Corrigé - DST n°1

Exercice 1

Partie I : Etude du coût moyen

1) Pour tout $x \in [0;25]$, $C(x) = x^3 - 36x^2 + 432x$ et $C_M(x) = x^2 - 36x + 432$.
C_M est une fonction polynôme, donc C_M est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc sur $[0;25]$
Pour tout $x \in [0;25]$, $C_M'(x) = 2x - 36$

2) Par tout $x \in [0;25]$, $C_M'(x) = 2x - 36$
or $2x - 36 > 0 \Leftrightarrow 2x > 36 \Leftrightarrow x > 18$
donc pour tout $x \in [0;18[$, $C_M'(x) < 0$
pour tout $x \in [18;25]$, $C_M'(x) \geqslant 0$
donc C_M est strictement décroissante sur $]0;18[$
C_M est strictement croissante sur $]18;25[$.

3) Pour $x = 18$, $C_M'(x) = 0$ et C_M est d'abord strictement décroissante sur $]0;18[$ puis strictement croissante sur $]18;25[$
donc $C_M'(x)$ s'annule pour $x = 18$ en changeant de signe
donc C_M admet un minimum $C_M(18)$ atteint en $x = 18$.
de plus $C_M(18) = 18^2 - 36 \times 18 + 432$
$C_M(18) = 108$
donc le coût moyen minimum est 108 euros pour une production de 18 tonnes.

Partie II : Etude du bénéfice

1) L'entreprise vend son produit 160 euros la tonne.
Donc si on note R la recette pour x tonnes de produit, on a :
pour tout $x \in [0;25]$, $R(x) = 160x$.
De plus, $B(x) = R(x) - C(x)$
$B(x) = 160x - (x^3 - 36x^2 + 432x)$
$B(x) = 160x - x^3 + 36x^2 - 432x$
donc, pour tout $x \in [0;25]$, $B(x) = -x^3 + 36x^2 - 272x$

2) $B(5) = -5^3 + 36 \times 5^2 - 272 \times 5$
$B(5) = -125 + 36 \times 25 - 1360$
$B(5) = -585$
Pour la vente de 5 tonnes de produit, l'entreprise perd 585 euros.

3) Par lecture graphique, l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse 15 est environ 650.
Donc, par lecture graphique, pour une vente de 15 tonnes de son produit sur un mois, l'entreprise fait un bénéfice d'environ 650 euros.

4) Par lecture graphique, les abscisses des points d'intersection de la courbe et de la droite d'équation $y = 400$ sont 13,25 et 24.
Donc, par lecture graphique, le bénéfice est de 400 euros pour une production mensuelle de 13,25 tonnes et de 24 tonnes de son produit.

5) Par lecture graphique, le bénéfice mensuel maximum réalisé par l'entreprise est 975 euros pour une production mensuelle de 19,4 tonnes de produit.

6) Par lecture graphique, la courbe est située en-dessous de l'axe des abscisses pour les valeurs de x comprises entre 0 et 10,75
donc, l'entreprise est déficitaire pour une production comprise entre 0 et 10,75 tonnes.

Exercice 2

Partie I : QCM

1) c 2) b 3) b 4) c

Partie II

1) Pour tout $x \in [-2,5 ; 3]$, $f(x) = x^3 - 1,5x^2 - 6x + 2,5$

$f(-1) = (-1)^3 - 1,5 \times (-1)^2 - 6 \times (-1) + 2,5$

$f(-1) = -1 - 1,5 \times 1 + 6 + 2,5$

$f(-1) = -1 - 1,5 + 8,5$ donc $\boxed{f(-1) = 6}$

2) a) f est une fonction polynôme, donc dérivable sur $\mathbb{R}$, donc sur $[-2,5 ; 3]$.

Pour tout $x \in [-2,5 ; 3]$, $f'(x) = 3x^2 - 1,5 \times 2x - 6$

$\boxed{\text{Pour tout } x \in [-2,5 ; 3],\ f'(x) = 3x^2 - 3x - 6}$

b) $3(x+1)(x-2) = (3x+3)(x-2)$

$= 3x^2 - 6x + 3x - 6$

$3(x+1)(x-2) = 3x^2 - 3x - 6$

or pour tout $x \in [-2,5 ; 3]$, $f'(x) = 3x^2 - 3x - 6$

donc, $\boxed{\text{pour tout } x \in [-2,5 ; 3],\ f'(x) = 3(x+1)(x-2)}$

c) Pour tout $x \in [-2,5 ; 3]$, $f'(x) = 3(x+1)(x-2)$

$x + 1 > 0 \iff x > -1$

$x - 2 > 0 \iff x > 2$

on dresse le tableau de signe de $f'(x)$ sur $[-2,5 ; 3]$.

x	$-2,5$		-1		2		3
$3(x+1)$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$3 > 0$

donc $\boxed{\begin{array}{l}\text{pour tout } x \in [-2,5 ; -1] \cup [2 ; 3],\ f'(x) \geq 0 \\ \text{pour tout } x \in]-1 ; 2[,\ f'(x) < 0.\end{array}}$

3) Pour tout $x \in [-2,5 ; -1] \cup [2 ; 3]$, $f'(x) \geq 0$

donc f est croissante sur $[-2,5 ; -1]$ et sur $[2 ; 3]$.

et pour tout $x \in [-1 ; 2]$, $f'(x) \leq 0$

donc f est décroissante sur $[-1 ; 2]$.

On dresse le tableau de variation de f sur $[-2,5 ; 3]$

x	$-2,5$		-1		2		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-7,5$	$\nearrow$	6	$\searrow$	$-7,5$	$\nearrow$	-2

D'après un tableau de valeurs à l'aide de la calculatrice,

$f(-2,5) = -7,5$

$f(-1) = 6$

$f(2) = -7,5$

$f(3) = -2$

Exercice 3

1) D'après l'algorithme, on complète le tableau suivant :

a)

Test $C < 400$		vrai	vrai	vrai	vrai	vrai	faux
Valeur de C	300	326	350	372	392	411	—
Valeur de n	0	1	2	3	4	5	—

b) A la fin de l'exécution de l'algorithme la valeur affichée est 5.
La valeur affichée est la valeur du plus petit entier n tel que $C \geq 400$.
Donc, dans 5 ans, soit en 2019, le nombre de colonies dépasse 400 pour la première fois.

2) a) D'une année sur l'autre, l'apiculteur perd 8% de ses colonies d'abeilles et installe 50 nouvelles colonies chaque printemps.
Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C_{n+1} = C_n \times (1 - \frac{8}{100}) + 50$
donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C_{n+1} = 0,92C_n + 50$

b) (V_n) est la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $V_n = 625 - C_n$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} = 625 - C_{n+1}$ avec $C_{n+1} = 0,92C_n + 50$
$V_{n+1} = 625 - 0,92C_n - 50$
$V_{n+1} = 575 - 0,92C_n$
$V_{n+1} = 0,92(\frac{575}{0,92} - C_n)$
$V_{n+1} = 0,92(625 - C_n)$
donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} = 0,92 V_n$

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} = 0,92 V_n$ et $V_0 = 625 - C_0 = 625 - 300 = 325$
donc (V_n) est la suite géométrique de raison $q = 0,92$ et de premier terme $V_0 = 325$.
donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = V_0 \times q^n$
$V_n = 325 \times 0,92^n$
de plus $V_n = 625 - C_n \Leftrightarrow C_n = 625 - V_n$
donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C_n = 625 - 325 \times 0,92^n$.

d) Le nombre de colonies espéré en 2024 est donné par u_{10}.
or $u_{10} = 625 - 325 \times 0,92^{10}$
$u_{10} \simeq 483,82$
donc il peut espérer posséder 483 colonies d'abeilles. (ou 484 arrondi à l'entier)

3) a) Pour doubler le nombre initial de colonies, il faut atteindre 600 colonies.
Donc, dans l'algorithme, il faut remplacer "Tant que $C < 400$ faire" par "Tant que $C < 600$ faire".

b) Il faut résoudre l'inéquation (I) $C_n \geq 600$ dans $\mathbb{N}$.
(I) $\Leftrightarrow 625 - 325 \times 0,92^n \geq 600$
(I) $\Leftrightarrow -325 \times 0,92^n \geq -25$
(I) $\Leftrightarrow 0,92^n \leq \frac{25}{325}$
(I) $\Leftrightarrow 0,92^n \leq \frac{1}{13}$ avec $\frac{1}{13} \simeq 0,0769$

or, à l'aide d'un tableau de valeurs donné par la calculatrice, on a :
pour $n = 30$, $0,92^{30} \simeq 0,0819$
pour $n = 31$, $0,92^{31} \simeq 0,0754$

donc, au bout de 31 ans, l'apiculteur aura doublé le nombre de ses colonies soit en 2045.

Exercice 4

Partie A

(u_n) est la suite définie par $u_0 = 10$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0{,}9u_n + 1{,}2$

1) (v_n) est la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 12$.

a) Par tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+1} - 12$ avec $u_{n+1} = 0{,}9u_n + 1{,}2$

$$v_{n+1} = 0{,}9u_n + 1{,}2 - 12$$
$$v_{n+1} = 0{,}9u_n - 10{,}8$$
$$v_{n+1} = 0{,}9\left(u_n - \frac{10{,}8}{0{,}9}\right)$$
$$v_{n+1} = 0{,}9(u_n - 12)$$

donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 0{,}9v_n$

de plus $v_0 = u_0 - 12 = 10 - 12 = -2$

donc, $\boxed{\text{la suite } (v_n) \text{ est géométrique de raison } q = 0{,}9 \text{ et de premier terme } v_0 = -2}$

b) (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0{,}9$ et de premier terme $v_0 = -2$

donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times q^n$

soit, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ v_n = -2 \times 0{,}9^n}$

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 12 \iff u_n = v_n + 12$ avec $v_n = -2 \times 0{,}9^n$

donc $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n = 12 - 2 \times 0{,}9^n}$.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = -2 \times 0{,}9^n$

$0 < 0{,}9 < 1$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}9^n = 0$, donc $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0}$.

de plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n + 12$, donc $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 12}$

Partie B

1) La ville perd 10% de ses habitants d'une année sur l'autre, donc cette baisse de 10% se traduit par le coefficient multiplicateur $1 - \frac{10}{100}$, soit 0,9.

De plus, on ajoute 1200 personnes à l'effectif des habitants chaque année, soit 1,2 milliers

Donc si u_n désigne le nombre de milliers d'habitants de la ville en $2012+n$, alors $u_{n+1} = 0{,}9u_n + 1{,}2$

donc $\boxed{\text{cette situation peut être modélisée par la suite } (u_n) \text{ de la partie A}}$.

2) il faut compléter : a prend la valeur $\boxed{0{,}9 \times a + 1{,}2}$

3) a) On résout dans $\mathbb{N}$ l'inéquation (I) : $12 - 2 \times 0{,}9^n > 11{,}5$

$$(I) \iff -2 \times 0{,}9^n > -0{,}5$$
$$(I) \iff 0{,}9^n < 0{,}25$$

or, à l'aide d'un tableau de valeurs donné par la calculatrice, on a :

pour $n = 13$, $0{,}9^{13} \approx 0{,}2541$

pour $n = 14$, $0{,}9^{14} \approx 0{,}2287$

donc, $\boxed{\text{tous les entiers naturels supérieurs ou égaux à 14 sont solutions de l'inéquation } 12 - 2 \times 0{,}9^n > 11{,}5 \text{ dans } \mathbb{N}}$.

b) La résolution de l'inéquation permet d'affirmer que le nombre d'habitants de la ville sera supérieur à 11500 à partir de l'année 2026. (dans 14 ans).

Annexe

rbe de l'exercice 1 :