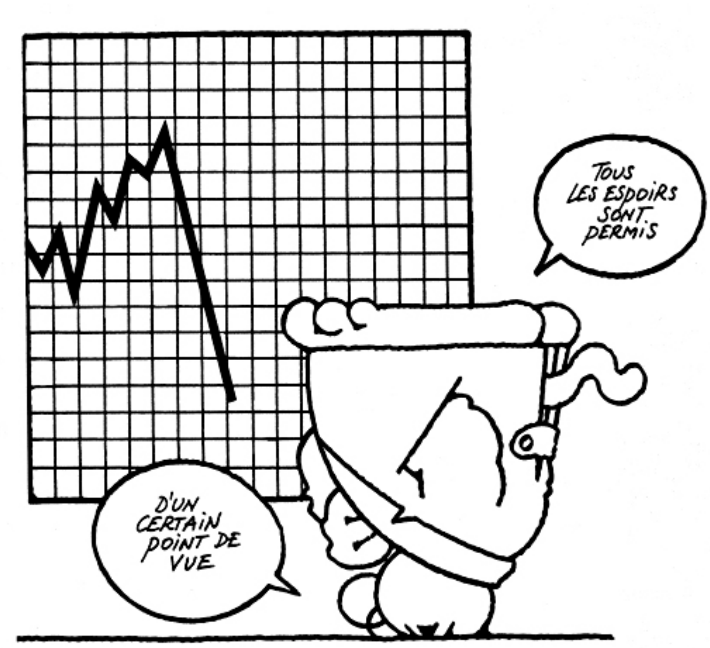
Cours de mathématiques de T^{ale}ES

M. CERISIER - Mme ROUSSENALY
LGT Mansart
2015-16



Chapitre 9

Integration

cours de T^{ale}ES

Dans le cadre du programme de terminale nous allons, dans un premier temps, définir la notion d'intégrale d'une fonction positive à l'aide d'une approche graphique par les aires. Puis, dans un second temps, nous définirons la notion de primitive d'une fonction continue sur un intervalle ce qui nous permettra de généraliser la notion d'intégrale aux fonctions continues de signe quelconque.

I. Intégrale d'une fonction continue positive

1. Aire dans un repère du plan et axiomes de la mesure des aires planes

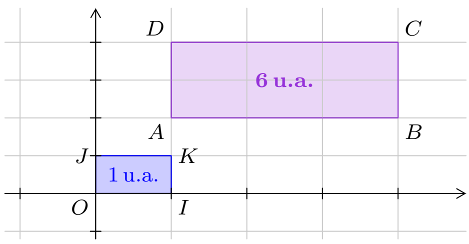
Dans tout ce chapitre, on munit le plan d'un repère orthogonal (O, I, J). On considère comme unité d'aire (notée u.a.) l'aire du rectangle $OIJK$ où $K\,(1\,;1)$. Certaines parties du plan ont une aire que l'on peut mesurer.

Exemple 9.1 :

Sur la figure ci-contre, on considère un repère orthogonal (O, I, J) et les points $A\,(1\,;2)\,;B\,(4\,;2)\,;C\,(4\,;4)$ et $D\,(1\,;4)$.

Le rectangle $ABCD$ a pour aire $6\,\mathrm{u.a.}$

Attention : l'aire de $ABCD$ en unités d'aire usuelles dépend des unités graphiques choisies.
Par exemple, si ces unités sont $OI = 2\,\mathrm{cm}$ et $OJ = 1\,\mathrm{cm}$
alors $1\,\mathrm{u.a.} = 2\,\mathrm{cm}^2$ et donc l'aire de $ABCD$ est $12\,\mathrm{cm}^2$.



Remarque 9.1 : *Quelques axiomes de la mesure des aires planes*

Pendant longtemps les mathématiciens ont utilisé la notion d'aire sans la définir ; il aura fallu attendre la fin du XIX^{e} siècle avec les travaux de Jacques HADAMARD puis de Henry LEBESGUE pour qu'une définition en soit donnée.

Dans ce chapitre nous utiliserons les axiomes suivants qui sont connus de façon intuitive de tout élève de 6^{e} :

i) La mesure des aires est **simplement additive** :
Soit $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ deux parties du plan d'aires respectives $\mathscr{A}\,(\mathcal{P}_1)$ et $\mathscr{A}\,(\mathcal{P}_2)$.
Si $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont « presque disjointes » (c'est à dire si leur intersection est constituée d'une réunion finie de segments et de points) alors l'aire de $\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ est la somme des aires de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ c'est à dire : $\mathscr{A}\,(\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2) = \mathscr{A}\,(\mathcal{P}_1) + \mathscr{A}\,(\mathcal{P}_2)$.

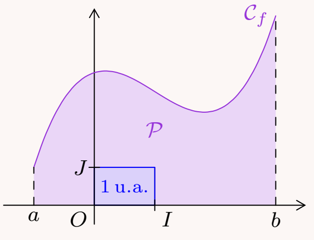
ii) La mesure des aires est **invariante par symétrie axiale** :
Soit $\mathcal{P}$ une partie du plan d'aire $\mathscr{A}\,(\mathcal{P})$ et d une droite du plan.
Si $\mathcal{P}''$ est l'image de $\mathcal{P}$ par la symétrie d'axe d alors $\mathcal{P}''$ a la même aire que $\mathcal{P}$. C'est à dire : $\mathscr{A}\,(\mathcal{P}'') = \mathscr{A}\,(\mathcal{P})$.

2. Définition par les aires de l'intégrale d'une fonction continue positive

Propriété-définition 9.1 (admise)

Soit (O, I, J) un repère orthogonal du plan et deux réels a et b tels que $a \leqslant b$.
Soit f une fonction **continue** et **positive** sur l'intervalle $[a\,;b]$ et $\mathcal{C}_f$ sa représentation graphique dans (O, I, J).

- La partie $\mathcal{P}$ du plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}_f$ et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ admet une aire.
- On appelle **intégrale de a à b de la fonction f** la mesure de l'aire de cette partie $\mathcal{P}$ en unités d'aire. On la note $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

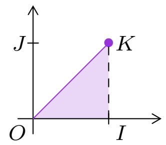


Remarque 9.2 :

- Par abus de langage, on dit que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est « l'aire sous la courbe de f entre a et b ».
- On peut aussi bien écrire $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ ou encore $\displaystyle\int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u$.
  On dit que la variable d'intégration est une « variable muette ».

Exemple 9.2 : Intégrale obtenue par un calcul d'aire dans le cas d'une fonction affine

La fonction définie sur $[0\,;1]$ par $f : x \mapsto x$ est continue et positive sur $[0\,;1]$. Dans le repère orthogonal (O, I, J), l'aire sous la courbe de f entre 0 et 1 est l'aire du triangle OIK où $K\,(1\,;1)$.
Ainsi, $\displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{d}x = 0{,}5$.



Propriété 9.2 (démontrée ci-dessous)

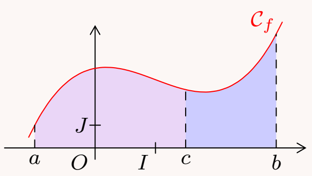
Soit un repère orthogonal (O, I, J) et deux réels a et b tels que $a \leqslant b$.
Soit f une fonction **continue** et **positive** sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}_f$ sa représentation graphique dans (O, I, J).

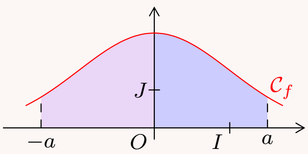
i) $\displaystyle\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$

ii) Pour tout $c \in [a\,;b]$, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$

iii) Si $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à (OJ) alors : $\displaystyle\int_{-a}^0 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$

et donc $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$





Démonstration

Soit un repère orthogonal (O, I, J) et deux réels a et b tels que $a \leqslant b$.
Soit f une fonction **continue** et **positive** sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}_f$ sa représentation graphique dans (O, I, J).

i) Si $b = a$, alors la partie $\mathcal{P}$ sous la courbe $\mathcal{C}_f$ entre a et b est réduite à un segment et est donc d'aire nulle.

ii) Ce point est une conséquence directe de l'axiome d'additivité de la mesure des aires.

iii) Ce point est une conséquence directe de l'axiome d'invariance par symétrie axiale de la mesure des aires. ■

EXERCICE 9.1 : *Déterminer l'intégrale d'une fonction affine par un calcul d'aire*

On rapporte le plan à un repère orthogonal (O, I, J).

1) Tracer la représentation graphique de $x \mapsto x+1$ et représenter des surfaces dont les aires, en unités d'aire, sont égales aux intégrales $\displaystyle\int_{-1}^{2} (x+1)\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_{3}^{5} (x+1)\,\mathrm{d}x$.

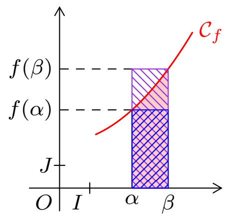
2) Calculer ces intégrales. Puis, vérifier à l'aide de la calculatrice les résultats obtenus.

3. Déterminer un encadrement d'une intégrale par la méthode des rectangles : exemple

Dans le cas d'une fonction affine f on a vu dans l'exemple 9.2 et l'exercice 9.1 que pour déterminer l'intégrale de f entre deux réels a et b on peut calculer l'aire sous la courbe entre a et b car elle a la forme d'un triangle ou d'un trapèze (et on dispose dans ce cas de formules donnant la valeur exacte de l'aire sous la courbe).
Dans le cas général, lorsqu'on veut déterminer l'intégrale d'une fonction continue quelconque, on ne peut pas se ramener à un découpage en polygones. Dans ce cas, on peut toutefois construire une partie du plan constituée de rectangles qui nous permettra de trouver une valeur approchée de l'aire sous la courbe.
Nous allons étudier cette méthode dans le cas d'une fonction **continue, positive et croissante**.

Encadrement de l'aire sous la courbe à l'aide de deux rectangles

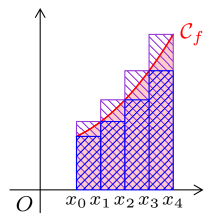
On rapporte le plan à un repère orthogonal (O, I, J).
Soit f une fonction continue, positive et croissante et $\mathcal{C}_f$ sa représentation graphique.



Soit α et β deux réels appartenant à l'ensemble de définition de f tels que $\alpha \leqslant \beta$.
Sur l'intervalle $[\alpha\,;\beta]$ l'aire sous la courbe de f entre α et β est comprise entre l'aire de deux rectangles, l'un de hauteur $f(\alpha)$ et l'autre de hauteur $f(\beta)$ (tous deux ont une « largeur » et égale à $\beta-\alpha$).

Ainsi, on a : $\displaystyle(\beta-\alpha)f(\alpha) \leqslant \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant (\beta-\alpha)f(\beta)$

Méthode des rectangles : encadrement de l'aire sous la courbe à l'aide de deux suites de rectangles



Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et a et b des réels appartenant à l'ensemble de définition de f tels que $a < b$.

On veut déterminer un encadrement de $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Pour cela on découpe $[a\,;b]$ en n intervalles $[x_0\,;x_1]\,;[x_1\,;x_2]\,;\ldots;[x_{n-1}\,;x_n]$ de « largeur » $\dfrac{b-a}{n}$.
Puis, sur chacun de ces intervalles on encadre l'aire sous la courbe par deux rectangles construits comme précédemment.

Ainsi, sur chacun des intervalles $[x_k\,;x_{k+1}]$ pour k allant de 0 à $n-1$ on a : $\displaystyle\frac{b-a}{n}f(x_k) \leqslant \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{b-a}{n}f(x_{k+1})$

Puis, en additionnant on a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{b-a}{n}f(x_k) \leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\frac{b-a}{n}f(x_{k+1})$

Enfin, par additivité de l'aire on en déduit : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{b-a}{n}f(x_k) \leqslant \int_{x_0}^{x_n} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\frac{b-a}{n}f(x_{k+1})$

Et comme $x_0 = a$ et $x_n = b$ on conclut que $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{b-a}{n}f(x_k) \leqslant \int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\frac{b-a}{n}f(x_{k+1})}$

Remarque 9.3 :
Plus n est grand, plus l'encadrement est précis.

Exemple 9.3 : Encadrement de $\displaystyle\int_0^2 \left(x^2+1\right)\mathrm{d}x$ *d'amplitude* 10^{-2}

On va déterminer des encadrements de $\displaystyle\int_0^2 \left(x^2+1\right)\mathrm{d}x$ en utilisant la méthode des rectangles.

Pour cela on utilise l'algorithme suivant :

```
Variables a, b, x, h, u, v réels;
          k, n entiers;
Debut
saisir a, b, n;
x:=a; //initialisation de x
h:=(b-a)/n; //largeur des rectangles
u:=0; //somme des petits rectangles
v:=0; //somme des grands rectangles
pour k allant de 0 jusque n-1 faire
  u:=u+h*(x^2+1);
  x:=x+h;
  v:=v+h*(x^2+1);
fin pour
afficher u, v;
Fin
```

On programme cet algorithme dans la calculatrice.

Lorsqu'on l'exécute avec $a=0$, $b=2$ et $n=100$ on trouve :

$$4{,}6268 \leqslant \int_0^2 \left(x^2+1\right)\mathrm{d}x \leqslant 4{,}7068$$

Lorsqu'on l'exécute avec $a=0$, $b=2$ et $n=500$ on trouve :

$$4{,}658672 \leqslant \int_0^2 \left(x^2+1\right)\mathrm{d}x \leqslant 4{,}674672$$

Lorsqu'on l'exécute avec $a=0$, $b=2$ et $n=1000$ on trouve :

$$4{,}662668 \leqslant \int_0^2 \left(x^2+1\right)\mathrm{d}x \leqslant 4{,}670668$$

On en conclut que : $\boxed{4{,}662 \leqslant \displaystyle\int_0^2 \left(x^2+1\right)\mathrm{d}x \leqslant 4{,}672}$

EXERCICE 9.2 : *Déterminer par la méthode des rectangles une valeur approchée d'une intégrale*

Déterminer, par la méthode des rectangles, une valeur approchée de $\displaystyle\int_0^4 \left(\sqrt{x}+1\right)\mathrm{d}x$ à 10^{-2} près.

II. Primitives d'une fonction continue sur un intervalle

1. Définition et propriétés

Propriété 9.3 (admise)

Soit a et b deux réels tels que $a \leqslant b$.
Si une fonction f est continue et positive sur $[a\,;b]$
alors la fonction F définie sur $[a\,;b]$ par $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur $[a\,;b]$ et a pour dérivée f.

Définition 9.1

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
On appelle **primitive de f sur I** toute fonction F dérivable sur I telle que $F' = f$.

Exemple 9.4 : Plusieurs primitives pour une même fonction

Soit F_1 et F_2 les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $F_1 : x \mapsto 3x^2+5$ et $F_2 : x \mapsto 3x^2-2$.
F_1 et F_2 sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_1'(x) = 6x = F_2'(x)$.
Ainsi, F_1 et F_2 sont deux primitives de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto 6x$.

Propriété 9.4 (admise)

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

Remarque 9.4 :
La propriété ci-dessus généralise la propriété 9.3 ; elle garantit l'existence de primitives pour toute fonction continue de signe quelconque.

Propriété 9.5 (démontrée ci-dessous)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.

- Si F est l'une des primitives de f sur I, les autres primitives de f sont les fonctions $x \mapsto F(x) + \lambda$ où λ est une constante réelle.
- Soit $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Il existe une unique primitive G de f sur I telle que $G(x_0) = y_0$.

Démonstration

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.

- Soit F une primitive de f sur I.
  - Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soit la fonction $G : x \mapsto F(x) + \lambda$.
    Alors G est dérivable sur I car somme de fonctions dérivables sur I et pour tout $x \in I$, $G'(x) = F'(x)+0 = f(x)$.
    Donc G est une primitive de f sur I.

    Ainsi, toutes les fonctions $x \mapsto F(x) + \lambda$ où λ est une constante réelle sont des primitives de f sur I.
  - Soit H une primitive de f sur I.
    Alors on a : $(H - F)' = H' - F' = f - f = 0$ donc le taux de variation de $H - F$ est nul en tout $x \in I$.

    Ainsi, $H - F$ est une fonction constante sur I donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $H(x) = F(x) + \lambda$ pour tout $x \in I$.

    On conclut que seules les fonctions $x \mapsto F(x) + \lambda$ où λ est une constante réelle sont des primitives de f sur I.
- Soit $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Soit F une primitive de f sur I.
  L'équation $F(x_0) + \lambda = y_0$ d'inconnue λ est une équation du premier degré et admet donc une unique solution $\lambda = y_0 - F(x_0)$.

  Ainsi, $G : x \mapsto F(x) + y_0 - F(x_0)$ est l'unique primitive de f sur I telle que $G(x_0) = y_0$.

■

Remarque 9.5 :
Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle I et $a \in I$.
La fonction définie sur I par $G : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est la primitive de f sur I qui s'annule en a.

En effet, d'après la propriété 9.3, $G' = f$ donc G est bien une primitive de f. De plus, $G(a) = 0$ car $\displaystyle\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'aire sous la courbe de f entre $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{a}$ qui est réduite à un segment.

EXERCICE 9.3 : *Vérifier qu'une fonction est une primitive d'une fonction donnée*

Soit f et F les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto 6x^2\,\mathrm{e}^{2x}$ et $F : x \mapsto (3x^2 - 3x + 1{,}5)\,\mathrm{e}^{2x}$.

1) Démontrer que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2) En déduire l'ensemble des primitives de f sur $\mathbb{R}$.

3) Déterminer la primitive de f qui prend la valeur 2 en 0.

2. Recherche de primitives

En terminale on dispose de deux méthodes pour déterminer une primitive particulière d'une fonction f :

- On peut trouver une primitive F particulière « par lecture inverse » du tableau des dérivées des fonctions usuelles. Cette méthode fait l'objet de la propriété 9.6
- Ou bien on reconnaît f comme étant une fonction dérivée. Cette méthode fait l'objet de la propriété 9.7

Remarque 9.6 :
Ces deux méthodes permettent de déterminer les primitives d'un grand nombre de fonctions continues.

Toutefois, pour certaines fonctions on ne dispose pas d'outil permettant de trouver une primitive.
En terminale, par exemple, c'est le cas de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$

Propriété 9.6 : *Primitives de fonctions usuelles* (conséquence directe des propriétés donnant les dérivées usuelles)

fonction f	**une primitive particulière F**	**sur l'intervalle**
$x \mapsto \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}$	$x \mapsto \lambda x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n, \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1;0\}$	$x \mapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$ si $n > 0$ $\mathbb{R}_-^*$ ou $\mathbb{R}_+^*$ si $n < -1$
$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$x \mapsto 2\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+^*$
$x \mapsto \mathrm{e}^x$	$x \mapsto \mathrm{e}^x$	$\mathbb{R}$

Remarque 9.7 :
En pratique, il n'est pas utile de retenir ce tableau. Il suffit de bien connaître les dérivées usuelles et « d'ajuster » les coefficients grâce à la formule $(\lambda u)' = \lambda\, u'$.
Par exemple, pour déterminer une primitive de $f : x \mapsto x^2$, on se rappelle que pour $g : x \mapsto x^3$ on a $g' : x \mapsto 3x^2$.
Or, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{3} 3x^2$ donc une primitive F de f est $F : x \mapsto \dfrac{1}{3}x^3$.

Propriété 9.7 (conséquence directe des propriétés sur les dérivées)

Soit u et v des fonctions dérivables sur un intervalle I et $\lambda \in \mathbb{R}$.

fonction f	**une primitive particulière F**
$\lambda u'$	λu
$u' + v'$	$u + v$
$u'\,\mathrm{e}^u$	e^u

EXERCICE 9.4 : *Déterminer une primitive d'une fonction*

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes. Préciser son ensemble de définition.

$f : x \mapsto 7x^2$ $\qquad$ $g : x \mapsto x^3 - 4x + 7$ $\qquad$ $h : x \mapsto x\,\mathrm{e}^{x^2}$ $\qquad$ $k : x \mapsto 3 - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

III. Intégrale d'une fonction continue de signe quelconque

1. Lien primitive / intégrale d'une fonction continue positive

On déduit des propriétés 9.3 et 9.5 la propriété suivante valable pour les fonctions continues positives.

Propriété 9.8 (démontrée ci-dessous)

Soit a et b réels tels que $a \leqslant b$ et f une fonction continue et positive sur l'intervalle $[a\,;b]$.

Pour toute primitive F de f sur $[a\,;b]$ on a : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$

Démonstration

Soit a et b réels tels que $a \leqslant b$ et f une fonction continue et positive sur l'intervalle $[a\,;b]$.
D'après la propriété 9.3, la fonction définie sur $[a\,;b]$ par $G : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est une primitive de f.
En outre, on remarque que $G(a) = 0$. Donc pour la primitive G on a bien $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = G(b) = G(b) - G(a)$.

Soit F une primitive quelconque de f sur $[a\,;b]$. D'après la propriété 9.5, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in [a\,;b]$, $F(x) = G(x) + \lambda$. Donc $F(b) - F(a) = G(b) + \lambda - G(a) - \lambda = G(b) - G(a)$.
Ainsi, pour toute primitive F de f sur $[a\,;b]$ on a : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.

■

Remarque 9.8 :

- Le nombre $F(a) - F(b)$ est souvent noté $[F(x)]_a^b$. Ainsi, on écrit $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b$. Cette notation permet d'écrire une primitive F de f comme intermédiaire de calcul de l'intégrale sans avoir à donner un nom à cette primitive.
- Cette propriété permet de calculer une intégrale en se ramenant à une recherche de primitive.

Exemple 9.5 : Trouver une primitive pour calculer une intégrale

On veut calculer $\displaystyle\int_0^2 (-x^2 + 2x)\,\mathrm{d}x$.

$f : x \mapsto -x^2 + 2x$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc elle admet des primitives. $x \mapsto -\dfrac{x^3}{3} + x^2$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, $\displaystyle\int_0^2 (-x^2 + 5x)\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{x^3}{3} + x^2\right]_0^2 = -\frac{2^3}{3} + 2^2 - \left(-\frac{0^3}{3} + 0^2\right) = -\frac{8}{3} + 4 = \frac{4}{3}$

2. Définition de l'intégrale d'une fonction continue de signe quelconque

Dans le cadre du programme de terminale, on généralise la notion d'intégrale d'une fonction continue positive aux fonctions de signe quelconque en étendant la formule de la propriété 9.8 aux fonctions de signe quelconque continues sur un intervalle I et pour tout a et b appartenant à I quel que soit l'ordre de a et b.

Définition 9.2

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a et b appartenant à I. Soit F une primitive de f sur I.

On appelle **intégrale de a à b de la fonction f** la différence $F(b) - F(a)$. On note $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ cette intégrale.

Remarque 9.9 :

- La démonstration de la propriété 9.8 assure que cette définition ne dépend pas de la primitive F choisie.
- La propriété 9.8 assure que dans le cas où la fonction f est positive et où $a \leqslant b$, cette définition est cohérente avec la définition en termes d'aires donnée au début du chapitre.
- La fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est la primitive de f sur I qui s'annule en a.

EXERCICE 9.5 : *Trouver une primitive pour calculer une intégrale*

Calculer l'intégrale suivante : $$\int_0^4 (6x^2 - 3x + 2)\,\mathrm{d}x$$

3. Propriétés de l'intégrale

Propriété 9.9 (Pistes de démonstration données au tableau)

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et a, b et c appartenant à I.

- $\displaystyle\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$
- $\displaystyle\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$
- Relation de Chasles : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$
- Linéarité de l'intégrale :
  - $\displaystyle\int_a^b \big(f(x) + g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$
  - Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_a^b \lambda f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

EXERCICE 9.6 : *Utiliser la linéarité pour calculer une intégrale*

1) Soit f une fonction continue sur $[1\,;3]$ telle que $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 2$. Calculer $I = \displaystyle\int_1^3 \left(\frac{3}{2}f(x) - x\right)\mathrm{d}x$.

2) Calculer $J = 2\displaystyle\int_1^2 x\,\mathrm{e}^{x^2+x}\,\mathrm{d}x + \int_1^2 \mathrm{e}^{x^2+x}\,\mathrm{d}x$.

Propriété 9.10 : *Propriétés relatives à l'ordre* (démontrée ci-dessous)

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et a et b appartenant à I. **Si $a \leqslant b$ alors :**

- Positivité de l'intégrale : Si f est positive sur I alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$
- Si $f \leqslant g$ sur I alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$

Démonstration

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I. Soit a et b appartenant à I tels que $\boldsymbol{a \leqslant b}$.
Soit F une primitive quelconque de f.

- Supposons que pour tout $x \in I$, $f(x) \geqslant 0$ alors F est croissante sur I.

  Ainsi, $a \leqslant b \implies F(a) \leqslant F(b) \implies F(b) - F(a) \geqslant 0$ c'est à dire $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$
- Supposons que pour tout $x \in I$, $f(x) \leqslant g(x)$ alors $g(x) - f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in I$.

  Ainsi, d'après le point précédent $\displaystyle\int_a^b \big(g(x) - f(x)\big)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$. Puis, par linéarité de l'intégrale, on a :

  $$\int_a^b \big(g(x) - f(x)\big)\,\mathrm{d}x \geqslant 0 \iff \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0 \iff \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$ ■

EXERCICE 9.7 : *Encadrer une intégrale*

1) En utilisant les inégalités $0 \leqslant x^2 \leqslant x$ vraies pour tout x de $[0\,;1]$, montrer que : $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^0\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

2) En déduire un encadrement de $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x$.

IV. Applications

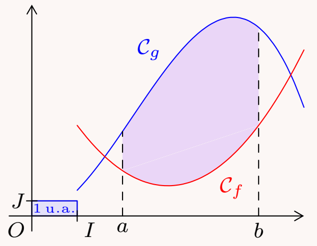
1. Calcul de l'aire d'une partie délimitée par deux courbes de fonctions continues positives

Dans le cas d'une fonction f positive, la définition de l'intégrale choisie dans le cadre du programme de terminale fait un lien direct entre l'intégrale de f de a à b et l'aire sous la courbe de f entre a et b. Ainsi, en procédant par différence, l'intégrale d'une fonction permet de calculer l'aire d'une partie du plan délimitée par deux courbes représentatives de fonctions continues positives.

Propriété 9.11 : *Aire d'une partie délimitée par deux courbes représentant des fonctions continues positives* (admise)

Soit (O, I, J) un repère orthogonal du plan.
Soit f et g deux fonctions continues et positives sur un intervalle I telles que $f \leqslant g$.
Soit a et $b \in I$ tels que $\boldsymbol{a \leqslant b}$.

L'aire de la partie du plan comprise entre les deux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ représentant f et g et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est égale à $\displaystyle\int_a^b \big(g(x) - f(x)\big)\,\mathrm{d}x$ u.a.

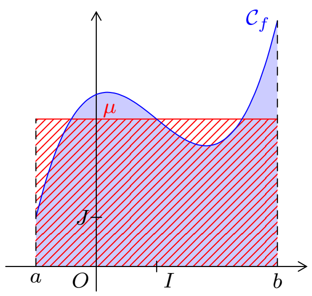


2. Valeur moyenne d'une fonction

Définition 9.3

Soit a et b réels tels que $a < b$ et f une fonction continue sur $[a\,;b]$.

On appelle **valeur moyenne de f sur $[a\,;b]$** le réel : $\mu = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.



Remarque 9.10 : *Interprétation en termes d'aire*

On a donc $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b-a)\mu$. Ainsi, si f est positive sur $[a\,;b]$, μ est la hauteur du rectangle de « largeur » $(b-a)$ qui a une aire égale à l'aire sous la courbe de f entre a et b.

EXERCICE 9.8 : *Déterminer la valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle*

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto 0{,}5x^3 - 1{,}5x^2 + 0{,}5x + 3{,}5$.
Déterminer la valeur moyenne de f sur $[-1\,;3]$.