Chapitre 10

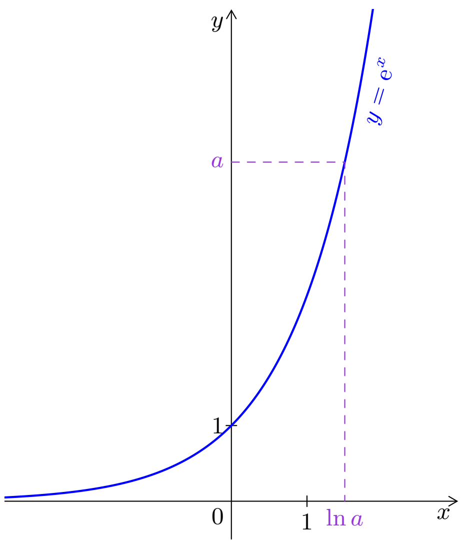
Fonction logarithme népérien

cours de T^{ale}ES

I. Antécédent d'un nombre par la fonction exponentielle

Propriété 10.1 (admise)

Quel que soit le nombre réel strictement positif a,
l'équation $\mathrm{e}^x = a$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.



Définition 10.1

La solution de l'équation précédente s'appelle **logarithme népérien** de a et se note $\ln a$.

Remarque 10.1 :
On peut aussi exprimer la propriété précédente ainsi :
« Quel que soit le nombre réel strictement positif a, il admet un unique antécédent sur $\mathbb{R}$ par la fonction exponentielle. »

Alors la définition s'écrirait plutôt : « $\ln a$ est l'unique antécédent de a par la fonction exponentielle. »
On peut traduire cela par la propriété suivante :

Propriété 10.2 (démontrée ci-dessous)

- Pour tout nombre réel strictement positif a, on a $\mathrm{e}^{\ln a} = a$.
- Pour tout nombre réel b, on a $\ln \mathrm{e}^b = b$.

Démonstration

- Conséquence de la définition
- Par définition, $\ln \mathrm{e}^b$ est l'unique antécédent de e^b par la fonction exponentielle. Or, il est clair que b est cet unique antécédent donc on a bien $\ln \mathrm{e}^b = b$.

■

Remarque 10.2 :
$\ln e = 1$ $\qquad$ $\ln 1 = 0$

EXERCICE 10.1

1) Calculer $\quad \mathrm{e}^{\ln(2)} \quad \ln(\mathrm{e}^3) \quad \ln\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$.

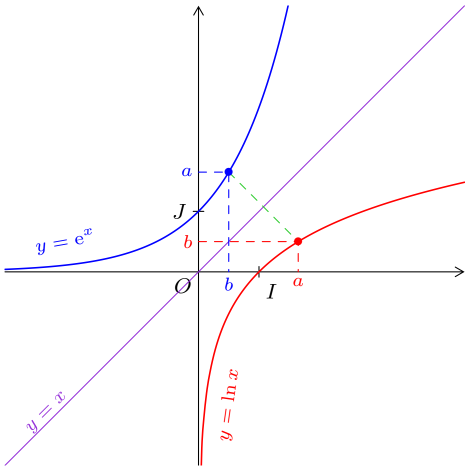
2) Résoudre l'équation $\mathrm{e}^x = 5$.

3) Résoudre l'équation $2 - \mathrm{e}^{-x+1} = 0$

II. La fonction logarithme népérien

Définition 10.2

On appelle **fonction logarithme népérien** la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $x \mapsto \ln x$.



Remarque 10.3 :
On obtient sa représentation graphique par symétrie de la représentation graphique de la fonction exponentielle avec la droite d'équation $y = x$

Propriété 10.3 (admise)

La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Remarque 10.4 :
Si $a > 1$ alors $\ln a > 0$ Si $0 < a < 1$ alors $\ln a < 0$

Propriété 10.4 : *Pour résoudre des équations et des inéquations* (Corollaire de la propriété précédente)

Pour tous nombres réels strictement positifs a et b, on a les équivalences :
$\ln a = \ln b \iff a = b$
$\ln a < \ln b \iff a < b$

EXERCICE 10.2

1) Résoudre l'équation $4\ln(x) + 3 = 0$
2) Résoudre l'inéquation $\ln(2x - 7) > 6$
3) Etudier le signe de la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f : x \mapsto \ln(x)\left(2x^2 - 3x - 2\right)$

III. Relation fonctionnelle

Remarque 10.5 :
On a construit les fonctions exponentielles à l'aide d'une relation fonctionnelle :

« Les fonctions exponentielles transforment les sommes en produits. »

En particulier, si on note f la fonction exponentielle définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto e^x$, on a la relation :
Pour tous nombres réels x et y, on a $f(x + y) = f(x) \times f(y)$, qui s'écrit aussi $e^{x+y} = e^x\, e^y$

Propriété 10.5 : *Relation fonctionnelle de la fonction logarithme népérien* (démontrée ci-dessous)

Pour tous nombres réels strictement positifs a et b, on a $\ln ab = \ln a + \ln b$

Démonstration

Quels que soient les nombres réels strictement positifs a et b, on a : $e^{\ln a + \ln b} = e^{\ln a}\, e^{\ln b} = ab$
Or a et b sont strictement positifs donc leur produit ab aussi et $\ln(ab)$ existe. On peut donc écrire : $ab = e^{\ln(ab)}$
En reprenant le calcul précédent : $e^{\ln a + \ln b} = e^{\ln(ab)}$
Et comme la fonction exponentielle est strictement croissante, on en déduit : $\ln(ab) = \ln a + \ln b$

■

Remarque 10.6 :
De manière analogue à la remarque 10.5, la propriété 10.5 peut s'exprimer :

« La fonction $\ln$ transforme les produits en sommes. »

Ainsi, si on note g la fonction logarithme népérien définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g : x \mapsto \ln x$, on a la relation :
Pour tous nombres réels strictement positifs a et b, on a $g(ab) = g(a) + g(b)$

Propriété 10.6 (démontrée page 137 du manuel)

Pour tous nombres réels strictement positifs a et b, et pour tout entier naturel n, on a :

$$\ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b \qquad \ln\frac{1}{b} = -\ln b \qquad \ln a^n = n\ln a \qquad \ln\sqrt{a} = \frac{1}{2}\ln a$$

EXERCICE 10.3

1) Exprimer en fonction de $\ln(3)$ et $\ln(5)$: $A = \ln\left(\dfrac{3 \times 5^2}{27}\right)$

2) Exprimer à l'aide d'un seul logarithme : $B = 3\ln(10) + \ln(0{,}08) - 5\ln(2)$

EXERCICE 10.4

1) Résoudre l'équation $x^5 = 3$

2) Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $10 \times 1{,}03^n - 14 > 0$

IV. Dérivation

Propriété 10.7 (admise)

La fonction logarithme népérien est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa dérivée est la fonction inverse $x \mapsto \dfrac{1}{x}$

Remarque 10.7 :
Alors une primitive de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$ est la fonction logarithme népérien.

Remarque 10.8 :
On retrouve que la fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. En effet, sur $\mathbb{R}_+^*$ sa dérivée, la fonction inverse est strictement positive.

EXERCICE 10.5

Soit les fonction f et g définies et dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f : x \mapsto 3x^3\ln(x) \qquad\qquad g : x \mapsto \frac{-2}{x} + 4x^3\,\mathrm{e}^{x^4}$$

1) Déterminer la fonction dérivée f'.

2) Déterminer l'ensemble des primitives de g.

Propriété 10.8 (démontrée ci-contre)

La fonction logarithme népérien est concave sur $\mathbb{R}_+^*$.