur MP3.

Déterminer la plus petite valeur de n vérifiant $p_n \geqslant 0,99$.

Exercice 3 (Amérique du Sud, novembre 2009)

On considère un questionnaire comportant cinq questions.

Pour chacune des cinq questions posées, trois propositions de réponses sont faites (A, B et C), une seule d'entre elles étant exacte.

Un candidat répond à toutes les questions posées en écrivant un mot réponse de cinq lettres.

Par exemple, le mot « $BBAAC$ » signifie que le candidat a répondu B aux première et deuxième questions, A aux troisième et quatrième questions et C à la cinquième question.

1. a. *Combien y-a-t'il de mots-réponses possible à ce questionnaire ?*

b. *On suppose que le candidat répond au hasard à chacune des cinq questions de ce questionnaire.*
Calculer la probabilité des évènements suivants :
E *: « le candidat a exactement une réponse exacte ».*
F *: « le candidat n'a aucune réponse exacte ».*
G *: « le mot-réponse du candidat est un palindrome » (On précise qu'un palindrome est un mot pouvant se lire indifféremment de gauche à droite ou de droite à gauche : par exemple, «* $BACAB$ *» est un palindrome).*

2. *Un professeur décide de soumettre ce questionnaire à ses 28 élèves en leur demandant de répondre au hasard à chacune des cinq questions de ce questionnaire.*
On désigne par X *le nombre d'élèves dont le mot-réponse ne comporte aucune réponse exacte.*

a. *Justifier que la variable aléatoire* X *suit la loi binomiale de paramètres* $n = 28$ *et* $p = \dfrac{32}{243}$.

b. *Calculer la probabilité, arrondie à* 10^{-2}*, qu'au plus un élève n'ait fourni que des réponses fausses.*

Chapitre 14

Lois de probabilité continues.

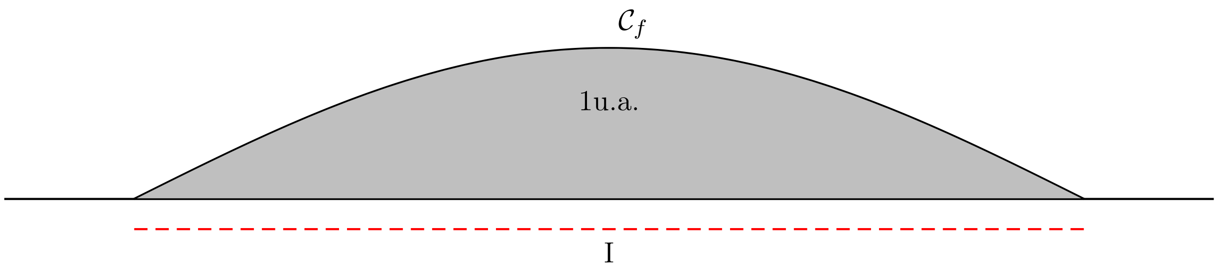
Lorsqu'une variable aléatoire X prend des valeurs de tout intervalle I de $\mathbb{R}$ (et pas seulement des valeurs entières ou des valeurs réelles en nombre fini), on dit que la ***loi de probabilité de cette variable est continue***.
X prenant un nombre infini de valeurs, on conçoit que pour déterminer la loi de probabilité de X, il n'est pas possible d'énumérer les probabilités des évènement $(X = k)$ pour toutes les valeurs k de X. On s'intéressera aux probabilité d'évènements de la forme $(X > k)$, $(X \leq k)$ etc... ou $(X \in J)$ où J est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Exemple 1
On choisit au hasard un nombre réel X dans l'intervalle $[0; 2\pi]$. A votre avis, quelle est la probabilité que ce nombre soit π ? quelle est la probabilité que ce nombre appartiennent à $[0; \pi]$?

I Loi de probabilité continue.

Définition 1 (Densité de probabilité.)
Soit I un intervalle.
On appelle **densité de probabilité sur I**, *toute fonction f* ***continue*** et ***positive*** *sur I telle que*

$$\boxed{\int_I f(x)\ dx = 1}$$



Exemple 2

1. *La fonction* cos *peut-elle être une densité de probabilité sur $I = \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$?*
2. *Déterminer, s'il existe, le réel k tel que la fonction $f\ :\ x \mapsto \dfrac{k}{x}$ soit une densité de probabilité sur $[e; e^3]$.*
3. *Soit f une fonction constante sur un intervalle $[a; b]$ (avec $a < b$). Quelle doit être la valeur de la constante pour que f soit une densité sur $[a; b]$?*

Remarques :

- Si I est un intervalle borné de la forme $[a; b]$ avec $a < b$ alors $\int_I f(x)\ dx = \int_a^b f(x)\ dx$.

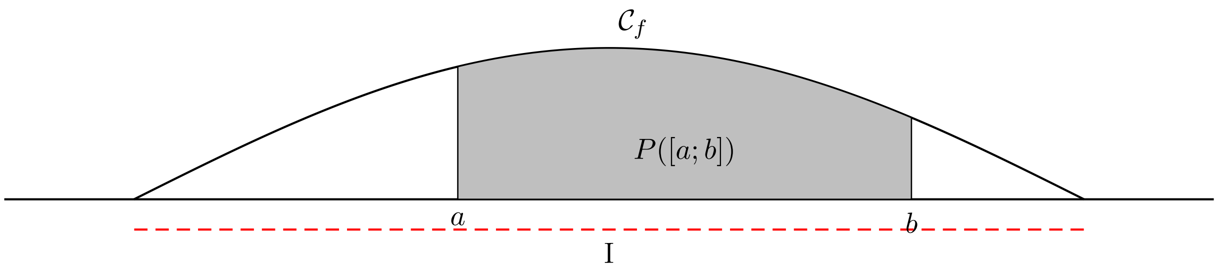
- Si I est un intervalle non borné du type $[a;+\infty[$ alors $\int_I f(x)\,dx = \lim\limits_{t\to+\infty} \int_a^t f(x)\,dx$
- Si I=$\mathbb{R}$ alors $\int_I f(x)\,dx = \lim\limits_{t\to-\infty} \int_t^a f(x)\,dx + \lim\limits_{t\to+\infty} \int_a^t f(x)\,dx$

Exemple 3
Montrer que la fonction $f\ :\ x \mapsto e^{-x}$ est une densité de probabilité sur $[0;+\infty[$.

Définition 2 (Loi de probabilité continue)
Soit I un intervalle et f une densité de probabilité sur I.
*On définit une **loi de probabilité de densité f sur l'intervalle I** en associant à tout intervalle $[a;b]$, inclus dans I, le réel :*

$$\boxed{P\left([a;b]\right) = \int_a^b f(x)\,dx}$$

*On dit aussi que P est une **loi continue sur I**.*



Définition 3
Soit P une loi de probabilité de densité f sur I.
On dit qu'une variable aléatoire X, à valeurs dans I, suit une loi de probabilité P sur I lorsque pour tout intervalle $[a;b]$ de I, on a

$$\boxed{P\left(a \leq X \leq b\right) = \int_a^b f(x)\,dx}$$

Exemple 4
Soit P une loi de probabilité de densité f sur $[0;2\pi]$ avec $f\ x : \mapsto \dfrac{1}{2\pi}$.
On note X la variable aléatoire qui suit la loi de probabilité P sur $[0;2\pi]$.
Déterminer $P\left(0 \leq X \leq \pi\right)$.

II Deux exemples de lois continues.

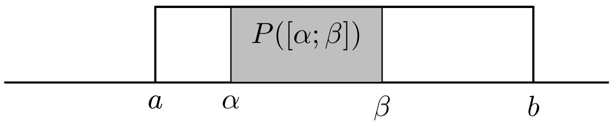
1 Loi uniforme.

Le choix au hasard d'un nombre réel de l'intervalle $[a;b]$ (cf. exemple 1) se modélise par la loi continue sur I dont la densité est constante, égale à $\dfrac{1}{b-a}$ (d'après exemple 2. 3).

Définition 4
*On appelle **loi uniforme** sur un intervalle $[a;b]$ la loi de probabilité continue sur $[a;b]$ dont la **densité f est la fonction constante** égale à $\dfrac{1}{b-a}$.*

Proposition 1
Soit X une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur $[a;b]$ alors pour tous réels α et β de $[a;b]$, avec $\alpha \leq \beta$, on a

$$\boxed{P(\alpha \leq X \leq \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{b-a}\, dx = \frac{\beta-\alpha}{b-a}}$$



Exemple 5

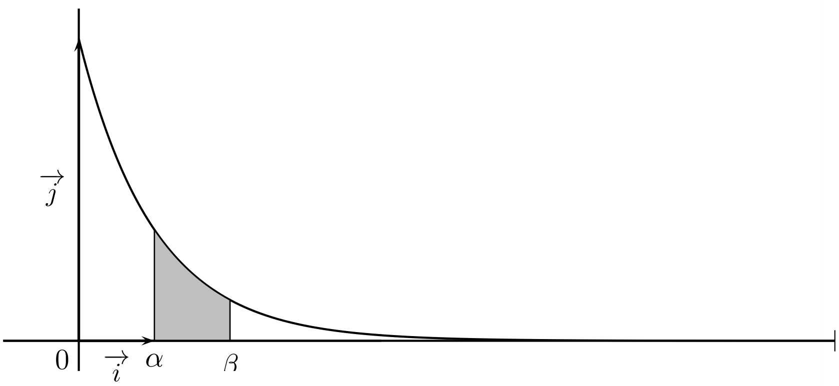
1. *En journée, à la station mairie de Clichy, un métro de la ligne 13 en direction de Chatillon passe toutes les 6 minutes.*
   Soit X le temps d'attente d'une personne à cette station.
   On suppose que X suit une loi uniforme sur $[0;6]$.
   Quelle est la probabilité que cette personne attende plus de 4 minutes ?
2. *On choisit au hasard un nombre réel dans l'intervalle $[-2;6]$ suivant la loi uniforme.*
   Déterminer la probabilité que le nombre soit nul ? négatif ? supérieur à π ?

2 Loi exponentielle.

Définition 5
*On appelle **loi exponentielle de paramètre** λ la loi de probabilité continue sur $[0;+\infty[$ dont la densité f est la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $\boxed{f(x) = \lambda e^{-\lambda x}}$ où λ est un réel positif fixé.*

Proposition 2
Soit X une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.
On a alors pour tous réels positifs α et β tels que $\alpha \leq \beta$:

$$\boxed{P(\alpha \leq X \leq \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_{\alpha}^{\beta}}$$



Exemple 6
On suppose que la durée de vie d'une voiture x suit une loi exponentielle de paramètre 0,1.

1. *Calculer la probabilité que la voiture dépasse 10 ans de durée de vie.*
2. *On sait qu'une voiture a duré déjà 10 ans.*
   Quelle est la probabilité qu'elle dépasse 12 ans de durée de vie ?
3. *Comparer le résultat précédent avec la probabilité que la durée de vie de la voiture dépasse 2 ans.*

III Loi de durée de vie sans vieillissement.

Définition 6
Soit T une variable aléatoire correspondant à la durée de vie d'un individu ou d'un objet.
On dit que T suit la loi de durée de vie sans vieillissement lorsque la probabilité que l'individu (ou l'objet) soit vivant à l'instant $t+h$ sachant qu'il est vivant à l'instant t ne dépend pas de son âge t, c'est-à-dire

$$P_{(T\geq t)}(T \geq t+h) = P(T \geq h)$$

Remarque : On peut expliquer ce qui précède de la manière suivante : le fait d'avoir vécu juqu'à l'instant t,$(T \geq t)$, n'influe pas sur le fait de vivre encore pendant h unités de temps.

Proposition 3
Une variable aléatoire T suit une loi de durée de vie sans vieillissement si et seulement si elle suit une loi exponentielle.

IV Sujets de bac.

Exercice 1 (Nouvelle Calédonie, novembre 2007)
Un responsable de magasin achète des composants électroniques auprès de deux fournisseurs dans les proportions suivantes : 25 % au premier fournisseur et 75 % au second.
La proportion de composants défectueux est de 3 % chez le premier fournisseur et de 2 % chez le second.
On note :
- *D l'évènement « le composant est défectueux » ;*
- *F_1 l'évènement « le composant provient du premier fournisseur » ;*
- *F_2 l'évènement « le composant provient du second fournisseur ».*

1. **a.** *Dessiner un arbre pondéré.*
b. *Calculer $p(D \cap F_1)$, puis démontrer que $p(D) = 0,0225$.*
c. *Sachant qu'un composant est défectueux, quelle est la probabilité qu'il provienne du premier fournisseur ?*

Dans toute la suite de l'exercice, on donnera une valeur approchée des résultats à 10^{-3} près.

2. *Le responsable commande 20 composants. Quelle est la probabilité qu'au moins deux d'entre eux soient défectueux ?*

3. *La durée de vie de l'un de ces composants est une variable aléatoire notée X qui suit une loi de durée de vie sans vieillissement ou loi exponentielle de paramètre λ, avec λ réel strictement positif.*
a. *Sachant que $p(X > 5) = 0,325$, déterminer λ.*
Pour les questions suivantes, on prendra $\lambda = 0,225$.
b. *Quelle est la probabilité qu'un composant dure moins de 8 ans ? plus de 8 ans ?*
c. *Quelle est la probabilité qu'un composant dure plus de 8 ans sachant qu'il a déjà duré plus de 3 ans ?*

Exercice 2 (France, juin 2008)
La durée de vie, exprimée en heures, d'un agenda électronique est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ où X est un réel strictement positif.

On rappelle que pour tout $t \geqslant 0$, $P(X \leqslant t) = \displaystyle\int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx$.
La fonction R définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par $R(t) = P(X > t)$ est appelée fonction de fiabilité.

1. *Restitution organisée de connaissances*
a. *Démontrer que pour tout $t \geqslant 0$ on a $R(t) = e^{-\lambda t}$.*
b. *Démontrer que la variable X suit une loi de durée de vie sans vieillissement, c'est-à-dire que pour tout réel $s \geqslant 0$, la probabilité conditionnelle $P_{X>t}(X > t+s)$ ne dépend pas du nombre $t \geqslant 0$.*

2. *Dans cette question, on prend $\lambda = 0,00026$.*
a. *Calculer $P(X \leqslant 1000)$ et $P(X > 1000)$.*
b. *Sachant que l'évènement $(X > 1000)$ est réalisé, calculer la probabilité de l'évènement $(X > 2000)$.*

c. *Sachant qu'un agenda a fonctionné plus de 2000 heures, quelle est la probabilité qu'il tombe en panne avant 3000 heures ? Pouvait-on prévoir ce résultat ?*

Exercice 3 (Extrait de Pondichéry, avril 2010)
Une urne contient 10 boules blanches et 1000 boules rouges. On fait tirer à un joueur des boules de l'urne. À chaque tirage, toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées. Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 euros et pour chaque boule rouge tirée, il perd 3 euros.

On désigne par X la variable aléatoire correspondant au gain algébrique obtenu par le joueur.
Le nombre de boules blanches étant faible devant celui des boules rouges, on admet que l'on peut modéliser le nombre de tirages nécessaires pour obtenir une boule blanche par une variable aléatoire Z suivant la loi :

$$\text{pour tout } k \in \mathbb{N},\ p(Z \leqslant k) = \int_0^k 0,01\mathrm{e}^{-0,01x}\,dx.$$

1. *Calculer la probabilité que le joueur ait besoin de tirer au plus 50 boules pour avoir une boule blanche, soit $P(Z \leqslant 50)$.*

2. *Calculer la probabilité conditionnelle de l'évènement : « le joueur a tiré au maximum 60 boules pour tirer une boule blanche » sachant l'évènement « le joueur a tiré plus de 50 boules pour tirer une boule blanche ».*

Chapitre 15

Probabilités - Sujets du bac 2009

Exercice 1 (Antilles-Guyane, juin 2009)
Dans cet exercice, les résultats seront donnés sous forme de fractions.

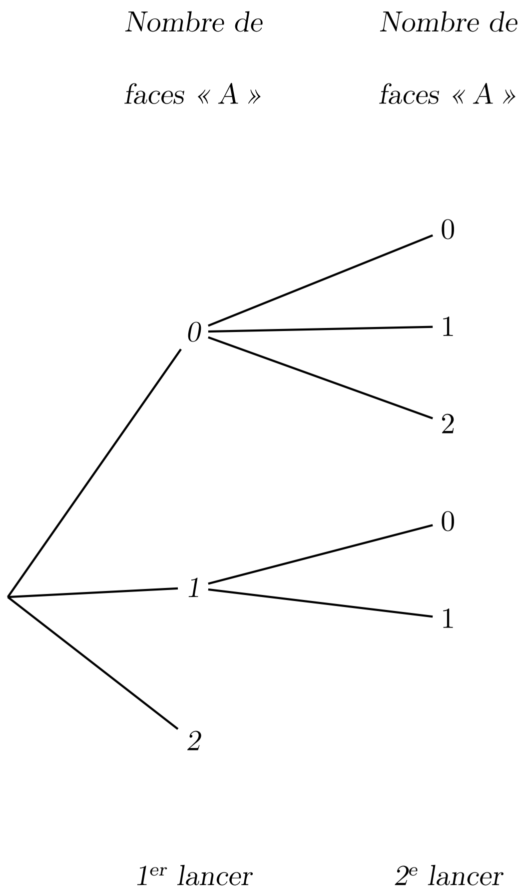
On dispose de deux dés tétraédriques identiques : les quatre faces sont numérotées A,B,C et D.

1. *On lance les deux dés simultanément et on note la lettre de la face sur laquelle repose chacun des dés.*

Déterminer la probabilité des évènements suivants :
- E_0 *: « ne pas obtenir la lettre A »,*
- E_1 *: « obtenir une fois la lettre A »,*
- E_2 *: « obtenir deux fois la lettre A ».*

2. *On organise un jeu de la façon suivante :*
- *Le joueur lance les deux dés simultanément.*
- *Si les deux dés reposent sur les faces « A », le jeu s'arrête.*
- *Si un seul dé repose sur la face « A », le joueur relance l'autre dé et le jeu s'arrête.*
- *Si aucun dé ne repose sur la face « A », le joueur relance les deux dés et le jeu s'arrête.*

a. *Recopier et compléter l'arbre suivant en indiquant sur chaque branche la probabilité correspondante.*



b. *Le joueur gagne si, lorsque le jeu s'arrête, les deux dés reposent sur les faces « A ».*

Montrer que, pour le joueur, la probabilité de gagner est de $\frac{49}{256}$.

c. *Pour participer, le joueur doit payer 5 euros. S'il gagne, on lui donne 10 euros. Si, lorsque le jeu s'arrête, un seul dé repose sur la face « A », il est remboursé. Sinon, il perd sa mise.*
Le jeu est-il favorable au joueur ?

Exercice 2 (France, juin 2009)

I. Cette question est une restitution organisée de connaissances.

On rappelle que si n et p sont deux nombres entiers naturels tels que $p \leqslant n$ alors $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.

Démontrer que pour tout nombre entier naturel n et pour tout nombre entier naturel p tels que $1 \leqslant p \leqslant n$ on a : $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$.

II. *Un sac contient 10 jetons indiscernables au toucher :*
7 jetons blancs numérotés de 1 à 7 et 3 jetons noirs numérotés de 1 à 3.
On tire simultanément deux jetons de ce sac.

1. **a.** *On note A l'évènement « obtenir deux jetons blancs ».*
Démontrer que la probabilité de l'évènement A est égale à $\dfrac{7}{15}$.

b. *On note B l'évènement « obtenir deux jetons portant des numéros impairs ».*
Calculer la probabilité de B.

c. *Les évènements A et B sont-ils indépendants ?*

2. *Soit X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de' jetons blancs obtenus lors de ce tirage simultané.*

a. *Déterminer la loi de probabilité de X.*

b. *Calculer l'espérance mathématique de X.*

Exercice 3 (Liban, juin 2009)

Pour chacune des trois questions, une seule des quatre propositions est exacte.
Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie, sans justification.
Il sera attribué un point si la réponse est exacte, zéro sinon.

1. *On désigne par A et B deux évènements indépendants d'un univers muni d'une loi de probabilité p.*
On sait que $p(A \cup B) = \dfrac{4}{5}$ *et* $p\left(\overline{A}\right) = \dfrac{3}{5}$.
La probabilité de l'évènement B est égale à :

a. $\dfrac{2}{5}$	**b.** $\dfrac{2}{3}$	**c.** $\dfrac{3}{5}$	**a.** $\dfrac{1}{2}$

2. *On note X une variable aléatoire continue qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,04$.*
On rappelle que pour tout réel t positif, la probabilité de l'évènement $(X \leqslant t)$, notée $p(X \leqslant t)$, est donnée par $p(X \leqslant t) = \displaystyle\int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx$.
La valeur approchée de $p(X > 5)$ à 10^{-2} près par excès est égale à :

a. $0,91$	**b.** $0,18$	**c.** $0,19$	**d.** $0,82$

3. *Dans ma rue, il pleut un soir sur quatre.*
S'il pleut, je sors mon chien avec une probabilité égale à $\dfrac{1}{10}$ *; s'il ne pleut pas, je sors mon chien avec une probabilité égale à* $\dfrac{9}{10}$.
Je sors mon chien ; la probabilité qu'il ne pleuve pas est égale à :

a. $\dfrac{9}{10}$	**a.** $\dfrac{27}{40}$	**a.** $\dfrac{3}{4}$	**a.** $\dfrac{27}{28}$

Exercice 4 (Polynésie, juin 2009)

Une entreprise fabrique des lecteurs MP3, dont 6 % sont défectueux.

Chaque lecteur MP3 est soumis à une unité de contrôle dont la fiabilité n'est pas parfaite.

Cette unité de contrôle rejette 98 % des lecteurs MP3 défectueux et 5 % des lecteurs MP3 fonctionnant correctement.

On note :

- *D l'évènement : « le lecteur MP3 est défectueux » ;*
- *R l'évènement : « l'unité de contrôle rejette le lecteur MP3 ».*

1. *Faire un arbre pondéré sur lequel on indiquera les données qui précèdent.*

2. **a.** *Calculer la probabilité que le lecteur soit défectueux et ne soit pas rejeté.*

b. *On dit qu'il y a une erreur de contrôle lorsque le lecteur MP3 est rejeté alors qu'il n'est pas défectueux, ou qu'il n'est pas rejeté alors qu'il est défectueux.*

Calculer la probabilité qu'il y ait une erreur de contrôle.

3. *Montrer que la probabilité qu'un lecteur MP3 ne soit pas rejeté est égale à 0,8942.*

4. *Quatre contrôles successifs indépendants sont maintenant réalisés pour savoir si un lecteur MP3 peut être commercialisé.*

Un lecteur MP3 est :

- *commercialisé avec le logo de l'entreprise s'il subit avec succès les quatre contrôles successifs,*
- *détruit s'il est rejeté au moins deux fois,*
- *commercialisé sans le logo sinon.*

Le coût de fabrication d'un lecteur MP3 s'élève à 50 €.

Son prix de vente est de 120 € pour un lecteur avec logo et 60 € pour un lecteur sans logo.

On désigne par G la variable aléatoire qui, à chaque lecteur MP3 fabriqué, associe le gain algébrique en euros (éventuellement négatif) réalisé par l'entreprise.

a. *Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire G.*

b. *Calculer à 10^{-2} près l'espérance mathématique de G. Donner une interprétation de ce résultat.*

Exercice 5 (Asie, juin 2009)

Une entreprise fait fabriquer des paires de chaussette auprès de trois fournisseurs $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_3$.

Dans l'entreprise, toutes ces paires de chaussettes sont regroupées dans un stock unique.

La moitié des paires de chaussettes est fabriquée par le fournisseur $\mathcal{F}_1$, le tiers par le fournisseur $\mathcal{F}_2$ et le reste par le fournisseur $\mathcal{F}_3$.

Une étude statistique a montré que

- *5 % des paires de chaussette fabriquées par le fournisseur $\mathcal{F}_1$ ont un défaut ;*
- *1,5 % des paires de chaussette fabriquées par le fournisseur $\mathcal{F}_2$ ont un défaut ;*
- *sur l'ensemble du stock, 3,5 % des paires de chaussette ont un défaut.*

1. *On prélève au hasard une paire de chaussettes dans le stock de l'entreprise.*

On considère les évènements F_1, F_2, F_3 et D suivants :

- *F_1 : « La paire de chaussettes prélevée est fabriquée par le fournisseur $\mathcal{F}_1$ » ;*
- *F_2 : « La paire de chaussettes prélevée est fabriquée par le fournisseur $\mathcal{F}_2$ » ;*
- *F_3 : « La paire de chaussettes prélevée est fabriquée par le fournisseur $\mathcal{F}_3$ » ;*
- *D : « La paire de chaussettes prélevée présente un défaut ».*

a. *Traduire en termes de probabilités les données de l'énoncé en utilisant les évènements précédents.*

Dans la suite, on pourra utiliser un arbre pondéré associé à cet expérience.

b. *Calculer la probabilité qu'une paire de chaussettes prélevée soit fabriquée par le fournisseur $\mathcal{F}_1$ et présente un défaut.*

c. *Calculer la probabilité de l'évènement $F_2 \cap D$.*

d. *En déduire la probabilité de l'évènement $F_3 \cap D$.*

e. *Sachant que la paire de chaussettes prélevée est fabriquée par le fournisseur $\mathcal{F}_3$, quelle est la probabilité qu'elle présente un défaut ?*

2. *L'entreprise conditionne les paires de chaussettes par lots de six paires.*
On considère que le stock est suffisamment grand pour assimiler le choix des six paires de chaussettes à des tirages indépendants, succesifs avec remise.

a. *Calculer la probabilité que deux paires de chaussettes exactement d'un lot présentent un défaut ; on donnera un résultat arrondi au millième.*

b. *Démontrer que la probabilité, arrondie au millième, qu'au plus une paire de chaussettes d'un lot présente un défaut est égale à* $0,983$.

Exercice 6 (Centres étrangers, juin 2009)

1. ***Restitution organisée de connaissances :***

Prérequis : *On rappelle que deux évènements* A *et* B *sont indépendants pour la probabilité* p *si et seulement si :* $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.

Soient A *et* B *deux évènements associés à une expérience aléatoire*

a. *Démontrer que* $p(B) = p(B \cap A) + p\left(B \cap \overline{A}\right)$.

b. *Démontrer que, si les évènements* A *et* B *sont indépendants pour la probabilité* p*, alors les évènements* $\overline{A}$ *et* B *le sont également.*

2. ***Application :*** *Chaque matin de classe, Stéphane peut être victime de deux évènements indépendants :*

- R *: « il n'entend pas son réveil sonner » ;*
- S *: « Son scooter, mal entretenu, tombe en panne ».*

II a observé que chaque jour de classe, la probabilité de R *est égale* $0,1$ *et que celle de* S *est égale à* $0,05$*. Lorsque qu'au moins l'un des deux évènements se produit, Stéphane est en retard au lycée sinon il est à l'heure.*

a. *Calculer la probabilité qu'un jour de classe donné, Stéphane entende son réveil sonner et que son scooter tombe en panne.*

b. *Calculer la probabilité que Stéphane soit à l'heure au lycée un jour de classe donné.*

c. *Au cours d'une semaine, Stéphane se rend cinq fois au lycée. On admet que le fait qu'il entende son réveil sonner un jour de classe donné n'influe pas sur le fait qu'il l'entende ou non les jours suivants.*
Quelle est la probabilité que Stéphane entende le réveil au moins quatre fois au cours d'une semaine ? Arrondir le résultat à la quatrième décimale.

Quatrième partie

Nombres complexes.

Chapitre 16

Les nombres complexes.

I Les nombres complexes.

1 L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

Théorème 1

Il existe un ensemble, noté $\mathbb{C}$, d'éléments appelés ***nombres complexes****, tel que :*
- *$\mathbb{C}$ contient $\mathbb{R}$.*
- *L'ensemble $\mathbb{C}$ est muni de deux opérations, l'addition (notée $+$) et la multiplication (notée $\times$) qui suivent les mêmes règles de calcul que l'addition et la multiplication dans $\mathbb{R}$.*
- *$\mathbb{C}$ contient un élément noté i tel que $i^2 = -1$.*
- *Tout nombre complexe z de $\mathbb{C}$ s'écrit de manière unique $z = a + ib$ où a et b sont des réels.*

Exemple 1

Les nombres $2 + 3i$, 61, $\sqrt{2} + \frac{1}{2}\,i$, $4i$ sont des nombres complexes.

2 Ecriture algébrique des nombres complexes.

Définition 1

Soit $z = a + ib$, avec a et b des réels, un nombre complexe.
- *L'écriture $a + ib$ est appelée l'****écriture algébrique*** *de z.*
- *Le réel a est appelée la* ***partie réelle*** *de z et est notée*

$$a = \Re e(z)$$

- *Le réel b est appelée la* ***partie imaginaire*** *de z et est notée*

$$b = \Im m(z)$$

.

Remarque : la partie imaginaire d'un nombre complexe est un nombre réel!!!

Exemple 2

On considère les nombres complexes $z = 1 - 2i$ et $z' = 3 + \frac{3}{2}\,i$.
Déterminer $\Re e(z)$, $\Re e(z')$, $\Re e(z + z')$, $\Re e(zz')$, $\Im m(z)$, $\Im m(z')$, $\Im m(z + z')$, $\Im m(zz')$.

Remarques : Soit z un nombre complexe, si $\Im m(z) = 0$ alors z est un réel.
De plus tout nombre réel x s'écrit sous la forme $x = x + 0i$. Donc $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Définition 2

Soit z un nombre complexe.
Si $\Re e(z) = 0$, on dit que z est un ***imaginaire pur****.*

Exemple 3

Dans l'exemple précédent, le nombre complexe zz' est un imaginaire pur.

Théorème 2

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire.

Remarque : Ce théorème résulte directement de l'unicité de l'écriture algébrique d'un nombre complexe.

Exemple 4
Déterminer deux nombres réels x et y tels que :

$$x + y + i(x - y) = 1$$

3 Opérations dans $\mathbb{C}$.

D'après le théorème 1, l'addition et la multiplication dans $\mathbb{C}$ suivent les mêmes règles de calcul que l'addition et la multiplication dans $\mathbb{R}$. On a alors :

Définition 3
Soit $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$, avec a, b, a', b' réels, deux nombres complexes.

- *La* ***somme*** *$z + z'$ est le nombre complexe :*

$$z + z' = (a + a') + i(b + b')$$

- *Le* ***produit*** *zz' est le nombre complexe :*

$$zz' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$$

Exemple 5
Soit $z = 2 + 3i$ et $z' = 4 + 5i$.
Donner la forme algébrique de $Z = z - 2z'$ et $Z' = z'^2$

Propriété 1
Tout nombre complexe $z = a + ib$, avec a et b réels, admet un ***opposé*** *dans $\mathbb{C}$, le nombre complexe $-a - ib$, noté $-z$.*

Définition 4
La différence de deux nombres complexes z et z' est le nombre complexe :

$$z - z' = z + (-z')$$

Remarque : On a dans $\mathbb{C}$ les mêmes identités remarquables que dans $\mathbb{R}$:

Pour tous nombres complexes z et z' :

$$(z + z')^2 = z^2 + 2zz' + z'^2 \text{ et } (z - z')(z + z') = z^2 - z'^2$$

Exemple 6
Simplifier $(a + ib)(a - ib)$ avec a et b des réels.

Exemple 7
Déterminer la forme algébrique de $(1 - 3i)^2$

Propriété 2
Tout nombre complexe z non nul admet un unique ***inverse*** *dans $\mathbb{C}$, noté $\dfrac{1}{z}$.*

Exemple 8
Soit $z = 2 + 3i$. Montrer que $z' = \dfrac{2}{13} - \dfrac{2}{13}i$ est l'inverse de z.

Définition 5
Soit z et z' deux nombres complexes, avec z' non nul.

Le ***quotient*** *de z par z' est le nombre complexe $\dfrac{z}{z'} = z \times \dfrac{1}{z'}$*

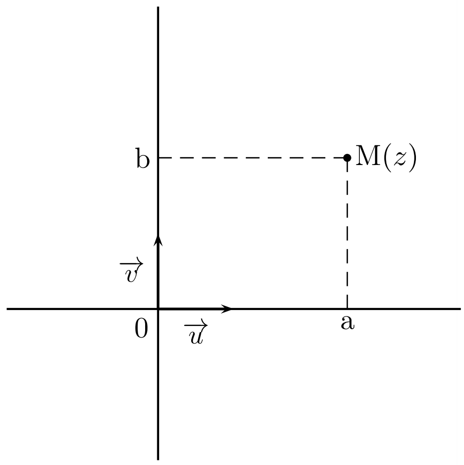
Exemple 9
Donner l'écriture algébrique du nombre complexe $z = \dfrac{i}{1 - 2i}$

II Représentation géométrique d'un nombre complexe.

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.

Définition 6
A tout nombre complexe $z = a + ib$, avec a et b des réels, on peut associer le point $M(a; b)$.
- *Le point $M(a; b)$ est appelé* ***image*** *de $z = a + ib$ et on note $M(z)$.*
- *le nombre $z = a + ib$ est appelé* ***affixe*** *du point $M(a; b)$.*

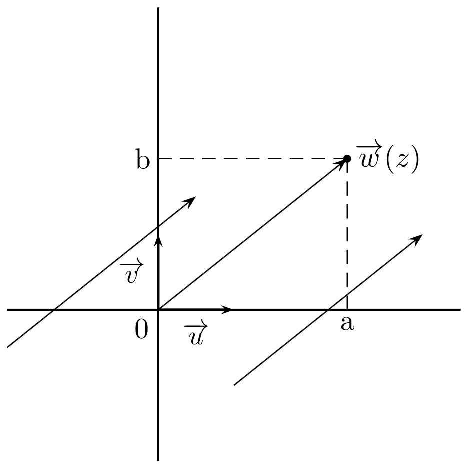
Remarque : la mot affixe est du genre **féminin**.



Remarque : Soit M le point d'affixe $z = a + ib$ avec a et b réels.
- Si $a = 0$ alors z est un imaginaire pur et $M(0; b)$ est situé sur l'axe des ordonnées. L'axe des ordonnées est alors appelé **axe imaginaire.**
- Si $b = 0$ alors z est un nombre réel et $M(a; 0)$ est situé sur l'axe des abscisses. L'axe des abscisses est alors appelé axe des réels.

Définition 7
A tout nombre complexe $z = a + ib$ (avec a et b réels), on peut associer le vecteur $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

On dit alors que $\overrightarrow{w}$ est le vecteur image de z ou que z est l'affixe de $\overrightarrow{w}$.



Remarques :
- Ainsi, dire que z est l'affixe du point M équivaut à dire que z est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OM}$.
- On peut "identifier $\mathbb{C}$" au plan orienté muni d'un repère orthonormé direct. On ne peut donc pas prolonger dans $\mathbb{C}$ la relation d'ordre définie sur $\mathbb{R}$. En effet, comparer deux nombres complexes reviendrait à comparer deux points (ou deux vecteurs) du plan, ce qui n'a pas de sens.

Exemple 10
Déterminer les affixes de $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $-\overrightarrow{u}$ et $-\overrightarrow{v}$.

Exemple 11
On considère les points $A(-2i)$, $B(1+i)$ et $C(-1)$. Déterminer l'affixe de D tel que ABDC soit un parallélogramme.

Proposition 1
On note z_A et z_B les affixes des points A et B ; $z_{\overrightarrow{AB}}$ l'affixe de $\overrightarrow{AB}$; et $z_{\overrightarrow{w}}$ et $z_{\overrightarrow{w'}}$ les affixes de $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{w'}$. k est un nombre réel.
On a alors :

- *$\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$:*
$$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$$
- *Le vecteur $\overrightarrow{w} + \overrightarrow{w'}$ a pour affixe $z_{\overrightarrow{w}} + z_{\overrightarrow{w'}}$:*
$$z_{\overrightarrow{w}+\overrightarrow{w'}} = z_{\overrightarrow{w}} + z_{\overrightarrow{w'}}$$
- *Le vecteur $k\overrightarrow{w}$ a pour affixe $kz_{\overrightarrow{w}}$:*
$$z_{k\overrightarrow{w}} = kz_{\overrightarrow{w}}$$
- *Le milieu I de [AB] a pour affixe :*
$$z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$$
- *Le barycentre G du système de points pondérés $\{(A;\alpha), (B;\beta), (C;\gamma)\}$ a pour affixe :*
$$z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha + \beta + \gamma}$$

Exemple 12
On considère les points $A(-2i)$, $B(1+i)$ et $C(-1)$.
Déterminer l'affixe de I milieu du segment [AB] et de G centre de gravité de ABC.

III Conjugué d'un nombre complexe

1 Définition et interprétation géométrique

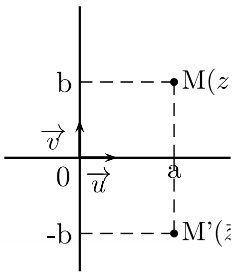
Définition 8
Soit a et b deux nombres réels.
*Le **nombre complexe conjugué** de $z = a + ib$ est le nombre complexe $\bar{z} = a - ib$.*

Exemple 13
Déterminer la forme algébrique du nombre complexe conjugué des nombres complexes suivants :
$$z_1 = 1 + 3i\ ;\ z_2 = 5\ ;\ z_3 = 4i\ ;\ z_4 = (3+i)(4-2i)$$

Remarques :

- Soit $z = a + ib$ avec a et b deux réels.
On a alors : $\bar{z} = \overline{a + ib} = a - ib$ et donc $\bar{\bar{z}} = \overline{a - ib} = a + ib = z$.
Donc le conjugué de z est $\bar{z}$ et le conjugué de $\bar{z}$ est z ; on dit que z et $\bar{z}$ sont deux **nombres complexes conjugués**.
- $\Re e(z) = \Re e(\bar{z})$.

Proposition 2 (Interprétation géométrique)
Soit z un nombre complexe.
Les points M et M' du plan complexe d'affixes respectives z et $\bar{z}$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.



2 Propriétés

Proposition 3 (ROC)
Pour tout nombre complexe z, on a :

$$z + \bar{z} = 2\Re e(z) \text{ et } z - \bar{z} = 2i\,\Im m(z)$$

On en déduit les propriétés suivantes :
- *z est **réel** si et seulement si $\mathbf{z} = \bar{\mathbf{z}}$.*
- *z est un **imaginaire** pur si et seulement si $\mathbf{z} = -\bar{\mathbf{z}}$*

Proposition 4
Pour tout nombre complexe $z = a + ib$, avec a et b réels, on a :

$$z\bar{z} = a^2 + b^2$$

Remarque : Cette propriété est une conséquence directe de l'exemple 6 où on avait démontré que

$$(a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$$

Conséquence : Le nombre $z\bar{z}$ est un réel positif.

Proposition 5
Pour tous nombres complexes z et z' :

$$\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'} \ ; \ \overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'} \ ; \ \overline{-z} = -\overline{z}$$

De plus, si $z' \neq 0$:

$$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}} \text{ et } \overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{1}{\overline{z'}}$$

Si $z \neq 0$, on a, pour tout entier relatif n :

$$\overline{z^n} = \overline{z}^n$$

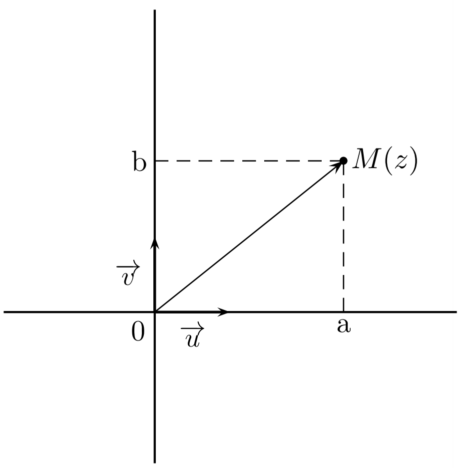
Exemple 14
Soit z un nombre complexe. Déterminer les conjugués des nombres complexes suivants en fonction de $\bar{z}$:

$$Z = (2 + z)(1 + iz) \text{ et } Z' = \frac{1 + iz}{3z - i}$$

Application 1 (Lieu géométrique)
Déterminer le lieu des points M tels que $\dfrac{iz - 1}{z - i}$ soit réel.

IV Module et argument d'un nombre complexe.

Voici une figure illustrant les définitions de module et d'argument à venir.



1 Module d'un nombre complexe.

Définition 9
Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.
Soit z un nombre complexe et M le point d'affixe z.
On appelle ***module de z*** *le nombre réel, noté $|z|$, défini par :*

$$|z| = OM$$

Exemple 15
Déterminer les modules des nombres complexes suivants :

$$z = 2 - 3i \ ; \ z = 1 + i \ ; z = 2i$$

Remarque : Si $\overrightarrow{w}$ est un vecteur d'affixe z alors $\|\overrightarrow{w}\| = \left\|\overrightarrow{OM}\right\| = OM = |z|$

Proposition 6
Soit $z = a + ib$, avec a et b réels, un nombre complexe.
On a alors :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Remarque : Si z est un réel alors $z = x + 0i$ avec $x \in \mathbb{R}$.
On a alors $|z| = \sqrt{x^2 + 0^2} = \sqrt{x^2} = |x|$.
Le module de z est alors la valeur absolue de x (avec $x = z$). Ceci justifie l'utilisation des mêmes notations pour le module d'un complexe et la valeur absolue d'un réel.

Application 2
Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z - i| = 2$.

Propriété 3
Pour tout nombre complexe z,

$$|z|^2 = z\overline{z}$$

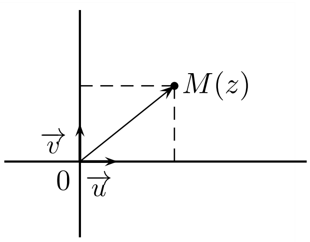
Propriété 4
Pour tout nombre complexe z et tout nombre complexe z' :
- $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
- $|z| = |\overline{z}| = |-z| = |-\overline{z}|$
- $|zz'| = |z||z'|$
- *Si* $z \neq 0$, $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$
- *Si* $z' \neq 0$, $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$
- *Si* $z \neq 0$, *pour tout entier relatif* n, $|z^n| = |z|^n$

Proposition 7 (Inégalité triangulaire)
Pour tout nombre complexe z et tout nombre complexe z' :

$$|z + z'| \leq |z| + |z'|$$

2 Argument d'un nombre complexe

Définition 10
Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.
Soit z un nombre complexe non nul et M le point d'affixe z.
On appelle **argument de** z *, noté* $\arg(z)$*, toute mesure en radians de l'angle orienté* $\left(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{OM}\right)$.



Remarques :
- 0 est le seul nombre complexe qui n'admet pas d'argument.
- Tout nombre complexe non nul admet une infinité d'arguments. En effet, si θ est un argument de z, alors, pour tout entier relatif k, $\theta + 2k\pi$ est aussi un argument de z. On a alors :

$$\arg(z) = \theta[2\pi]$$

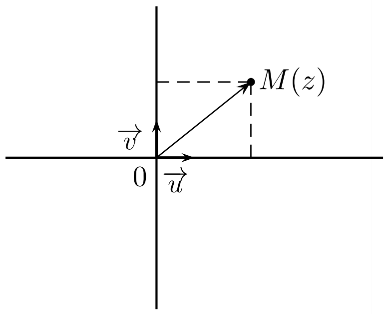
  L'unique argument θ appartenant à l'intervalle $]-\pi;\pi]$ s'appelle l'**argument principal** de z.

Exemple 16
Déterminer les arguments principaux des nombres complexes suivants : 2, $-3i$, -5, i, $1+i$, $-2-2i$.

Proposition 8 (ROC)
Pour tout nombre complexe z non nul :
- *z est un réel si et seulement si* $\arg(z) = 0[\pi]$.
- *z est un imaginaire pur si et seulement si* $\arg(z) = \dfrac{\pi}{2}[\pi]$.

Proposition 9 (ROC)
z est un nombre complexe non nul. On a :

$$\arg(\overline{z}) = -\arg(z) \qquad \arg(-z) = \pi + \arg(z) \qquad \arg(-\overline{z}) = \pi - \arg(z)$$



V Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul.

1 Forme trigonométrique.

Proposition 10
Soit z un nombre complexe non nul de forme algébrique $a+ib$, avec a et b des réels, et θ un argument de z. Alors :

$$a = |z|\cos\theta \text{ et } b = |z|\sin\theta$$

Théorème 3 (Forme trigonométrique)
Tout nombre complexe z non nul peut s'écrire sous la forme :

$$z = |z|\left(\cos\theta + i\sin\theta\right) \text{ avec } \theta = \arg(z)$$

*Cette écriture est appelée **forme trigonométrique** de z.*

Exemple 17
Déterminer la forme algébrique du nomnbre complexe z de module $\sqrt{5}$ et dont un argument est $\dfrac{2\pi}{3}$.

Théorème 4
Soit z un nombre complexe non nul.
*Si $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec r **strictement positif** alors $|z| = r$ et $\theta = \arg(z)[2\pi]$*

Exemple 18
Déterminer le module et l'argument principal du nombre complexe $z = -2\sqrt{3} + 2i$.

Proposition 11
Soit z et z' deux nombres complexes non nuls.

$$z = z' \Leftrightarrow |z| = |z'| \text{ et } \arg(z) = \arg(z')[2\pi]$$

Exemple 19
Déterminer la forme algébrique du nomnbre complexe z de module $\sqrt{5}$ et dont un argument est $\dfrac{2\pi}{3}$.

2 Propriétés des arguments

Proposition 12 (ROC)
Pour tous nombres complexes z et z' non nuls :

$$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')[2\pi] \qquad \arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)[2\pi]$$
$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')[2\pi] \qquad \arg\left(z^n\right) = n\arg(z)[2\pi], n \in \mathbb{Z}$$

Exemple 20

1. *Soit z et z' deux nombres complexes tels que :*

$$z = 3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) \text{ et } z' = 2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

Déterminer la forme algébrique de zz' et $\dfrac{z}{z'}$

2. *Déterminer une forme trigonométrique de $\dfrac{1}{1+i}$*
3. *Déterminer une forme trigonométrique de $(1+i)\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{4}\right)$*

VI Forme exponentielle d'un nombre complexe.

Définition 11
Pour tout réel θ, on note $e^{i\theta}$ le nombre complexe $\cos\theta + i\sin\theta$.

Remarque : $e^{i\theta}$ est donc le nombre complexe de module 1 et d'argument θ

Exemple 21
Déterminer les formes algébriques des nombres complexes suivants :

$$e^{i0}\ ;\ e^{i\frac{\pi}{2}}\ ;\ e^{7i\pi}\ ;\ e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

Théorème 5
Tout nombre complexe z non nul peut s'écrire sous la forme :

$$z = |z|e^{i\theta} \text{ avec } \theta \text{ un argument de } z$$

Cette écriture est appelée ***forme exponentielle*** *de z.*

Remarque : Le conjugué de $|z|e^{i\theta}$ est $|z|e^{-i\theta}$.

Propriété 5
Pour tout réel θ et θ' :

$$e^{i\theta}e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')} \qquad \frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$$
$$\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')} \qquad \left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}, n \in \mathbb{Z}$$

Remarque : Cette propriété est une simple transcription des propriétés vues pour les arguments.

Exemple 22

1. *Déterminer la forme exponentielle du nombre complexe $z = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i$.*
2. *Déterminer la forme algébrique du nombre complexe $Z = \dfrac{(1+i)^4}{(\sqrt{3}-i)^3}$.*

Théorème 6
Soit z un nombre complexe non nul.
*Si $z = re^{i\theta}$, avec r **strictement positif**, alors $|z| = r$ et $\theta = \arg(z)[2\pi]$*

Exemple 23
Déterminer le module et un argument du nombre complexe $z = -3e^{i\frac{\pi}{3}}$.

Proposition 13 (Formule d'Euler)
Pour tout nombre réel θ,

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \text{ et } \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Remarque : Les nombres $\cos\theta$ et $\sin\theta$ restent toutefois des réels.

Application 3
Question 4 de l'exercice 4 du sujet de BAC, france juin 2009 (cf. au dos)

VII Nombres complexes et géométrie.

Dans cette partie, on considère le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

1 Module et géométrie.

Proposition 14 (ROC)
Soit A et B deux points d'affixes respectives z_A et z_B, avec $A \neq B$.
On a alors :

$$AB = |z_B - z_A|$$

Application 4

1. *Déterminer et représenter l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M d'affixe z tels que :*

$$|z + i| = |z - \sqrt{3} + i|$$

2. *Déterminer et représenter l'ensemble $\mathscr{F}$ des points M d'affixe z tels que :*

$$|iz - 2| = 1$$

3. *Soit Γ le cercle de centre $\Omega(5; 0)$ et de rayon 5. Montrer que les points $A(5+5i)$, $B(1+3i)$ et $C(8-4i)$ sont des points du cercle Γ.*

2 Argument et géométrie.

Théorème 7 (ROC)
Soit A, B, C et D quatre points d'affixes respectives z_A, z_B, z_c et z_D avec $A \neq B$ et $C \neq D$.
On a alors :

$$\left(\vec{u}; \overrightarrow{AB}\right) = \arg\left(z_B - z_A\right)[2\pi] \text{ et } \left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}\right) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)[2\pi]$$

Exemple 24

1. *Soit A et B les points d'affixes respectives 1 et $2 + i\sqrt{3}$. Déterminer une mesure de l'angle orienté $\left(\vec{u}; \overrightarrow{AB}\right)$.*
2. *Soit A et B les points d'affixes respectives $5 + 3i$ et $5 - 8i$. Le triangle OAB est-il rectangle en O ?*

Application 5
Soit A, B, C trois points du plan complexe d'affixes respectives z_A, z_B et z_c avec A, B et C distincts deux à deux.
Démontrer que :

a) A, B et C sont alignés si et seulement si $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ est réel.

b) (AC) et (AB) sont perpendiculaires si et seulement si $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ est imaginaire pur.

VIII Quelques sujets de Bac.

Exercice 1 (France, juin 2009)

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $\left(O,\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$, *on associe à tout point* M *d'affixe* z *non nulle, le point* M' *milieu du segment* $[MM_1]$ *où* M_1 *est le point d'affixe* $\dfrac{1}{z}$.

Le point M' *est appelé l'image du point* M.

1. *Montrer que les distances* OM *et* OM_1 *vérifient la relation* $OM \times OM_1 = 1$ *et que les angles* $\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{OM_1}\right)$ *et* $\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{OM}\right)$ *vérifient l'égalité des mesures suivantes* $\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{OM_1}\right) = -\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{OM}\right)$ *à* 2π *près.*

2. **a.** *Justifier que pour tout nombre complexe* z *non nul, le point* M' *a pour affixe* $z' = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$.

b. *Soient* B *et* C *les points d'affixes respectives* $2i$ *et* $-2i$. *Calculer les affixes des points* B' *et* C' *images respectives des points* B *et* C.

c. *Placer les points* B, C, B' *et* C' *sur la figure donnée en annexe 2 (à rendre avec la copie).*

3. *Déterminer l'ensemble des points* M *tels que* $M' = M$.

4. Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Montrer que si le point M *appartient au cercle de centre* O *et de rayon 1 alors son image* M' *appartient au segment [KL] où K et L sont les points d'affixes respectives* -1 *et 1.*

Exercice 2 (Amérique du Sud, novembre 2006)

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $\left(O,\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$. *On prendra pour unité graphique 1 cm.*

On rappelle que : « Pour tout vecteur $\overrightarrow{w}$ *non nul, d'affixe* z *on a :* $|z| = \|\overrightarrow{w}\|$ *et* $\arg(z) = (\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{w})$ *».*
Soient M, N *et* P *trois points du plan, d'affixes respectives* m, n *et* p *tels que* $m \neq n$ *et* $m \neq p$.

1. *Démontrer que :* $\arg\left(\dfrac{p-m}{n-m}\right) = \left(\overrightarrow{MN},\ \overrightarrow{MP}\right)$.

2. *Interpréter géométriquement le nombre* $\left|\dfrac{p-m}{n-m}\right|$

Exercice 3 (Centres étrangers, juin 2007)

1. *Démontrer qu' un nombre complexe* z *est imaginaire pur si et seulement si* $\overline{z} = -z$.

2. *Démontrer qu'un nombre complexe* z *est réel si et seulement si* $\overline{z} = z$.

3. *Démontrer que pour tout nombre complexe* z, *on a l'égalité :* $z\overline{z} = |z|^2$.

Bilan : Les nombres complexes.

IX ROC

- ***Proposition 1 :*** Opérations sur les affixes.
- ***Proposition 3 :*** Conjugués, nombres réels et imaginaires purs.
- ***Proposition 5 :*** Opérations sur les conjugués.
- ***Proposition 6 :*** Opérations sur les modules.
- ***Proposition 8 :*** Arguments, nombres réels et imaginaires purs.
- ***Proposition 9 :*** Argument du conjugué et de l'opposé.
- ***Proposition 12 :*** Opérations sur les arguments.
- ***Proposition 13 :*** Modules et distances.
- ***Théorème 7 :*** Modules et arguments.

X Ce qu'il faut savoir faire.

- **Déterminer la partie réel et imaginaire d'un nombre complexe.**
  Exemple 2, Exercice 1 p. 278
- **Maîtriser les opérations sur les nombres complexes.**
  Exemples 5, 6, 7, 8, 9, Exercices 4 à 11 p.278
- **Résoudre une équation dans l'ensemble des nombres complexes.**
  Exercices 12 à 17 p.278
- **Déterminer l'affixe d'un point ou d'un vecteur représentés dans le plan**
  Exemple 10, Exercices 48 p.280
- **Déterminer les affixes de vecteurs connaissant les affixes de point.**
  Exemple 11 , Exercice 116 p.284
- **Maîtriser les opérations sur les affixes.**
  Exemple 12
- **Déterminer le conjugué d'un nombre complexe dont on connaît l'écriture algébrique.**
  Exemple 13 , Exercices 19, 20, 21, 22, 31, p. 278
- **Exprimer le conjugué de $f(z)$ en fonction du conjugué de z.**
  Exemple 14 , Exercices 32, 92, 93 p. 278-282
- **Déterminer le module d'un complexe connaissant sa forme algébrique.**
  Exemple 15 , Exercices 33, 34, 35 p. 279
- **Maîtriser les règles de calculs sur les modules.**
  Exercices 36 à 39 p. 279
- **Déterminer les arguments de nombres complexes connaisant leur écriture algébrique.**
  Exemple 16 , Exercices 49 à 52 p. 280
- **Déterminer la forme algébrique d'un nombre complexe connaissant son module et un argument.**
  Exemple 17 , Exercices 63 p. 280
- **Déterminer la forme trigonométrique d'un nombre complexe à partir de son écriture algébrique.**
  Exemple 18 , Exercices 62, 64 à 70 p. 280
- **Maîtriser les règles de calcul sur les arguments de nombres complexes.**
  Exercices 59 à 61, 65 à 70 p. 280
- **Déterminer l'écriture algébrique d'un nombre complexe connaissant son écriture exponentielle.**
  Exemple 21
- **Déterminer la forme exponentielle d'un nombre complexe dont on connaît l'écriture algébrique.**
  Exemple 22 , Exercices 71 à 80 p. 281
- **Passer par la forme exponentielle pour déterminer la forme algébrique d'un nombre complexe.**
  Exemple 22 , Exercices 78, 79, 82 p. 281
- **Déterminer la forme exponentielle d'un nombre complexe pour déterminer son module**

et un argument.

Exemple 23 , Exercices 77 p. 281

- **Déterminer un ensemble de points M d'affixes z tels que $f(z)$ soit réel ou imaginaire pur.**

  Application 1 , Exercices 28, 92, 93, 117 à 120 p. 122
- **Utiliser l'interprétation géométrique d'un module pour déterminer un ensemble de points.**

  Applications 2 et 3 , Exercices 40 à 45, p. 122
- **Utiliser l'interprétation géométrique d'un argument pour déterminer la mesure d'un angle orienté.**

  Exemple 24 , Exercices 56 à 58 p. 280
- **Utiliser l'interprétation géométrique d'un argument pour montrer que des droites sont parallèles ou perpendiculaires.**

  Application 4 , Exercices 108 p. 283
- **Utiliser l'interprétation géométrique d'un argument pour déterminer un ensemble de points.**

  Exercices 120 p. 285

XI Pour préparer le BAC

- Exercices A à G p. 288-289
- ***France, juin 2009 :*** Exercice 4.
- ***Liban, juin 2009 :*** Exercice 4.
- ***Antilles-Guyane, juin 2009 :*** Exercice 2, questions 1, 2 et 3.
- ***Pondichéry, avril 2009 :*** Exercice 2.

Chapitre 17

Applications des nombres complexes.

I Résolution dans $\mathbb{C}$ d'équations du second degré à coefficients réels.

Exemple 1

1. *Résoudre dans* $\mathbb{C}$ $z^2+4=0$.
2. *On considère l'équation* $(E)\ :\ z^2+z+1=0$.
   a. *Montrer que pour tout nombre complexe* z *:*

$$z^2+z+1=\left(z+\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{3}i}{2}\right)^2$$

   b. *En déduire les solutions dans* $\mathbb{C}$ *de* (E).

Théorème 1 (ROC)
Soit a, b *et* c *trois réels avec* a *non nul, et* $\Delta=b^2-4ac$ *le discriminant de l'équation* $az^2+bz+c=0$.

- *Si* $\Delta>0$ *alors l'équation* $az^2+bz+c=0$ *admet, dans* $\mathbb{C}$, *deux solutions réelles distinctes :*

$$z_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } z_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

- *Si* $\Delta=0$ *alors l'équation* $az^2+bz+c=0$ *admet, dans* $\mathbb{C}$, *une solution réelle :*

$$z_0=\frac{-b}{2a}$$

- *Si* $\Delta<0$ *alors l'équation* $az^2+bz+c=0$ *admet, dans* $\mathbb{C}$, *deux solutions complexes conjuguées :*

$$z_1=\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } z_2=\bar{z_1}=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Exemple 2
Résoudre dans $\mathbb{C}$, $z^2+3x+5=0$.

II Nombres complexes et transformations.

Dans cette partie, on considère le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$.

1 Translations.

Définition 1
Soit $\overrightarrow{w}$ *un vecteur du plan.*
La ***translation*** *de vecteur* $\overrightarrow{w}$ *est la transformation qui à tout point M du plan associe le point M' défini par*

$$\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{w}$$

On dit que M' est l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{w}$.

Proposition 1
Soit M et M' deux points du plan complexe, d'affixes respectives z et z', et $\overrightarrow{w}$ un vecteur du plan complexe, d'affixe $z_{\overrightarrow{w}}$.
M' est l'image de M par la ***translation de vecteur*** $\overrightarrow{w}$ *si et seulement si* $z' = z + z_{\overrightarrow{w}}$.

Définition 2
L'expression $z' = z + z_{\overrightarrow{w}}$ *est appelée l'****écriture complexe de la translation de vecteur*** $\overrightarrow{w}$ ***d'affixe*** $z_{\overrightarrow{w}}$.

Exemple 3
Déterminer la transformation dont $z' = z - 2 + i$ *est l'écriture complexe.*

2 Homothéties.

Définition 3
Soit Ω un point donné du plan et k un réel non nul fixé.
*L'****homothétie de centre*** Ω ***et de rapport*** k *est la transformation qui à tout point M du plan associe le point M' tel que :*

$$\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$$

Exemple 4
Sur la figure ci-dessous, construire le point M' image de M par l'homothétie de centre Ω et de rapport -2.

Remarque : le seul point invariant par une homothétie de centre Ω et de rapport k est Ω.

Proposition 2
Soit M et M' deux points du plan complexe, d'affixes respectives z et z', Ω un point du plan complexe d'affixe ω, et k un réel non nul.
*M' est l'image de M par l'****homothétie de centre*** Ω ***et de rapport*** k *si et seulement si* $z' - \omega = k(z - \omega)$.

Définition 4
L'expression $z' = k(z - \omega) + \omega$ *est appelée l'****écriture complexe de l'homothétie de centre le point*** Ω ***d'affixe*** ω ***et de rapport*** k.

Exemple 5

1. *Déterminer l'écriture complexe de l'homothétie de centre $\Omega(-1 + 3i)$ et de rapport 2.*
2. *Déterminer le point dont l'image par cette homothétie est O.*

3 Rotations.

Définition 5
Soit Ω un point du plan et θ un nombre réel.
La ***rotation de centre*** Ω ***et d'angle*** θ *est la transformation qui à tout point M du plan associe le point M' tel que :*

$$\Omega M = \Omega M' \text{ et } \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) = \theta[2\pi]$$

Proposition 3
Soit M et M' deux point du plan complexes, d'affixes respectives z et z', Ω un point d'affixe ω et θ un réel.
M' est l'image de M par la ***rotation de centre*** Ω ***et de d'angle*** θ *si et seulement si* $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$.

Définition 6
*L'expression $z' = e^{i\theta}(z - \omega) + \omega$ est appelée l'**écriture complexe de la rotation de centre le point Ω d'affixe ω et d'angle θ.***

Exemple 6
Déterminer la rotation dont $z' = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - 2 - i) + 2 + i$ est l'écriture complexe.

Exemple 7
Soit f la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$, et g la rotation de centre I d'affixe 1 et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

1. *Déterminer l'écriture complexe de f et celle de g.*

2. **a.** *Déterminer l'écriture complexe de $f \circ g$.*

b. *Démontrer que $f \circ g$ admet un unique point invariant, appelé J.*

c. *Démontrer que $f \circ g$ est un rotation de centre J dont on déterminera l'angle.*

Bilan : Applications des nombres complexes.

III ROC

- ***Théorème 1 :*** Solutions dans $\mathbb{C}$ de $az^2 + bz + c = 0$ avec $a \neq 0$.
- ***Propositions :*** Ecritures complexes des différents transformations.

IV Savoir Faire

- **Savoir résoudre dans $\mathbb{C}$ une équation du second degré.**
  Exemples 1 et 2, Exercices 1 à 8, 13, 14, 61, E p. 306-316
- **Savoir résoudre dans $\mathbb{C}$ une équation nécessitant un changement de variable.**
  Exercices 9, E p. 306-316
- **Savoir déterminer l'écriture complexe des différentes transformations (rotation, translation, homothéties...)**
  Exemples 5, 7 ,Exercices 41, 45, 51, E p. 306-316 France juin 2003
- **Savoir déterminer une transformation connaissant son écriture complexe.**
  Exemples 3, 6, 7, Exercices 36, 37, 38 p. 306-316
- **Savoir déterminer l'affixe de l'image d'un point par une transformation.**
  Exemples 3, Exercices 41, 45, 51, E p. 306-316 France juin 2003
- **Savoir déterminer l'affixe d'un point dont on connaît l'image par une transformation.**
  Exemples 5
- **Savoir construire l'image d'un point par une transformation.**
  Exemple 4, Exercice 45, France-juin 2003, Asie-juin 2007
- **Savoir déterminer le centre d'une rotation ou d'une homothétie (point invariant) connaissant son écriture complexe.**
  Exemple 7, Asie-juin 2007
- **Savoir déterminer l'angle d'une rotation connaissant son centre et l'image d'un point.**
  France, juin 2003, Asie-juin 2007
- **Savoir déterminer l'image d'un ensemble par une transformation.**
  France, juin 2003

V Pour préparer le BAC

- Exercice B p.316 (un peu compliqué), Exercice E p. 316 et Exercice F.
- ***Amérique du Nord, juin 2009 :*** Exercice 4.
- ***Pondichéry, avril 2009 :*** Exercice 2.
- ***Antilles-Guyane, septembre 2008 :*** Exercice 2. (p.242, Annabac Hatier)
- ***Pondichery, mars 2008 :*** Exercice 2.(p.256, Annabac Hatier)

Chapitre 18

Les nombres complexes - Sujets du Bac 2009

Exercice 1 (Amérique du NOrd, juin 2009)
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O,\ \vec{u}\ ,\ \vec{v}\right)$.

Soit A le point d'affixe $a = 1 + i\sqrt{3}$ *et B le point d'affixe* $b = 1 - \sqrt{3} + \left(1 + \sqrt{3}\right) i$.

Partie A : étude d'un cas particulier

On considère la rotation r *de centre O et d'angle* $\dfrac{2\pi}{3}$.

On note C le point d'affixe c *image du point A par la rotation* r *et D le point d'affixe* d *image du point B par la rotation* r.

La figure est donnée en annexe (figure 1).

1. a. *Exprimer* $\dfrac{-a}{b-a}$ *sous forme algébrique.*

b. *En déduire que OAB est un triangle rectangle isocèle en A.*

2. *Démontrer que* $c = -2$. *On admet que* $d = -2 - 2i$.

a. *Montrer que la droite (AC) a pour équation* $y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}(x+2)$.

b. *Démontrer que le milieu du segment [BD] appartient à la droite (AC).*

Partie B : étude du cas général

Soit θ *un réel appartenant à l'intervalle* $]0\ ;\ 2\pi[$. *On considère la rotation de centre O et d'angle* θ.

On note A' *le point d'affixe* a', *image du point A par la rotation* r, *et* B' *le point d'affixe* b', *image du point B par la rotation* r.

La figure est donnée en annexe (figure 2).

L'objectif est de démontrer que la droite (AA') *coupe le segment* $[BB']$ *en son milieu.*

1. *Exprimer* a' *en fonction de* a *et* θ *et* b' *en fonction de* b *et* θ.

2. *Soit P le point d'affixe* p *milieu de* $[AA']$ *et Q le point d'affixe* q *milieu de* $[BB']$.

a. *Exprimer* p *en fonction de* a *et* θ *puis* q *en fonction de* b *et* θ.

b. *Démontrer que* $\dfrac{-p}{q-p} = \dfrac{-a}{b-a}$.

c. *En déduire que la droite (OP) est perpendiculaire à la droite (PQ).*

d. *Démontrer que le point Q appartient à la droite* (AA').

Exercice 2 (Pondichéry, avril 2009)
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O,\ \vec{u}\ ,\ \vec{v}\right)$. *On prendra pour unité graphique 2 cm.*

Soit A, B et C les points d'affixes respectives :

$$a = 3 - i, \quad b = 1 - 3i \text{ et } c = -1 - i.$$

1. a. *Placer ces points sur une figure que l'on complètera au fur et à mesure.*

b. *Quelle est la nature du triangle ABC ?*

c. *Démontrer que les points A et B appartiennent à un même cercle* Γ *de centre O, dont on calculera le rayon.*

2. *Soit M un point quelconque du plan d'affixe notée m et N le point d'affixe notée n, image de A dans la rotation r de centre M et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$.*

a. *Donner l'écriture complexe de la rotation r.*

b. *En déduire une expression de n en fonction de m.*

3. *On appelle Q le milieu du segment [AN] et q son affixe.*

Montrer que : $q = \dfrac{(1-i)m}{2} + 2 + i$.

4. *Dans cette question, M est un point du cercle Γ.*

a. *Justifier l'existence d'un réel θ tel que : $m = \sqrt{10}e^{i\theta}$.*

b. *Calculer $|q-2-i|$. Quel est le lieu Γ' de Q lorsque M décrit le cercle Γ ?*

Exercice 3 (Antilles-Guyane, septembre 2008)
Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

1. *Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation díinconnue z :*

$$z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0.$$

2. *On considère les points A d'affixe $z_A = \sqrt{3} - i$, B d'affixe $z_B = \sqrt{3} + i$ et C le milieu de [OB] d'affixe z_C.*

a. *Déterminer la forme exponentielle de z_A, z_B et z_C.*

b. *Sur une figure, placer les points A, B et C, en prenant 2 cm pour unité.*

c. *Montrer que le triangle OAB est équilatéral.*

3. *Soit D l'image de C par la rotation r de centre O, d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et E l'image de D par la translation t de vecteur $2\vec{v}$.*

a. *Placer les points D et E sur une figure.*

b. *Montrer que l'affixe z_E du point E vérifie : $z_E = \frac{1}{2}\left[1 + i\left(4 - \sqrt{3}\right)\right]$.*

c. *Montrer que $OE = BE = \sqrt{5 - 2\sqrt{3}}$.*

4. *Montrer que les points A, C et E sont alignés.*

Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative , même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Exercice 4 (France, juin 2009)
Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on associe à tout point M d'affixe z non nulle, le point M' milieu du segment $[MM_1]$ où M_1 est le point d'affixe $\frac{1}{z}$.

Le point M' est appelé l'image du point M.

1. a. *Montrer que les distances OM et OM_1 vérifient la relation $OM \times OM_1 = 1$ et que les angles* $\left(\vec{u} \ ; \ \overrightarrow{OM_1}\right)$ et $\left(\vec{u} \ ; \ \overrightarrow{OM}\right)$ vérifient l'égalité des mesures suivantes $\left(\vec{u} \ ; \ \overrightarrow{OM_1}\right) = -\left(\vec{u} \ ; \ \overrightarrow{OM}\right)$ à 2π près.

b. *Sur la figure donnée en annexe 2 (à rendre avec la copie) le point A appartient au cercle de centre O et de rayon 2.*

Construire le point A′ image du point A. (On laissera apparents les traits de construction).

2. a. *Justifier que pour tout nombre complexe z non nul, le point M' a pour affixe $z' = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$.*

b. *Soient B et C les points d'affixes respectives 2i et −2i. Calculer les affixes des points B′ et C′ images respectives des points B et C.*

c. *Placer les points B, C, B′ et C′ sur la figure donnée en annexe 2 (à rendre avec la copie).*

3. *Déterminer l'ensemble des points M tels que $M' = M$.*

4. Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Montrer que si le point M appartient au cercle de centre O et de rayon 1 alors son image M′ appartient au segment [KL] où K et L sont les points d'affixes respectives −1 et 1.

Exercice 5 (Liban, juin 2009)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O,\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ *(unité graphique : 2 cm).*

On considère les points A, B et C d' affixes respectives :

$$z_A = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},\ z_B = \overline{z_A} \text{ et } z_C = -3.$$

Partie A

1. *Écrire les nombres complexes* z_A *et* z_B *sous forme exponentielle.*

2. *Placer les points A, B et C.*

3. *Démontrer que le triangle ABC est équilatéral.*

Partie B

Soit f *l'application qui, à tout point* M *du plan d'affixe* z*, associe le point* M' *d'affixe* $z' = \frac{1}{3}iz^2$*.*

On note O'*,* A'*,* B' *et* C' *les points respectivement associés par* f *aux points O, A, B et C.*

1.

a. *Déterminer la forme exponentielle des affixes des points* A'*,* B' *et* C'*.*

b. *Placer les points* A'*,* B' *et* C' *.*

c. *Démontrer l'alignement des points O, A et* B' *ainsi que celui des points O, B et* A'*.*

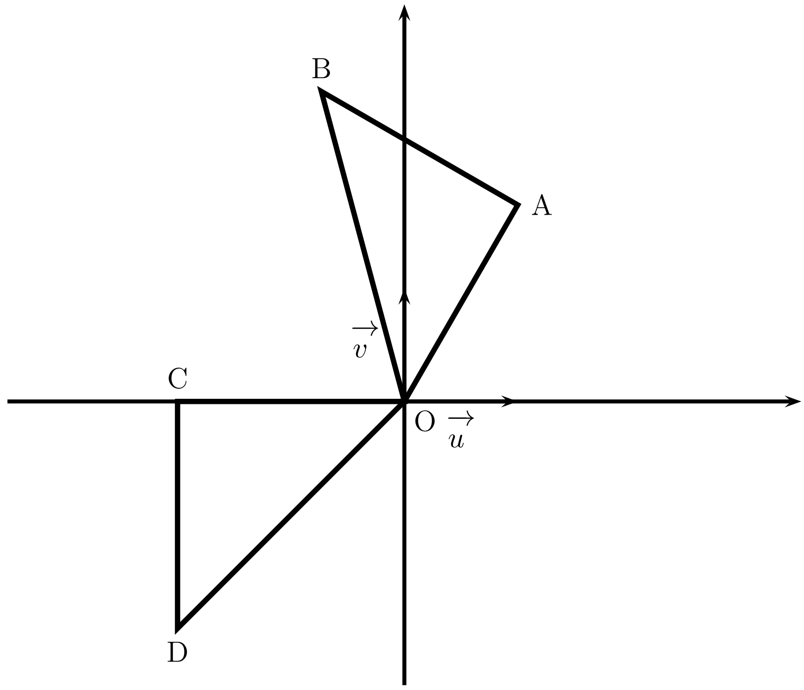
d. *Soit G l'isobarycentre des points O, A, B et C. On note* G' *le point associé à G par* f*.*
Déterminer les affixes des points G et G'*.*
Le point G' *est-il l'isobarycentre des points* O' A'*,* B' *et* C' *?*

2. *Démontrer que si* M *appartient à la droite (AB) alors* M' *appartient à la parabole d'équation* $y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{3}{4}$*. (On ne demande pas de tracer cette parabole)*

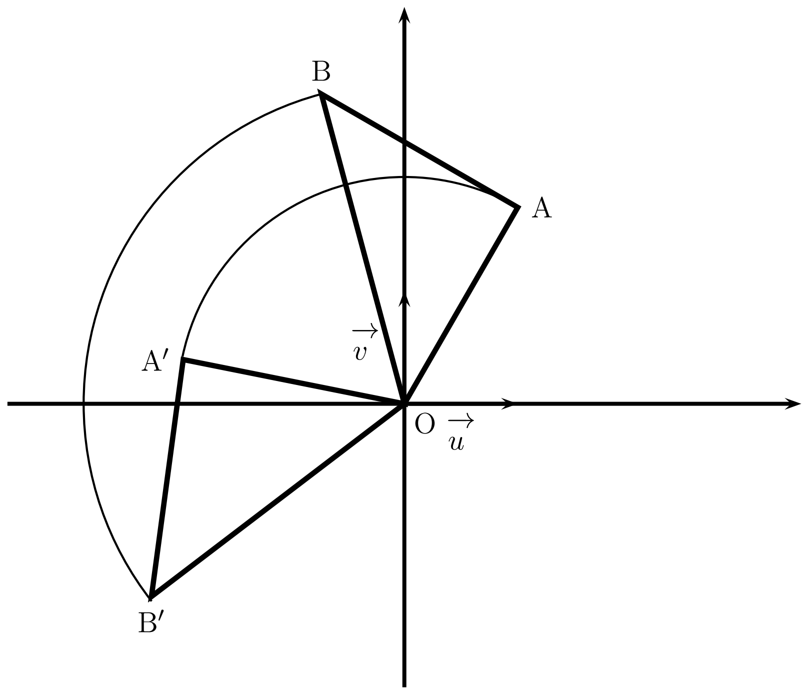
ANNEXE

Cette page ne sera pas à rendre avec la copie

Exercice 1



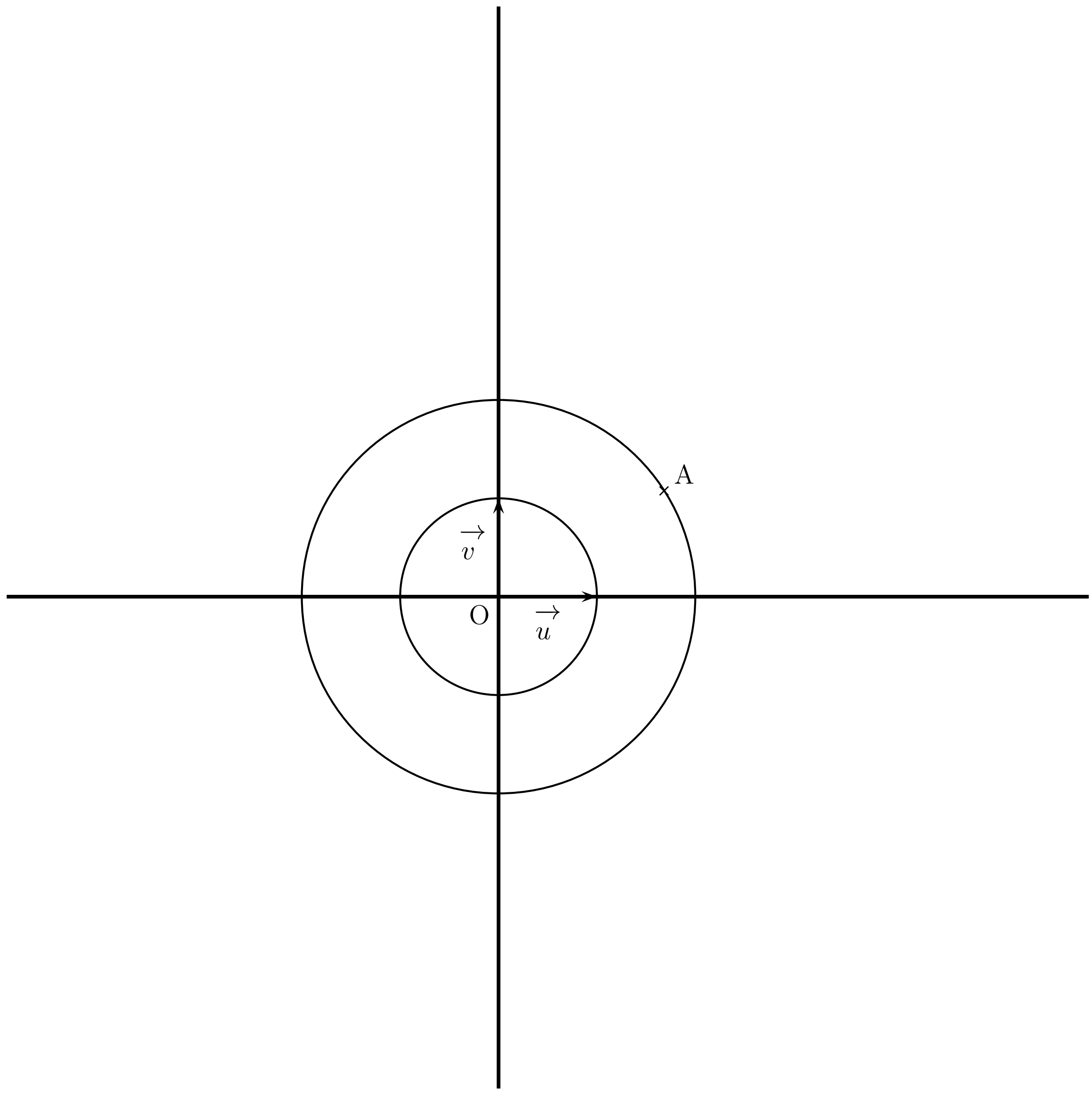
Partie A : figure 1



Partie B : figure 2

ANNEXE 2

Exercice 4
(À rendre avec la copie)



Cinquième partie

Géométrie dans l'espace

Chapitre 19

Produit scalaire dans l'espace.

I Produit scalaire : différentes définitions.

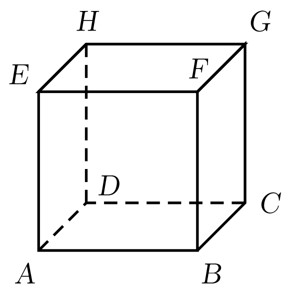
Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace et des points A, B et C tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$. Il existe au moins un plan $\mathscr{P}$ qui contient les trois points A, B et C. On définit alors le produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ comme étant le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ dans le plan $\mathscr{P}$.
Ce résultat est alors indépendant des représentants $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ et du plan $\mathscr{P}$ choisis.
Par conséquent, les définitions et théorèmes suivants seront énoncés dans le plan et dans l'espace sans distinction.

1 Définition du produit scalaire, orthogonalité.

Définition 1
Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan ou de l'espace.
*Le **produit scalaire** de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est le **nombre réel** noté $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$ et défini par*

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2\right)$$

Exemple 1
ABCDEFGH est un cube de centre O et d'arrête a. Exprimer $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{OC}$ en fonction de a.



Remarques :
- Si $\overrightarrow{u}$ ou $\overrightarrow{v}$ est nul alors $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$. Mais attention la réciproque n'est pas vraie.
- Pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ du plan ou de l'espace, $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u} = \|\overrightarrow{u}\|^2$.
  On note $\overrightarrow{u}^2 = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{u} = \|\overrightarrow{u}\|^2$. Le réel $\overrightarrow{u}^2$ est appelé le **carré scalaire** de $\overrightarrow{u}$.

Définition 2 (Vecteurs orthogonaux)
*Dire que deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ (du plan ou de l'espace) sont **orthogonaux** signifie :*
- *Soit que $\overrightarrow{u}$ ou $\overrightarrow{v}$ est nul.*
- *Soit que les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires avec $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$.*

Exemple 2
Sur la figure de l'exemple 1, déterminer deux vecteurs orthogonaux.

Théorème 1
*Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ du plan ou de l'espace sont **orthogonaux** si et seulement si $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$.*

2 Autres expressions du produit scalaire.

Produit scalaire dans une base orthonormée.

Théorème 2

- *Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan, de coordonnées respectives $(x;y)$ et $(x';y')$ dans un* ***repère orthonormé*** *du plan. Alors :*
$$\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$$
- *Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace, de coordonnées respectives $(x;y;z)$ et $(x';y';z')$ dans un* ***repère orthonormé*** *de l'espace. Alors :*
$$\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

Exemple 3
Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les vecteurs $\vec{u}(1;2;0)$ et $\vec{v}(2;-1;3)$.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils orthogonaux ?

Produit scalaire et angle.

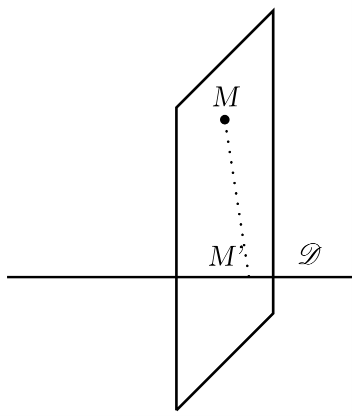
Définition 3
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs du plan ou de l'espace non nuls. On a alors :

$$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

Exemple 4
ABCDEFGH est le cube d'arête a représenté à l'exemple 1. Déterminer $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{DG}$.

Produit scalaire et projeté orthogonal.

Définition 4
Soit $\mathcal{D}$ une droite de l'espace.
La ***projection orthogonale sur la droite*** *$\mathscr{D}$ est l'application qui associe à tout point M de l'espace le point M' intersection de la droite $\mathscr{D}$ avec le plan perpendiculaire à $\mathscr{D}$ passant par M.*
M' est appelé le ***projeté orthogonal*** *de M sur $\mathscr{D}$.*



Exemple 5
Dans le cube ABCDEFGH de l'exemple 1, déterminer le projeté orthogonal de C sur (AB).

Remarques :
- Si M appartient à la droite $\mathscr{D}$, M est invariant par la projection orthogonale sur $\mathscr{D}$.
- La distance MM' est la distance de M à la droite $\mathscr{D}$.
- Si M appartient à un plan contenant la droite $\mathscr{D}$ alors M' est le point d'intersection de $\mathscr{D}$ et la droite perpendiculaire à $\mathscr{D}$ passant par M.

Théorème 3
Soit A, B et M trois points du plan ou de l'espace tels que A et B sont distincts. Si on note H le projeté orthogonal de M sur (AB), alors :
$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$$

Exemple 6
ABCDEFGH est le cube d'arête a de l'exemple 1, déterminer $\overrightarrow{CG}.\overrightarrow{BE}$ en fonction de a.

3 Propriétés algébriques.

Proposition 1
Soit $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs du plan ou de l'espace et k un réel.
On a les propriétés suivantes :
- ***Symétrie*** *:* $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}.\overrightarrow{u}$.
- ***Bilinéarité*** *:*
  - $(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}).\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{w}+\overrightarrow{v}.\overrightarrow{w}$ *et* $(k\overrightarrow{u}).\overrightarrow{v} = k(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v})$
  - $\overrightarrow{u}.(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w}$ *et* $\overrightarrow{u}.(k\overrightarrow{v}) = k(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v})$

Exemple 7
ABCDEFGH est le cube des exemples précédents.

1. *Calculer $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{CH}$ et $\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{HE}$.*
2. *En déduire $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{CE}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{CE}$ sont -ils orthogonaux ?*

Proposition 2 (Identités remarquables.)
Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$:

$$\begin{aligned}
(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}).(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}) &= \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2\\
(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})^2 &= \|\overrightarrow{u}\|^2 + 2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \|\overrightarrow{v}\|^2\\
(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v})^2 &= \|\overrightarrow{u}\|^2 - 2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \|\overrightarrow{v}\|^2
\end{aligned}$$

On obtient alors :

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\|^2\right)$$

Exemple 8
Dans le cube ABCDEFGH des exemples précédents, déterminer $\overrightarrow{OH}.\overrightarrow{OF}$

II Application du produit scalaire.

1 Applications du produit scalaire dans le plan : rappels de première.

Equation cartésienne de droite.

Définition 5 (Vecteur normal)
*Dire qu'un vecteur $\overrightarrow{n}$, non nul, est **normal** à une droite d signifie que la direction de $\overrightarrow{n}$ est orthogonale à celle de d.*

Proposition 3 (Caractérisation d'une droite)
A est un point du plan et $\overrightarrow{n}$ est un vecteur non nul.
- *L'ensemble des points M du plan vérifiant $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = 0$ est la droite passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{n}$.*
- *Dans un **repère orthnormé**, une droite de vecteur normal $\overrightarrow{n}(a;b)$ a une équation de la forme $ax+by+c=0$, avec $c \in \mathbb{R}$.*
  Réciproquement, toute équation de la forme $ax+by+c=0$ est l'équation d'une droite de vecteur normal $\overrightarrow{n}(a;b)$

Exemple 9
Dans un repère orthonormal du plan, on considère les points $A(3;-1)$ et B(2 ;4). Déterminer une équation de la médiatrice du segment [AB].

Proposition 4 (Droites perpendiculaires.)
Dans un repère orthonormal du plan, deux droites d'équations respectives $ax+by+c=0$ et $a'x+b'y+c'=0$ sont perpendiculaires si et seulement si $aa'+bb'=0$.

Exemple 10
Dans un repère orthonormé du plan, on considère les droites

$$d \ : \ -2x + y + 5 = 0 \text{ et } d' \ : \ -3x - 6y + 1 = 0$$

d et d' sont-elles perpendiculaires ?

Définition 6 (Distance d'un point à une droite)
Soit d une droite du plan et M un point quelconque du plan.
On appelle distance du point M à la droite d la distance MH, où H est le projeté orthogonal de M sur d.

Proposition 5 (Distance d'un point à une droite)
Dans un repère orthonormé du plan, on considère la droite d d'équation $ax + by + c = 0$ et M_0 le point de coordonnées $(x_0; y_0)$.
La distance du point M_0 à la droite d est égale à

$$\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Exemple 11
Dans un repère orthonormé du plan, on considère la droite d d'équation $-2x + y + 5 = 0$ et M le point de coordonnées $(-3; 1)$.
Déterminer la distance de M à d.

Cercles et produit scalaire.

Proposition 6 (Caractérisation d'un cercle.)
Le cercle $\mathcal{C}$ de diamètre [AB] est l'ensemble des points M tels que

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$$

Proposition 7 (Equation d'un cercle dans un repère orthonormé.)
Dans un repère orthonormé, $\mathcal{C}$ est le cercle de centre $A(x_A; y_A)$ et de rayon r.
Une équation du cercle $\mathcal{C}$ est :

$$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = r^2$$

Exemple 12
Dans un repère orthonormé $\left(O, \ \overrightarrow{\imath}, \ \overrightarrow{\jmath}\right)$, déterminer l'équation du cercle de centre $\Omega(3; 2)$ et de rayon 4.

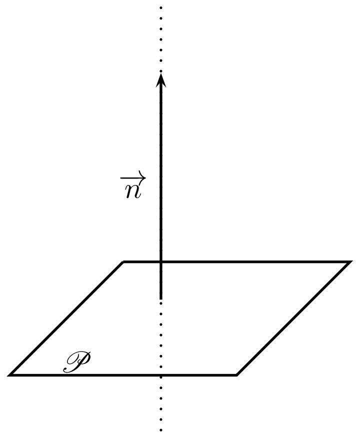
2 Applications du produit scalaire dans l'espace.

Equation cartésienne d'un plan.

Proposition 8 (Rappels.)
- *Une droite est orthogonale à un plan lorsqu'elle est orthogonale à toute droite de ce plan.*
- *Une droite est orthognale à un plan si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.*

Exemple 13
Dans le cube ABCDEFGH des premiers exemples, citer une droite et un plan orthogonaux.

Définition 7
Un vecteur non nul $\overrightarrow{n}$ est dit ***normal à un plan*** *$\mathscr{P}$ lorsque sa direction est orthogonale à $\mathscr{P}$.*

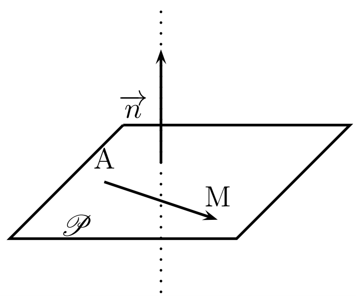


Exemple 14
Dans le cube ABCDEFGH des exemples précédents, citer un vecteur normal à un plan.

Remarques :
- Si A est un point du plan $\mathscr{P}$, $\overrightarrow{n}$ est normal à $\mathscr{P}$ si et seulement si la droite passant par A et dirigée par $\overrightarrow{n}$ est orthogonale à $\mathscr{P}$.
- Il existe une infinité de vecteurs normaux à un plan, tous colinéaires entre eux.
- Deux plans sont parallèles si et seulement si ils admettent des vecteurs normaux colinéaires.
- Un vecteur $\overrightarrow{n}$ est normal au plan (ABC) si et seulement si $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{AC}$

Exemple 15
Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(-2;1;3)$, $B(1;-2;2)$ et $C(4;1;-4)$.
Montrer que $\overrightarrow{n}(7;5;6)$ est normal au plan (ABC).

Théorème 4
Soit A un point de l'espace et $\overrightarrow{n}$ un vecteur non nul, l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n}=0$ est la plan passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{n}$.



Exemple 16
Trouver dans un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$ une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ passant par $A(2;1;-3)$ dont un vecteur normal est $\overrightarrow{n}(1;1;2)$.

Exemple 17
Soit A et B deux points distincts de l'espace et I le milieu de [AB].
Déterminer l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB}=0$.

Théorème 5 (Equation cartésienne d'un plan dans un repère orthonormé.)
*Soit un repère **orthonormé** de l'espace. Soit a, b, c et d quatre réels avec a, b et c non tous nuls.*
- *Tout plan $\mathscr{P}$ de l'espace dont $\overrightarrow{n}(a;b;c)$ est un vecteur normal admet une équation, appelée équation cartésienne, de la forme :*
$$ax+by+cz+d=0$$
- *Réciproquement, toute équation de la forme $ax+by+cz+d=0$ est l'équation d'un plan $\mathscr{P}$ de vecteur normal $\overrightarrow{n}(a;b;c)$*

Exemple 18 (Suite de l'exemple 15)
Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(-2;1;3)$, $B(1;-2;2)$ et $C(4;1;-4)$.

1. *A l'aide de l'exemple 15, déterminer une équation de (ABC).*
2. *Déterminer une équation du plan $\mathscr{P}$ passant par A et orthogonal à la droite (BC).*
3. *Déterminer une équation du plan, $\mathscr{Q}$, plan médiateur de [BC] (plan orthogonal à [BC] et passant par son milieu)*

Exemple 19
Déterminer les équations des plans de coordonnées $(x0y)$, (yOz) et (xOz).

Théorème 6
Si $(a;b;c) \neq (0;0;0)$, l'ensemble des points $M(x;y;z)$ tels que $ax+by+cz+d>0$ (ou $ax+by+cz+d<0$) est un demi-espace ouvert de frontière le plan $\mathscr{P}$ d'équation $ax+by+cz+d=0$.

Distance d'un point à un plan.

Proposition 9 (Projeté orthogonal d'un point sur un plan)
Soit M un point et $\mathscr{P}$ un plan de l'espace.
Il existe une unique droite orthogonale à $\mathscr{P}$ passant par M; cette droite coupe $\mathscr{P}$ en un point H, appelé projeté orthogonal de M sur $\mathscr{P}$.

Remarque : H est le projeté orthogonal de M sur $\mathscr{P}$ si et seulement si $M \in \mathscr{P}$ et $\overrightarrow{MH}$ est normal à $\mathscr{P}$.

Définition 8 (Distance d'un point à un plan.)
On appelle distance d'un point M au plan $\mathscr{P}$ la distance MH où H est le projeté orthogonal de M sur $\mathscr{P}$.

Remarque : La distance du point M au plan $\mathscr{P}$ est souvent notée $d\,(M;\mathscr{P})$.

Théorème 7
Dans un repère orthonormé, on considère le point $M\,(x_0;y_0;z_0)$ et le plan $\mathscr{P}$ d'équation $ax+by+cz+d=0$. La distance de M à $\mathscr{P}$ est alors égale à

$$d\,(M;\mathscr{P}) = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Exemple 20
Dans un repère orthonormé $\left(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$, on considère les points $A(1;1;2)$ et le plan $\mathscr{P}\ :\ 2x-2y+z-3=0$.

1. *Déterminer la distance du point A au plan $\mathscr{P}$.*
2. *Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal de A sur $\mathscr{P}$.*

Equation d'une sphère.

Théorème 8
Dans un repère orthonormé, toute sphère de centre $\Omega\,(x_0;y_0;z_0)$ et de rayon R a pour équation

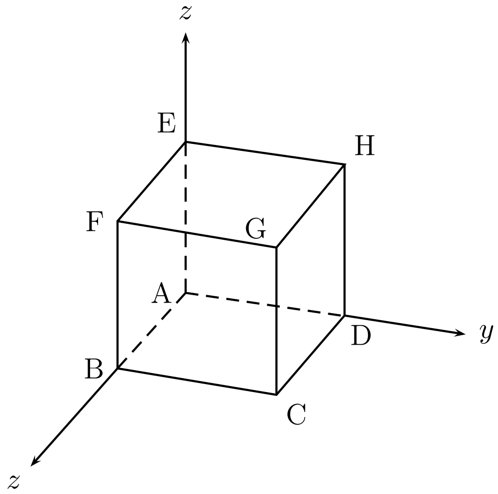
$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$$

Exemple 21
Déterminer l'équation de la sphère de diamètre $[AB]$ avec $A(0;0;-1)$ et $B(1;2;-3)$.

III Exercice de Bac

Exercice 3 — **Nouvelle Calédonie, novembre 2009**

L'espace est rapporté au repère orthononnal $\left(\mathrm{A}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \overrightarrow{\mathrm{AD}},\ \overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$.
On considère le cube ABCDEFGH représenté ci-dessous :



On désigne par I, J et K les milieux respectifs des segments [BC], [BF] et [HF].

1. Déterminer les coordonnées des points I, J et K.

2. Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{n}(2\ ;\ 1\ ;\ 1)$ est orthogonal à $\overrightarrow{\mathrm{IK}}$ et à $\overrightarrow{\mathrm{IJ}}$.
En déduire qu'une équation du plan (IJK) est : $4x + 2y + 2z - 5 = 0$.

3. Tracer sur la figure la section du cube par le plan (IJK). On peut répondre à cette question sans avoir traité les précédentes.

4. **a.** Montrer que la distance du point G au plan (IJK) est $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$.

b. Soit $\mathcal{S}$ la sphère de centre G passant par F.
Justifier que la sphère $\mathcal{S}$ et le plan (IJK) sont sécants.
Déterminer le rayon de leur intersection.

Chapitre 20

Barycentre - Droites et plans de l'espace.

I Barycentre de n points pondérés.

Théorème 1 (Existence)
Soit $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n$ n points de l'espace et $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n$ n réels.
Si $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \neq 0$ alors il existe un unique point G tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0}$, c'est-à-dire

$$\alpha_1\overrightarrow{GA_1} + \alpha_2\overrightarrow{GA_2} + \ldots + \alpha_n\overrightarrow{GA_n} = \overrightarrow{0}$$

G est appelé le **barycentre du système de points pondérés** $\{(A_1;\alpha_1)\ ;\ (A_2;\alpha_2)\ ;\ \ldots\ ;\ (A_n;\alpha_n)\}$.

Remarques :
- On peut noter $G = bar\,\{(A_1;\alpha_1)\ ;\ (A_2;\alpha_2)\ ;\ \ldots\ ;\ (A_n;\alpha_n)\}$.
- Lorsque $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n$, on dit que G est l'**isobarycentre** du système $\{(A_1,\alpha_1)\ ;\ (A_2,\alpha_2)\ ;\ \ldots\ ;\ (A_n,\alpha_n)\}$
- $m = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\alpha_i$ est appelé la masse du système de points pondérés $\{(A_1;\alpha_1)\ ;\ (A_2;\alpha_2)\ ;\ \ldots\ ;\ (A_n;\alpha_n)\}$.

Exemple 1
A, B et C sont trois points de l'espace.
Soit G le point tel que $5\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{CA}$.
Montrer que G est le barycentre du système $\{(A;4);(B;-2);(C;1)\}$.

Théorème 2
Soit $A_1,\ A_2,\ \ldots\ ;\ A_n$ n points de l'espace et $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n$ n réels tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \neq 0$. On note G le barycentre du système $\{(A_1;\alpha_1)\ ;\ (A_2;\alpha_2)\ ;\ \ldots\ ;\ (A_n;\alpha_n)\}$.
Pour tout point M, on a

$$\alpha_1\overrightarrow{MA_1} + \alpha_2\overrightarrow{MA_2} + \ldots + \alpha_n\overrightarrow{MA_n} = (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)\,\overrightarrow{MG}$$

Exemple 2
Construire le barycentre G du système $\{(A;-2);(B;1);(C;3)\}$.

Remarques
- Si G est le barycentre du système $\{(A;\alpha);(B;\beta)\}$, on a alors :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\,\overrightarrow{AB}$$

- Si G est le barycentre du système $\{(A;\alpha);(B;\beta);(C;\gamma)\}$, on a alors :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\,\overrightarrow{AB} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\,\overrightarrow{AC}$$

- Le résultat du théorème précédent permet de transformer la somme de n vecteurs en un seul vecteur. Ceci facilite, par exemple, la recherche de lieux géométriques (cf application suivante).

Application 1 (Recherche de lieux géométriques.)
A, B et C sont trois points de l'espace.
Déterminer l'ensemble des points M tels que :

1. $\left\|3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = \left\|\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}\right\|$
2. $\left\|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = \left\|\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right\|$

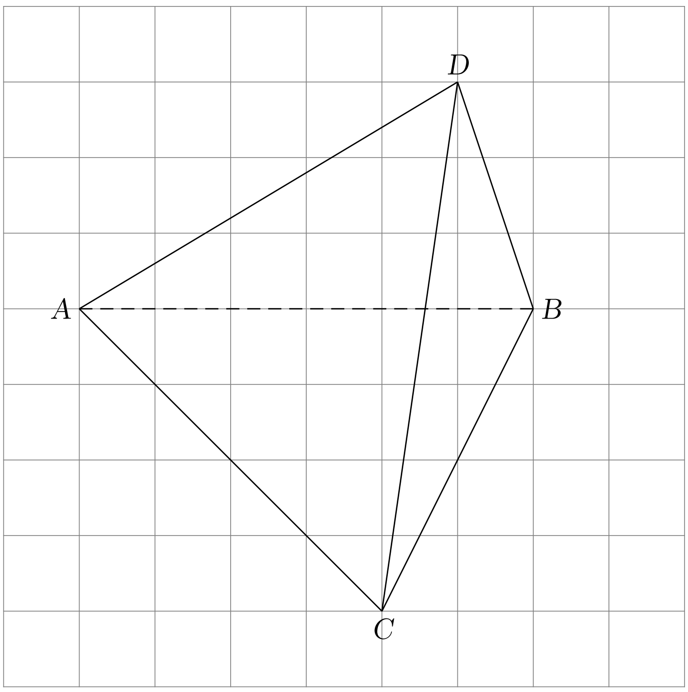
Propriété 1
Soit A_1, A_2, $\ldots$; A_n n points de l'espace et α_1, α_2, $\ldots$, α_n n réels tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \neq 0$. On note G le barycentre du système $\{(A_1;\alpha_1)\ ;\ (A_2;\alpha_2)\ ;\ \ldots\ ;\ (A_n;\alpha_n)\}$.

- ***Homogénéité.***
  Le barycentre reste inchangé si l'on multiplie tous les coefficients par le même réel non nul, c'est-à-dire :

  $$G = bar\{(A_1;\alpha_1)\ ;\ (A_2;\alpha_2)\ ;\ \ldots\ ;\ (A_n;\alpha_n)\} \Leftrightarrow G = bar\{(A_1;k\alpha_1)\ ;\ (A_2;k\alpha_2)\ ;\ \ldots\ ;\ (A_n;k\alpha_n)\},\ k \neq 0$$

- ***Associativité.***
  On ne change pas le barycentre de plusieurs points en remplaçant certains d'entre eux par leur barycentre affecté de la somme (non nulle) de plusieurs coefficients.
  Par exemple, si $G = bar\{(A_1;\alpha_1)\ ;\ (A_2;\alpha_2)\ ;\ (A_3;\alpha_3);\ (A_4;\alpha_4)\}$ avec $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 \neq 0$ alors
  $G = bar\{(G';\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3);\ (A_4;\alpha_4)\}$ où G'=$bar\{(A_1;\alpha_1)\ ;\ (A_2;\alpha_2)\ ;\ (A_3;\alpha_3)\}$

Exemple 3
$ABCD$ est le tétraèdre ci-dessous. On note G le barycentre du système $\{(A;1);(B;1);(C;1);(D;3)\}$.
Construire G.



Propriété 2 (Coordonnées et affixes.)
Soit A_1, A_2, $\ldots$; A_n n points de l'espace et α_1, α_2, $\ldots$, α_n n réels tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \neq 0$. On note G le barycentre du système $\{(A_1;\alpha_1)\ ;\ (A_2;\alpha_2)\ ;\ \ldots\ ;\ (A_n;\alpha_n)\}$.

- *Coordonnées :*
  Les coordonnées du barycentre G sont les moyennes pondérées des coordonnées des points du système.
  Dans un repère $\left(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$ de l'espace, on note $(x_i;y_i;z_i)$ les coordonnées des points A_i, $1 \leq i \leq n$.
  On a alors :

$$G\left(\frac{\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\ldots+\alpha_nx_n}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\alpha_i};\frac{\alpha_1y_1+\alpha_2y_2+\ldots+\alpha_ny_n}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\alpha_i};\frac{\alpha_1z_1+\alpha_2z_2+\ldots+\alpha_nz_n}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}\right)$$

- ***Affixe*** *:*
  Dans la plan complexe, on note z_G l'affixe de G et z_i les affixes des points A_i, $1 \leq i \leq n$.
  On a alors
  $$z_G = \frac{\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \ldots + \alpha_n z_n}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}$$

Exemple 4 (Pondichéry, avril 2010)
Dans le repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ de l'espace, on considère les points $A(-1;1;3)$, $B(2;1;0)$ et $C(4;-1;5)$. Peut-on écrire C comme barycentre des points A et B ?

II Caractérisations barycentriques des droites et plans.

Théorème 3
Soit A et B deux points de l'espace. On considère le système $\{(A;\alpha);(B;\beta)\}$.
- *La **droite (AB)** est l'**ensemble de tous les barycentres** du système $\{(A;\alpha);(B;\beta)\}$.*
- *Le **segment [AB]** est l'**ensemble de tous les barycentres** du système $\{(A;\alpha);(B;\beta)\}$ avec α et β de **même signe**.*

Remarque :
Si G est le barycentre du système $\{(A;\alpha);(B;\beta)\}$ alors ***G, A et B sont alignés***. Par conséquent, pour montrer que 3 points de l'espace sont alignés, il suffit de démontrer que l'un des points est barycentre des deux autres.

Théorème 4
Soit A, B et C trois points de l'espace. On considère le système $\{(A;\alpha);(B;\beta);(C,\gamma)\}$.
- *Le **plan (ABC)** est l'**ensemble de tous les barycentres** du système $\{(A;\alpha);(B;\beta);(C,\gamma)\}$.*
- *Le triangle ABC est l'**ensemble de tous les barycentres** du système $\{(A;\alpha);(B;\beta);(C,\gamma)\}$ avec α, β et γ de **même signe**.*

Remarque :
Si G est le barycentre du système $\{(A;\alpha);(B;\beta);(C,\gamma)\}$ alors ***G, A, B et C sont coplanaires***. Par conséquent, pour montrer que 4 points de l'espace sont coplanaires, il suffit de démontrer que l'un des points est barycentre des trois autres.

III Représentation paramétrique d'une droite.

Dans un repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère la droite $\mathscr{D}$ passant par le point $A\left(x_A;y_A;z_A\right)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} M(x;y;z)\in\mathscr{D} \quad & \text{si et seulement si} \quad \overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{u} \text{ sont colinéaires} \\ & \text{si et seulement si} \quad \text{il existe un réel } t \text{ tel que } \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{u} \\ & \text{si et seulement si} \quad \begin{cases} x - x_A = at \\ y - y_A = bt \\ z - z_A = ct \end{cases} \\ & \text{si et seulement si} \quad \begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases} \end{aligned}$$

Définition 1
*On appelle **représentation paramétrique** ou **système d'équations paramétriques** de la droite $\mathscr{D}$ passant par $A\,(x_A; y_A; z_A)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ le système*

$$\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases}, \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

*Le réel t est appelé **paramètre**.*

Remarques :

- Un point M appartient à la droite $\mathscr{D}$ si et seulement si il existe un réel t tel que les coordonnées de M vérifie le système d'équations paramétriques de $\mathscr{D}$.
- Réciproquement, si une droite a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \\ z = z_0 + \gamma t \end{cases}$, alors cette droite passe par le point $M_0\,(x_0; y_0; z_0)$ et admet pour vecteur directeur $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$.

Exemple 5
On considère la droite $\mathscr{D}$ passant par $A(1;2;-1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. *Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite $\mathscr{D}$.*

2. *Le point $B(3;1;1)$ appartient-il à $\mathscr{D}$?*

3. *On considère la droite $\mathscr{D}'$ dont une représentation paramétrique est* $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 + t \\ z = -t \end{cases}$.

$\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont-elles perpendiculaires ?

Application 2 (D'après Polynésie, septembre 2009)
Dans un repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation $4x+2y+z-8=0$ et le point D(0;0;1).
On note H le projeté orthogonal de D sur $\mathscr{P}$.

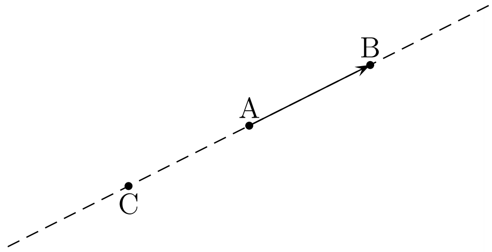
1. *Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite (DH).*

2. *Déterminer les coordonnées du point H.*

Remarques : cas des demi-droites et des segments.

Soit $\mathscr{D}$ la droite passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{u}$.
On note B le point défini par $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et C le point défini par $\overrightarrow{AC} = -\vec{u}$.

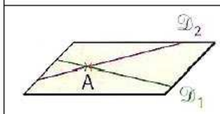
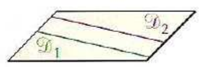
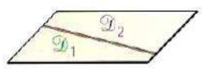
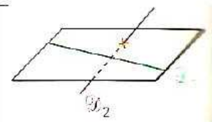
- Pour caractériser la demi-droite $[AB)$, on limite les valeurs du paramètre t à l'intervalle $[0;+\infty[$.
- Pour caractériser la demi-droite $[AC)$, on limite les valeurs du paramètre t à l'intervalle $]-\infty;0]$.
- Pour caractériser le segment $[AB]$, on limite les valeurs du paramètre t à l'intervalle $[0;1]$.



IV Positions relatives de droites et plans de l'espace.

1 Intersection (éventuelle) de deux droites de l'espace.

Rappel : position relative de deux droites de l'espace.

Positions relatives de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$			
Coplanaires			Non coplanaires
sécantes	strictement parallèles	confondues	
			
un point commun unique	pas de point commun	tous les points sont communs	il n'existe pas de plan contenant les deux droites

Méthode pour déterminer l'intersection éventuelle de deux droites de l'espace :
$\mathscr{D}_1$ est une droite de vecteur directeur $\vec{u}_1$ et $\mathscr{D}_2$ est une droite de vecteur directeur $\vec{u}_2$

- Si $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont colinéaires :
  - Si $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ n'ont aucun point commun alors $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont strictement parallèles.
  - Si $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ ont un point commun alors $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont confondues.
- Si $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ ne sont pas colinéaires :
  - Si $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ n'ont aucun point commun alors $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ ne sont pas coplanaires.
  - Si $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ ont un point commun alors $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont sécantes.

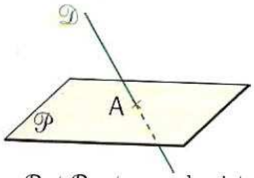
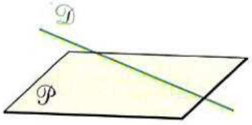
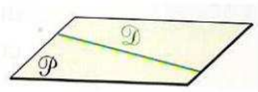
Exemple 6
Dans un repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ de l'espace, on considère les droites $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$ et $\mathscr{D}_3$ de représentations paramétriques :

$$\mathscr{D}_1 : \begin{cases} x = -1+2t \\ y = 4t \\ z = 5-3t \end{cases} \; t \in \mathbb{R} \qquad \mathscr{D}_2 : \begin{cases} x = -6t+8 \\ y = -12t+1 \\ z = 9t-2 \end{cases} \; t \in \mathbb{R} \qquad \mathscr{D}_3 : \begin{cases} x = t+6 \\ y = 3t-1 \\ z = -2t+2 \end{cases} \; t \in \mathbb{R}$$

Etudier les positions relatives de $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ puis de $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_3$.

2 Intersection (éventuelle) d'une droite et d'un plan.

Rappel : position relative d'une droite et d'un plan.

<table>
<tr><th colspan="3">Positions relatives de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$</th></tr>
<tr><td>sécants</td><td colspan="2">parallèles</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ ont un seul point commun</td><td>$\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ n'ont aucun point commun</td><td>$\mathcal{D}$ est incluse dans le plan $\mathcal{P}$.</td></tr>
</table>

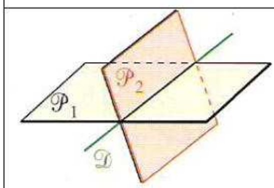
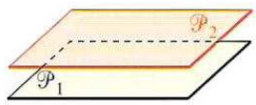
Méthode pour déterminer l'intersection éventuelle d'une droite et d'un plan :
$\mathscr{D}$ est une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ et $\mathscr{P}$ est un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n}$.

- Si $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{u}$ ne sont pas orthogonaux, c'est-à-dire $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{u} \neq 0$ alors $\mathscr{D}$ et $\mathscr{P}$ sont sécants en un point.
- Si $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{u}$ sont orthogonaux, c'est-à-dire $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{u} = 0$, et si A est un point quelconque de $\mathscr{D}$:
  - Si $A \in \mathscr{P}$, alors $\mathscr{D}$ est incluse dans $\mathscr{P}$.
  - Si $A \notin \mathscr{P}$, alors $\mathscr{D}$ est strictement parallèle au plan $\mathscr{P}$.

Exemple 7 (D'après Pondichéry, avril 2010)
On considère la droite $\mathscr{D}$ de représentation paramétrique $\begin{cases} x = t+2 \\ y = -2t \\ z = 3t-1 \end{cases}$, *$t \in \mathbb{R}$ et la plan $\mathscr{P}$ d'équation* $x + 2y + z - 3 = 0$.
Etudier la position relative de $\mathscr{P}$ et $\mathscr{D}$.

3 Intersection de deux plans.

Rappel : position relative de deux plans.

<table>
<tr><th colspan="3">Positions relatives des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$</th></tr>
<tr><td rowspan="2">sécants</td><td colspan="2">parallèles</td></tr>
<tr><td>confondus</td><td>strictement parallèles ou disjoints</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>leur intersection est la droite $\mathcal{D}$</td><td>leur intersection est un plan</td><td>leur intersection est vide</td></tr>
</table>

Méthode pour déterminer l'intersection éventuelle de deux plans :
$\mathscr{P}$ est un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n}$ et $\mathscr{P}'$ est un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n'}$.

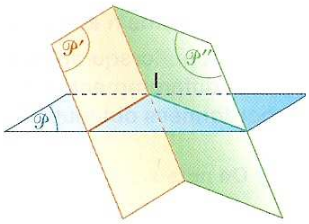
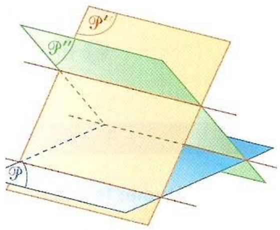
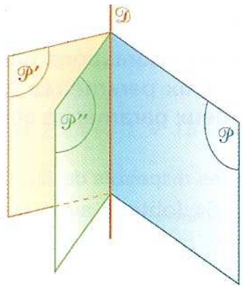
- Si $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ ne sont pas colinéaires alors $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont sécants suivant une droite $\mathscr{D}$
- Si $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ sont colinéaires et si A est un point quelconque de $\mathscr{P}$:
  - Si $A \in \mathscr{P}'$, alors $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont condondus.
  - Si $A \notin \mathscr{P}'$, alors $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont est strictement parallèles.

Exemple 8
Soit $\mathscr{P}$ la plan d'équation $2x - y - 2z - 1 = 0$ et $\mathscr{P}'$ le plan d'équation $-x + 4y + z - 3 = 0$.
Déterminer l'intersection éventuelle des plans $\mathscr{P}$ et *$\mathscr{P}'$.*

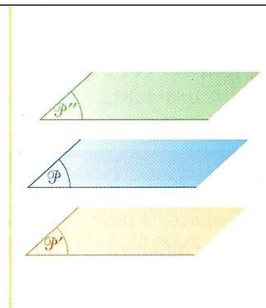
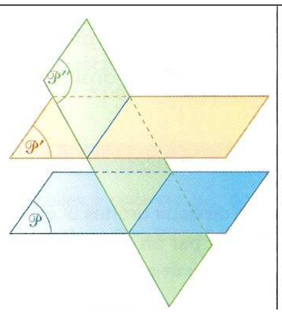
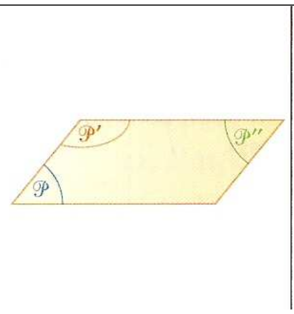
4 Intersection de trois plans.

Position relative de trois plans $\mathscr{P}$, $\mathscr{P}'$ et $\mathscr{P}''$

- Si $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont sécants suivant une droite $\mathscr{D}$.

<table>
<tr><td>Si $\mathscr{P}''$ et $\mathscr{D}$ sont sécants.</td><td>Si $\mathscr{P}''$ et $\mathscr{D}$ strictement parallèles.</td><td>Si $\mathscr{D}$ est incluse dans $\mathscr{P}''$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Leur intersection est un point
$\mathscr{P} \cap \mathscr{P}' \cap \mathscr{P}'' = \{I\}$</td><td>Leur intersection est vide :
$\mathscr{P} \cap \mathscr{P}' \cap \mathscr{P}'' = \emptyset$</td><td>Leur intersection est la droite $\mathscr{D}$:
$\mathscr{P} \cap \mathscr{P}' \cap \mathscr{P}'' = \mathscr{D}$</td></tr>
</table>

- Si $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont parallèles.

<table>
<tr><td colspan="2">Si $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont strictement parallèles.</td><td>Si $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont confondus</td></tr>
<tr><td>Si $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}''$ sont strictement parallèles</td><td>Si $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}''$ sont sécants</td><td>Si $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}''$ sont confondus.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Leur intersection est vide :
$\mathscr{P} \cap \mathscr{P}' \cap \mathscr{P}'' = \emptyset$</td><td>Leur intersection est vide :
$\mathscr{P} \cap \mathscr{P}' \cap \mathscr{P}'' = \emptyset$</td><td>Ils sont confondus.
$\mathscr{P} \cap \mathscr{P}' \cap \mathscr{P}'' = \mathscr{P} = \mathscr{P}' = \mathscr{P}''$</td></tr>
</table>

Méthode pour déterminer l'intersection éventuelle de trois plans :
Etudier la position relative de trois plans revient à étudier la position relative de deux plans ou la position relative d'une droite et d'un plan. ***(cf. Méthodes IV.2 et IV.3).***
Dans le cas où les trois plans sont sécants en un point I, déterminer les coordonnées de I revient à résoudre un système linéaire de trois équations à trois inconnues.

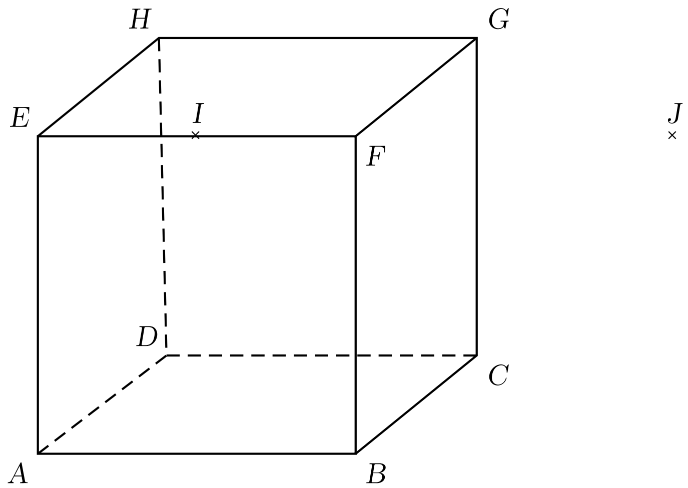
Exemple 9 (suite de l'exemple 8)
Soit $\mathscr{P}$ le plan d'équation $2x - y - 2z - 1 = 0$, $\mathscr{P}'$ le plan d'équation $-x + 4y + z - 3 = 0$ et $\mathscr{P}''$ le plan d'équation $x + y - 4 = 0$
Déterminer l'intersection éventuelle des plans $\mathscr{P}$, $\mathscr{P}'$ et $\mathscr{P}''$.

Chapitre 21

Géométrie dans l'espace - Sujets du Bac 2009

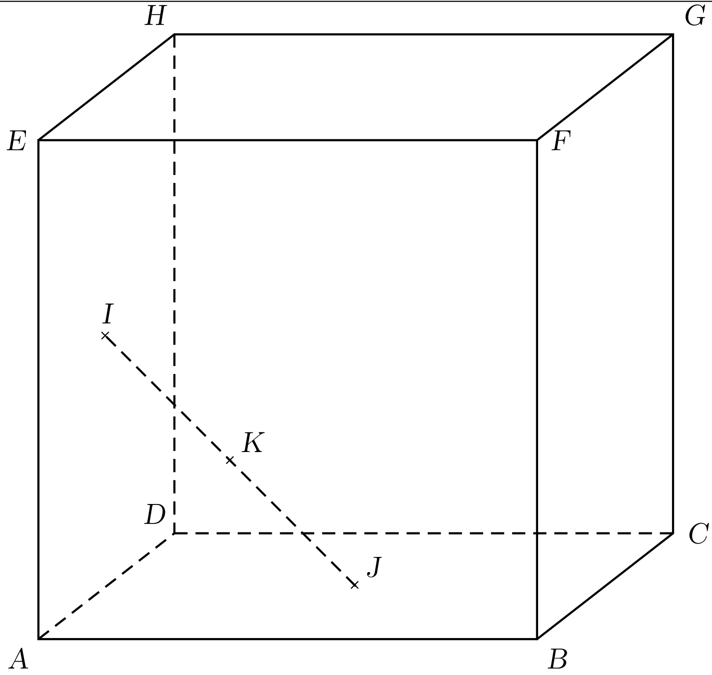
Exercice 1 (Liban, juin 2009)
On considère un cube ABCDEFGH d'arête de longueur 1. On désigne par I le milieu de [EF] et par J le symétrique de E par rapport à F.

Dans tout l'exercice, l'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AE}\right)$.



1. **a.** *Déterminer les coordonnées des points I et J.*
   b. *Vérifier que le vecteur* $\overrightarrow{DJ}$ *est un vecteur normal au plan (BGI).*
   c. *En déduire une équation cartésienne du plan (BGI).*
   d. *Calculer la distance du point F au plan (BGI).*
2. *On note* (Δ) *la droite passant par F et orthogonale au plan (BGI).*
   a. *Donner une représentation paramétrique de la droite* (Δ).
   b. *Montrer que la droite* (Δ) *passe par le centre K de la face ADHE.*
   c. *Montrer que la droite* (Δ) *et le plan (BGI) sont sécants en un point, noté L, de coordonnées* $\left(\frac{2}{3}\ ;\ \frac{1}{6}\ ;\ \frac{5}{6}\right)$.
   d. Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.
   Le point L est-il l'orthocentre du triangle BGI ?

Exercice 2 (Amérique du Nord, juin 2009)
On considère un cube ABCDEFGH d'arête de longueur 1.



On note I le centre de la face ADHE, J celui de la face ABCD et K le milieu du segment [IJ].
L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AE}\right)$.

1. *Déterminer les coordonnées des points l, J et K dans ce repère.*

2. *Démontrer que les points A, K et G ne sont pas alignés.*

3. a. *Démontrer que le plan médiateur du segment [IJ] est le plan (AKG).*

b. *Déterminer une équation cartésienne du plan (AKG).*

c. *Vérifier que le point D appartient au plan (AKG).*

4. *Dans cette question, on veut exprimer K comme barycentre des points A, D et G.*
Soit L le centre du carré DCGH.

a. *Démontrer que le point K est le milieu du segment [AL].*

b. Pour cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.
Démontrer que K est le barycentre des points A. D et G affectés de coefficients que l'on précisera.

Exercice 3 (Pondichéry, avril 2009)
Dans un repère orthonormé de l'espace $\left(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$ *on considère les points :*

A de coordonnées (1 ; 1 ; 0), B de coordonnées (2 ; 0 ; 3), C de coordonnées $(0\ ;\ -2\ ;\ 5)$ *et D de coordonnées* $(1;\ -5\ ;\ 5)$.

Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est VRAIE ou par FAUSSE en justifiant chaque fois la réponse :

Proposition 1 : *L'ensemble des points* M *de coordonnées* $(x,\ y,\ z)$ *tels que* $y = 2x + 4$ *est une droite.*

Proposition 2 : *La transformation qui, à tout point* M *de l'espace associe le point* M' *tel que* $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$ *est l'homothétie de centre* G*, où* G *désigne le barycentre du système* $\{(A,\ 1),\ (B,\ 1),\ (C,\ 2)\}$*, et de rapport 3.*

Proposition 3 : *A, B, C et D sont quatre points coplanaires.*

Proposition 4 : *La sphère de centre* Ω *de coordonnées (3, 3, 0) et de rayon 5 est tangente au plan d'équation :* $2x + 2y + z + 3 = 0$.

Exercice 4 (Centres étrangers, juin 2009)
On se propose dans cet exercice, d'étudier des propriétés d'un solide de l'espace.

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.
On considère les points A(3 ; 4 ; 0) ; B(0 ; 5 ; 0) et C(0 ; 0 ; 5). On note I le milieu du segment [AB].

1. *Faire une figure où l'on placera les points A, B, C, I dans le repère* $\left(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.

2. *Démontrer que les triangles OAC et OBC sont rectangles et isocèles.*
Quelle est la nature du triangle ABC ?

3. *Soit H le point de coordonnées* $\left(\dfrac{15}{19}\ ;\ \dfrac{45}{19}\ ;\ \dfrac{45}{19}\right)$.

- **a.** *Démontrer que les points H, C, I sont alignés.*
- **b.** *Démontrer que H est le projeté orthogonal de O sur le plan (ABC).*
- **c.** *En déduire une équation cartésienne du plan ABC.*

4. *Calculs d'aire et de volume.*

- **a.** *Calculer l'aire du triangle OAB. En déduire le volume du tétraèdre OABC.*
- **b.** *Déterminer la distance du point O au plan (ABC).*
- **c.** *Calculer l'aire du triangle ABC.*