TEST POLYNOMES DU SECOND DEGRE : EQUATIONS INEQUATIONS
Le 13 novembre 2015 1éres S1

Exercice 1 10 points

Résoudre les inéquations suivantes :

a) $\dfrac{3x}{x-1}+\dfrac{2x-1}{x+3}\leq 0$ b) $\dfrac{-3x^2+4x-5}{x+2}\geq 0$ c) $\dfrac{-16x^2+24x-9}{(x-1)^2}<0$

Exercice 2 5 points

Soit le polynôme : $P(x)=3x^4-13x^2+4$

1. Calculer les racines de ce polynôme
2. Donner alors sa forme factorisée
3. En déduire la résolution de l'inéquation : $P(x)\geq 0$

Exercice 3 5 points

On donne le trinôme : $Q(x)=mx^2+4x+2(m-1)$ $m\in\mathbb{R}$.

1. Pour quelles valeurs de m l'équation $Q(x)=0$ a-t-elle une seule solution ? Calculer alors cette solution.
2. Quel est l'ensemble des nombres m pour lesquels l'équation $Q(x)=0$ a 2 solutions distinctes ?
3. Quel est l'ensemble des nombres m pour lesquels , pour tout nombre réel x le trinôme $Q(x)$ est strictement négatif ?

Exercice 4 10 points

Partie A : démonstration de cours.

1. a) Ecrire la forme factorisée d'un polynôme du second degré $P(x)=ax^2+bx+c$ (a,b,c sont des réels et $a\neq 0$) admettant 2 racines distinctes x_1 et x_2.
   b) On pose alors : $S=x_1+x_2$ et $P=x_1x_2$. Donnée alors la forme développée de $P(x)$ en fonction de S et P.
   c) En déduire les expressions de S et P en fonction des réels a,b,c.

2. Réciproquement , si a est un réel non nul quelconque, montrer que x_1 et x_2 sont les racines du polynôme : $ax^2-aSx+aP$

Partie B : application

($x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$ *et* $x_1x_2=\dfrac{c}{a}$)

1. Donner un exemple de polynôme du second degré dont les racines sont 2 et 3.

2. On considère l'équation du second degré suivante : $x^2-5x+6=0$.
Montrer que 2 est solution de cette équation , en déduire la $2^{\text{ème}}$ solution (sans calculer le discriminant).

3. On considère l'équation : $x^2+x-2=0$. Trouver une solution évidente puis en déduire la $2^{\text{ème}}$ solution (sans calculer le discriminant).

Partie C

1. **Calcul de** $x_1^2+x_2^2$

a) Compléter l'égalité : $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-$...........

b) En déduire l'expression de $x_1^2+x_2^2$ en fonction de S et P puis en fonction des réels a , b , c.

2 . Calcul de $x_1^3+x_2^3$. (on rappelle que pour tous réels a et b : $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$)

En vous inspirant de la question précédente, exprimer $x_1^3+x_2^3$ en fonction de S et P puis en fonction des réels a,b,c.

3. Soit : $f(x)=x^2-2x-1$.

a) Calculer le discriminant de ce trinôme , en déduire le nombre de ses racines.

b) Déterminer , sans calculer ses racines , leur somme , la somme de leurs carrés et la somme de leurs cubes.

CORRIGÉ du TEST
SECOND DEGRÉ
13.11.2015.

Exercice 1.

a) On résout dans $\mathbb{R} - \{-3;1\}$

$$\frac{3x}{x-1} + \frac{2x-1}{x+3} \leq 0 \iff \frac{3x(x+3)+(2x-1)(x-1)}{(x-1)(x+3)} \leq 0$$

$$\iff \frac{3x^2+9x+2x^2-x-2x+1}{(x-1)(x+3)} \leq 0 \iff \frac{5x^2+6x+1}{(x-1)(x+3)} \leq 0$$

$5x^2+6x+1$ est un trinôme $a=5$ $b=6$ $c=1$
Son discriminant $\Delta = b^2-4ac = 36-20=16 = 4^2$
$\Delta > 0$ le trinôme a 2 racines distinctes :
$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6+4}{10} = -\frac{1}{5}$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6-4}{10} = -1$

$(x-1)(x+3)$ est un trinôme ayant 2 racines 1 et -3 et $a>0$
On peut établir un tableau de signe à l'aide de la règle du signe d'un trinôme :

x	$+\infty$		-3		-1		$-1/5$		1		$+\infty$
$5x^2+6x+1$ $\Delta>0$ $a>0$		+	‖	+	0	−	0	+	‖	+	
$(x-1)(x+3)$ $\Delta>0$ $a>0$		+	‖	−		−		−	‖	+	
Quotient		+	‖	−	0	+	0	−	‖	+	

d'où $\boxed{S =]-3;-1] \cup [-\frac{1}{5};1[}$

b. On résout dans $\mathbb{R} - \{2\}$ $\frac{-3x^2+4x-5}{x+2} \geq 0$

$-3x^2+4x-5$ est un trinôme $a=-3$ $b=4$ $c=-5$
Son discriminant $\Delta = b^2-4ac = 16-12\times 5 = 16-40$ $\Delta<0$ et $a<0$
donc le trinôme est du signe de a : pour tout $x \in \mathbb{R}-\{2\}$ $-3x^2+4x-5$

donc $\frac{-3x^2+4x-5}{x+2} \geq 0 \iff x+2<0 \iff x<-2$ $\boxed{S =]-\infty;-2[}$

c. On résout dans $\mathbb{R} - \{1\}$

$$\frac{-16x^2+24x-9}{(x-1)^2} < 0 \iff \frac{-(16x^2-24x+9)}{(x-1)^2} < 0 \iff \frac{16x^2-24x+9}{(x-1)^2} > 0$$

$$\iff \frac{(4x-3)^2}{(x-1)^2} > 0$$

or pour tout $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ $(x-1)^2 > 0$
et pour tout $x \in \mathbb{R} - \{\frac{3}{4}\}$ $(4x-3)^2 > 0$

donc $\boxed{S = \mathbb{R} - \{1;\frac{3}{4}\}}$

Exercice 2 Soit $P(x) = 3x^4 - 13x^2 + 4$

1. On pose $X = x^2$ $x \in \mathbb{R}$ $X \in \mathbb{R}^+$ On obtient alors le polynôme :
$3X^2 - 13X + 4$ $a = 3$ $b = -13$ $c = 4$
Son discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = 169 - 16 \times 3 = 121 = 11^2$
$\Delta > 0$ le trinôme a 2 racines distinctes

$$X_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{13+11}{6} = \frac{24}{6} = 4 \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{13-11}{6} = \frac{1}{3}$$

et donc $3X^2 - 13X + 4 = 3(X-4)(X-\frac{1}{3})$

$X = x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{X}$ ou $x = -\sqrt{X}$ donc $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -2$
$x^2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ou $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

Les racines sont donc $2 ; -2 ; \sqrt{3}/3 ; -\sqrt{3}/3$

2. et donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ $P(x) = 3(x+2)(x-2)(x+\frac{\sqrt{3}}{3})(x-\frac{\sqrt{3}}{3})$

3. On établit un tableau de signe à l'aide de la règle du signe d'un trinôme :

x	$-\infty$		-2		$-\sqrt{3}/3$		$\sqrt{3}/3$		2	
$(x+2)(x-2)$ $\Delta>0$ $a>0$		+	0	−		−		−	0	+
$(x+\sqrt{3}/3)(x-\sqrt{3}/3)$ $\Delta>0$ $a>0$		+		+	0	−	0	+		+
$P(x)$ $(3>0)$		+	0	−	0	+	0	−	0	+

donc $P(x) \geq 0$ a pour ensemble solution $\boxed{S =]-\infty; -2] \cup [-\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}] \cup [2; +}$

Exercice 3

$Q(x) = mx^2 + 4x + 2(m-1)$ $m \in \mathbb{R}$

1. 1er cas $m = 0$ $Q(x) = 4x - 2$ $Q(x) = 0 \Leftrightarrow 4x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$
$Q(x) = 0$ a donc 1 seule solution.

2e cas $m \neq 0$ $Q(x) = mx^2 + 4x + 2(m-1)$ est un trinôme :
$a = m$ $b = 4$ $c = 2(m-1)$
Son discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 4m \times 2(m-1) = 16 - 8m^2 + 8m$
L'équation $Q(x) = 0$ admet une seule solution si et seulement si $\Delta = 0$
$\Delta = 0 \Leftrightarrow -8m^2 + 8m + 16 = 0 \Leftrightarrow -m^2 + m + 2 = 0$
$-m^2 + m + 2$ est un trinôme $a = -1$ $b = 1$ $c = 2$
Son discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = 1 + 8 = 9$ $\Delta > 0$ le trinôme a 2 racines distinctes : $m_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+3}{-2} = -1$ et $m_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-3}{-2} = 2$

Donc pour $m = -1$ et $m = 2$ $Q(x) = 0$ a une seule solution $x_0 = -\frac{b}{2a}$

Pour $m = -1$ $x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2m} = 2$ Pour $m = 2$ $x_0 = \frac{-4}{2m} = -1$

Donc $Q(x) = 0$ a une solution pour $m = 0$ $(x = \frac{1}{2})$ pour $m = -1$ $(x = 2)$ et pour $m = 2$ $(x = -1)$

2. $Q(x) = 0$ a 2 solutions distinctes si $Q(x)$ est un trinôme donc $m \neq$ et si le trinôme $Q(x)$ a un discriminant strictement positif

D'après le 1. $\Delta > 0 \Leftrightarrow -8m^2 + 8m + 16 > 0 \Leftrightarrow -m^2 + m + 2 > 0$
$\Leftrightarrow m \in]-1; 2[$

or $m \neq 0$ donc $\boxed{m \in]-1; 0[\cup]0; 2[}$

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ $Q(x) < 0$ si et seulement si $\Delta < 0$ et $a < 0$

$\Delta < 0 \iff m \in]-\infty;-1[\cup]2;+\infty[$ d'après le résultat 1

$a < 0 \iff m < 0$

donc $\boxed{m \in]-\infty;-1[}$

Exercice 4.

Partie A :

1. a. $P(x) = ax^2 + bx + c$ $a;b;c$ réels $(a;b) \neq (0,0)$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ si x_1 et x_2 racines de $P(x)$

b. Soit $S = x_1 + x_2$ $P = x_1 x_2$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2) = a(x^2 - xx_2 - xx_1 + x_1x_2)$

$= ax^2 - a(x_1 + x_2)x + a x_1 x_2$

$P(x) = ax^2 - aSx + aP$

c. $P(x) = ax^2 + bx + c = ax^2 - aSx + aP$

(d'après le théorème d'égalité des polynômes par identification des coef.)

on obtient $\begin{cases} b = -aS \\ c = aP \end{cases} \iff \begin{cases} S = -\frac{b}{a} \\ P = \frac{c}{a} \end{cases}$ $(a \neq 0)$

2. $P(x) = ax^2 - aSx + aP = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + a x_1 x_2$

$= ax^2 - a x x_1 - a x_2 x + a x_1 x_2$

$= a(x^2 - x x_1 - x_2 x + x_1 x_2)$

$P(x_1) = a(x_1^2 - x_1^2 - x_2 x_1 + x_1 x_2) = 0$ donc x_1 racine de $P(x)$

$P(x_2) = a(x_2^2 - x_1 x_2 - x_2^2 + x_1 x_2) = 0$ donc x_2 racine de $P(x)$

Partie B.

1. $x_1 = 2$ et $x_2 = 3$ $x_1 + x_2 = 5$ et $x_1 x_2 = 6$

x_1 et x_2 sont racines du polynôme $ax^2 - aSx + aP$

en choisissant $a = 1$ par exemple on obtient $x^2 - 5x + 6$.

2 (E) $x^2 - 5x + 6 = 0$

Pour $x = 2$: $x^2 - 5x + 6 = 4 - 10 + 6 = 0$ 2 est solution de (E)

$x^2 - 5x + 6$ est un trinôme $a = 1$ $+5 = S$ et $6 = P$

donc $\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 x_2 = 6 \end{cases} \iff \begin{cases} x_2 = 5 - 2 \\ x_2 = \frac{6}{2} \end{cases} \iff x_2 = 3$

3. (E') : $x^2 + x - 2 = 0$ Pour $x = 1$: $1 + 1 - 2 = 0$ 1 est solution

de plus $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -1 \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} x_2 = -1 - 1 \\ x_2 = \frac{-2}{1} \end{cases} \iff x_2 = -2$

Partie C

1. a. $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$

b. $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \boxed{S^2 - 2P = \frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a}}$

2. a. $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_3)^3 - 3x_1^2x_2 - 3x_1x_2^2 = (x_1 + x_3)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x$

donc $x_1^3 + x_2^3 = \boxed{S^3 - 3PS = \frac{-b^3}{a^3} + 3\frac{cb}{a^2}}$

3 - a) $f(x) = x^2 - 2x - 1$ trinôme $\Delta = 4 + 4 = 8$ $\Delta > 0$ le trinôme a 2 racines distinctes

$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = 2$; $(x_1 + x_2)^2 = \frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a} = 6$

$(x_1 + x_3)^2 = -\frac{b^3}{a^3} + 3\frac{bc}{a^2} = 14$