STV

BAC BLANC N°2

TS1 et TS2 **Le samedi 29 avril 2017** **Durée : 4h00**

CALCULATRICE : autorisée ☑ interdite ☐ **Pas de sortie autorisée**

Exercice 1 – Commun à tous les élèves **8 points**

Dans un stand, un tireur effectue des tirs successifs pour atteindre plusieurs cibles. La probabilité que la première cible soit atteinte est de $\frac{1}{2}$. Lorsqu'une cible est atteinte, la probabilité que la suivante le soit est de $\frac{3}{4}$. Lorsqu'une cible n'est pas atteinte, la probabilité que la suivante soit atteinte est de $\frac{1}{2}$.

On note, pour tout entier naturel n non nul :

- A_n l'évènement « La n-ième cible est atteinte » ;
- B_n l'évènement « La n-ième cible n'est pas atteinte » ;
- a_n la probabilité de l'évènement A_n ;
- b_n la probabilité de l'évènement B_n.

1. Donner les valeurs de a_1 et de b_1. Calculer a_2 et b_2.
2. Montrer que, pour tout n entier naturel supérieur ou égal à 1, $a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{2}b_n$, puis que : $a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2}$.
3. Soit (u_n) la suite définie, pour tout entier naturel non nul n, par : $u_n = a_n - \frac{2}{3}$.
   a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$. Préciser son premier terme u_1.
   b. En déduire l'expression de u_n en fonction de n, puis l'expression de a_n en fonction de n.
   c. Déterminer la limite de la suite (a_n). Interpréter le résultat.
   d. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $a_n > 0{,}6665$. Interpréter ce résultat.

Exercice 2 – Commun à tous les élèves **3 points**

1. Soit deux évènement A et B de probabilité non nulle. On considère les affirmations : (1) « A et B sont incompatibles » et (2) « A et B sont indépendants ». Peut-on avoir (1) vraie lorsque (2) est vraie ?
2. Démontrer que si A et B sont indépendants, alors $\bar{A}$ et B le sont aussi.

Exercice 3 – QCM – Commun à tous les élèves **5 points**

Pour chacune des questions suivantes, écrire sur votre copie le numéro de la question, ainsi que la (ou les) lettre(s) correspondant à la (ou les) bonne(s) réponse(s). Une bonne réponse rapporte 1 point, une mauvaise réponse retire 0,5 point, l'absence de réponse ne rapporte ni ne retire aucun point.

A et B sont deux évènements indépendants de probabilité non nulle.

1) $P(A \cup B)$ est égale à :
   a) $P(A) + P(B)$ b) $P(A) + P(B) - P(A)\times P(B)$ c) $P(A)\times P(B)$ d) $P(A)\times P(\bar{B}) + P(B)$

2) $P_B(\bar{A})$ est égale à :
   a) $P_{\bar{B}}(A)$ b) $1 - P(A)$ c) $P(\bar{A} \cap B)$ d) $1 - P(\bar{B})$

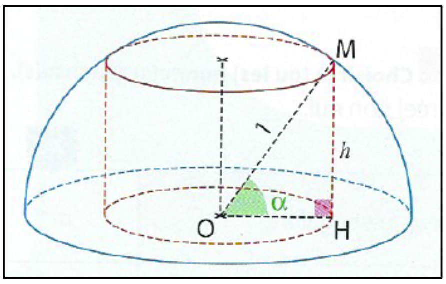
3) Si $P(A) = 0{,}35$ et $P(\bar{B}) = 0{,}4$, alors :
   a) $P(A \cap B) = 0{,}6$ b) $P(A \cap B) = 0{,}21$ c) $P(A \cap \bar{B}) = 0{,}14$ d) $P(A \cap \bar{B}) = 1 - P(A \cap B)$

Exercice 4 – Commun à tous les élèves   **5 points**

On se propose de déterminer le volume maximal d'un cylindre droit inscrit dans une demi-sphère de rayon 1 mètre.

Le cylindre et la demi-sphère ont le même plan de base $\mathcal{P}$ et le même axe de symétrie.

Soit M un point de l'intersection de la sphère et du cylindre, et H le projeté orthogonal de M sur le plan $\mathcal{P}$.



L'unité est le mètre. On note α une mesure en radians de l'angle $\widehat{HOM}$, avec : $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

1. Exprimer les longueurs OH et MH en fonction de α puis le volume du cylindre en fonction de $\sin\alpha$.
2. Soit f la fonction définie sur $]0\,;\frac{\pi}{2}[$ par : $f(\alpha) = \pi(\sin\alpha - \sin^3\alpha)$. On note f' sa dérivée.
   a. Démontrer que $f'(\alpha)$ est du signe de $\left(1 - \sqrt{3}\sin\alpha\right)$.
   b. Démontrer qu'il existe une unique valeur α_0 de α pour laquelle f admet un maximum, et que $\sin\alpha_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$.
3. En déduire la valeur exacte en m^3 du volume maximal du cylindre.

Exercice 5 – Commun à tous les élèves   **5 points**

On se place dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit f la transformation qui à tout nombre complexe z non nul associe le nombre complexe $f(z)$ défini par : $f(z) = z + \frac{1}{z}$.

1. On appelle A le point d'affixe $a = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2}$.
   a. Déterminer la forme exponentielle de a.
   b. Déterminer la forme algébrique de $f(a)$.
2. Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation : $f(z) = 1$.
3. Soit M un point d'affixe z du cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1.
   a. Justifier que l'affixe z peut s'écrire sous la forme : $z = e^{i\theta}$ avec θ un nombre réel.
   b. Montrer que dans ce cas, $f(z)$ est un nombre réel.
4. Décrire et représenter l'ensemble des points $M(z)$ tels que $f(z)$ soit un nombre réel.

Exercice 6 – Commun à tous les élèves   **4 points**

On considère la suite (z_n) de nombres complexes définie par la donnée de $z_0 = 0$ et la relation de récurrence : $z_{n+1} = \frac{i}{2}z_n + 5$.

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on note M_n le point d'affixe z_n.

On considère le point A d'affixe $z_A = 4 + 2i$.

1. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par : $u_n = z_n - z_A$.
   a. Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{i}{2}u_n$.
   b. En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = \left(\frac{i}{2}\right)^n \times(-4 - 2i)$.
2. Démontrer que pour tout entier naturel n, les points A, M_n et M_{n+4} sont alignés.

Exercice 7 - Pour les élèves n'ayant pas suivi la spécialité mathématiques **10 points**

Partie A

Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = x - \cos x$.

1. Déterminer les limites de la fonction u en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Justifier que la fonction u est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
3. a. Démontrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.
   b. Donner un encadrement d'amplitude 0,1 de α.
4. En déduire le signe de $u(x)$ selon les valeurs de α.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - 2\sin x$.

1. Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Démontrer que pour tout réel x, $f'(x)$ est du signe de $u(x)$, où u est la fonction définie dans la **partie A**.
3. En déduire les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Partie C

On considère les courbes $\mathcal{P}$ et $\mathcal{C}$ d'équation respective : $y = x^2$ et $y = 2\sin x$.
Soit T la tangente à $\mathcal{P}$ en son point d'abscisse α et soit D la tangente à $\mathcal{C}$ en son point d'abscisse α, où α est le réel défini dans la **partie A**.

1. Démontrer que les tangentes T et D sont parallèles.
2. Existe-t-il un réel a, différent de α tel que les tangentes à $\mathcal{P}$ et à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a soient parallèles ? Justifier la réponse.

Partie D

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \sqrt{2}\sin(2x)$ et $\mathcal{C}'$ sa courbe représentative.
Déterminer la position relative de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sur l'intervalle $[-\pi; \pi]$.

Exercice 7 - Pour les élèves ayant suivi la spécialité mathématiques **10 points**

L'objet du problème est l'étude d'une méthode de cryptage, dite « chiffrement de Hill », dans un cas particulier.
Cette méthode nécessite une matrice de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, dont les coefficients sont des nombres choisis entre 0 et 25, tels que $ad - bc$ soit premier avec 26.
Cette matrice est connue seulement de l'émetteur et du destinataire.

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes

Partie A : quelques résultats

1. On considère l'équation (E) : $9d - 26m = 1$, où d et m désignent deux entiers relatifs.
   a. Donner une solution simple de cette équation, de sorte que d et m soient des nombres entiers compris entre 0 et 3.
   b. Démontrer que le couple $(d; m)$ est solution de l'équation (E) si et seulement si : $9(d-3) = 26(m-1)$.
   c. En déduire que les solutions de l'équation (E) sont les nombres entiers relatifs de la forme :
   $$\begin{cases} d = 26k + 3 \\ m = 9k + 1 \end{cases} \text{ avec } k \in \mathbb{Z}.$$
2. a. Soit n un nombre entier. Démontrer que si $n = 26k - 1$, avec k entier relatif, alors n et 26 sont premiers entre eux.
   c. En déduire que les nombres $9d - 28$, avec $d = 26k + 3$ et $k \in \mathbb{Z}$, sont premiers avec 26.

Partie B : cryptage et décryptage

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$.

On utilisera le tableau suivant pour la correspondance entre les lettres et les nombres.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	**O**	**P**	**Q**	**R**	**S**	**T**	**U**	**V**	**W**	**X**	**Y**	**Z**
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Méthode de cryptage (pour un mot comportant un nombre pair de lettres)	Exemple : avec le mot MATH	
1. On regroupe les lettres par paires.	MA	TH
2. On remplace les lettres par les valeurs associées à l'aide du tableau précédent, et on place les couples de nombres obtenus dans des matrices colonne.	$C_1 = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \end{pmatrix}$	$C_2 = \begin{pmatrix} 19 \\ 7 \end{pmatrix}$
3. On multiplie les matrices colonne par la gauche par la matrice $A = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$	$AC_1 = \begin{pmatrix} 108 \\ 84 \end{pmatrix}$	$AC_2 = \begin{pmatrix} 199 \\ 154 \end{pmatrix}$
4. On remplace chaque coefficient des matrices colonne obtenues par leur reste dans la division euclidienne par 26.	$108 = 4 \times 26 + 4$ $84 = 3 \times 26 + 6$ On obtient : $\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 17 \\ 24 \end{pmatrix}$
5. On utilise le tableau de correspondance entre lettres et nombres pour obtenir le mot crypté.	EGRY	

1. En cryptant par cette méthode le mot « PION », on obtient « LZWH ». En détaillant les étapes pour les lettres « ES », crypter le mot « ESPION ».

2. **Méthode de décryptage**

   Notation : lorsqu'on manipule des matrices de nombres entiers relatifs, on peut utiliser la notation « ≡ » pour parler de congruence coefficient par coefficient. Par exemple, on peut écrire :

   $$\begin{pmatrix} 108 \\ 84 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} \ mod(26) \text{ car } 108 \equiv 4 \ mod(26) \text{ et } 84 \equiv 6 \ mod(26).$$

   Soient a, b, x, y, x' et y' des nombres entiers relatifs.
   On sait que si $x \equiv x' \ mod(26)$ et $y \equiv y' \ mod(26)$, alors $ax + by \equiv ax' + by' \ mod(26)$.
   Ce résultat permet d'écrire que, si A est une matrice 2×2, et B et C deux matrices colonne 2×1, alors :

   $$B \equiv C \ mod(26) \quad \text{implique} \quad AB \equiv AC \ mod(26)$$

   a. Etablir que la matrice A est inversible, et déterminer son inverse.
   b. Décrypter le mot : XQGY.