STV	DST de : MATHÉMATIQUES n° 3	Mme QUENTIN et Mme TÉNART
CLASSE :	DATE : 2 Février 2016	DURÉE : 2 HEURES
1ères S1 – S2	CALCULATRICE : autorisée ☑ interdite ☐	

Exercice 1 : Soient f la fonction par $f(x)=\dfrac{x^2-3x+6}{x-1}$ et, $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.
2) Faire l'étude du sens de variation de f puis établir son tableau de variations.
3) Donner les équations des tangentes à $\mathscr{C}$ aux points A et B tels que A soit le point d'intersection entre $\mathscr{C}$ et l'axe des ordonnée et B le point d'abscisse 2.
4) Tracer avec soin et précision les tangentes et la courbe $\mathscr{C}$ à l'aide du tableau de variations et d'un tableau de valeurs.

Exercice 2 : Démontrer que pour tout $x \in]\,0\,;\,1\,[$, on a $\dfrac{4}{x}-\dfrac{9}{x-1} \geq 25$

(On pourra s'aider de l'étude de la fonction f définie par : $f(x)=\dfrac{4}{x}-\dfrac{9}{x-1}$)

Exercice 3 : Soient f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3-3x+1$ et, $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

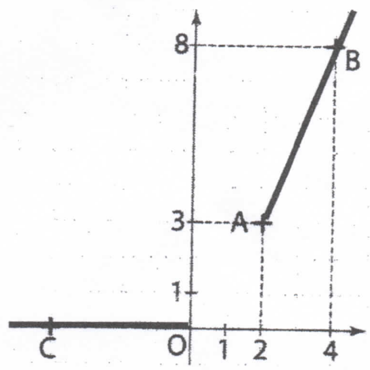
1) Donner l'équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse $\dfrac{1}{2}$.
2) Montrer que $\mathscr{C}$ admet une tangente T ' // T.
3) Soient f_m la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_m(x)=x^3+mx^2+mx+2$ et, $\mathscr{C}_m$ sa courbe représentative. Discuter suivant les valeurs du paramètre réel m, le nombre de tangentes horizontales à $\mathscr{C}_m$.

Exercice 4 :

Un projet envisage de raccorder les deux tronçons rectilignes d'une voie ferrée par une courbe. Les tronçons sont représentés par les demi-droites [AB) et [OC). L'unité du repère correspond à la distance de 1 km sur le terrain.

On cherche une fonction $f : x \longmapsto ax^3+bx^2+cx+d$ où a, b, c et d sont des nombres réels, dont la courbe représentative $\mathscr{C}$ sur [0 ; 2] représente le raccordement souhaité.

On impose d'autre part aux deux tronçons d'être tangents au raccordement.



1) a- Justifier que $f(0)=0$ et $f'(0)=0$.
   b- En déduire les valeurs des réels c et d.
2) a- Déterminer $f(2)$ et $f'(2)$.
   b- En déduire les valeurs des réels a et b.
3) Donner l'expression de $f(x)$.

Barème envisagé : 10 - 5 - 8 - 7

Exercice 1.

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 6}{x - 1}$$

1. $f(x)$ existe si et seulement si $x - 1 \neq 0 \iff x \neq 1$
donc $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$

2. f est une fonction rationnelle définie dérivable sur D_f donc pour tout $x \in \mathbb{R} - \{1\}$:

$$f'(x) = \frac{(2x-3)(x-1) - (x^2 - 3x + 6)}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - 3x + 3 - x^2 + 3x - 6}{(x-1)^2}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in D_f \quad f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}}$$

Etude du signe de $f'(x)$:
Pour tout $x \in D_f$ $(x-1)^2 > 0$
et $x^2 - 2x - 3$ est un trinôme avec $a = 1$ $b = -2$ $c = -3$
Son discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = 4 + 12 = 16 = 4^2$
$\Delta > 0$ le trinôme a 2 racines distinctes :
$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2+4}{2} = 3$ et $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2-4}{2} = -1$

Donc d'après la règle du signe d'un trinôme ($\Delta > 0$ $a > 0$)

Pour $x \in]-\infty ; -1[\cup]3 ; +\infty[$ $f'(x) > 0$
Pour $x \in]-1 ; 1[\cup]1 ; 3[$ $f'(x) < 0$

Donc : f est strictement croissante sur $]-\infty ; -1[$ et sur $]3 ; +\infty[$
f est strictement décroissante sur $]-1 ; 1[$ et sur $]1 ; 3[$
$f(-1) = -5$ et $f(3) = 3$

Tableau de variation :

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
f		↗	-5	↘	‖	↘	3	↗	

3. A point d'intersection entre $\mathcal{C}_f$ et l'axe des ordonnées donc $x_A = 0$
$A \in \mathcal{C}_f$ donc $A(x_A ; f(x_A))$ d'où $A(0 ; f(0))$ $A(0 ; -6)$

$B \in \mathcal{C}_f$ et $x_B = 2$ donc $y_B = f(2) = 4$ $B(2 ; 4)$

Equation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en A est :
$y = f'(0)(x - 0) + f(0) = -3x - 6$ $\boxed{T_A : y = -3x - 6}$

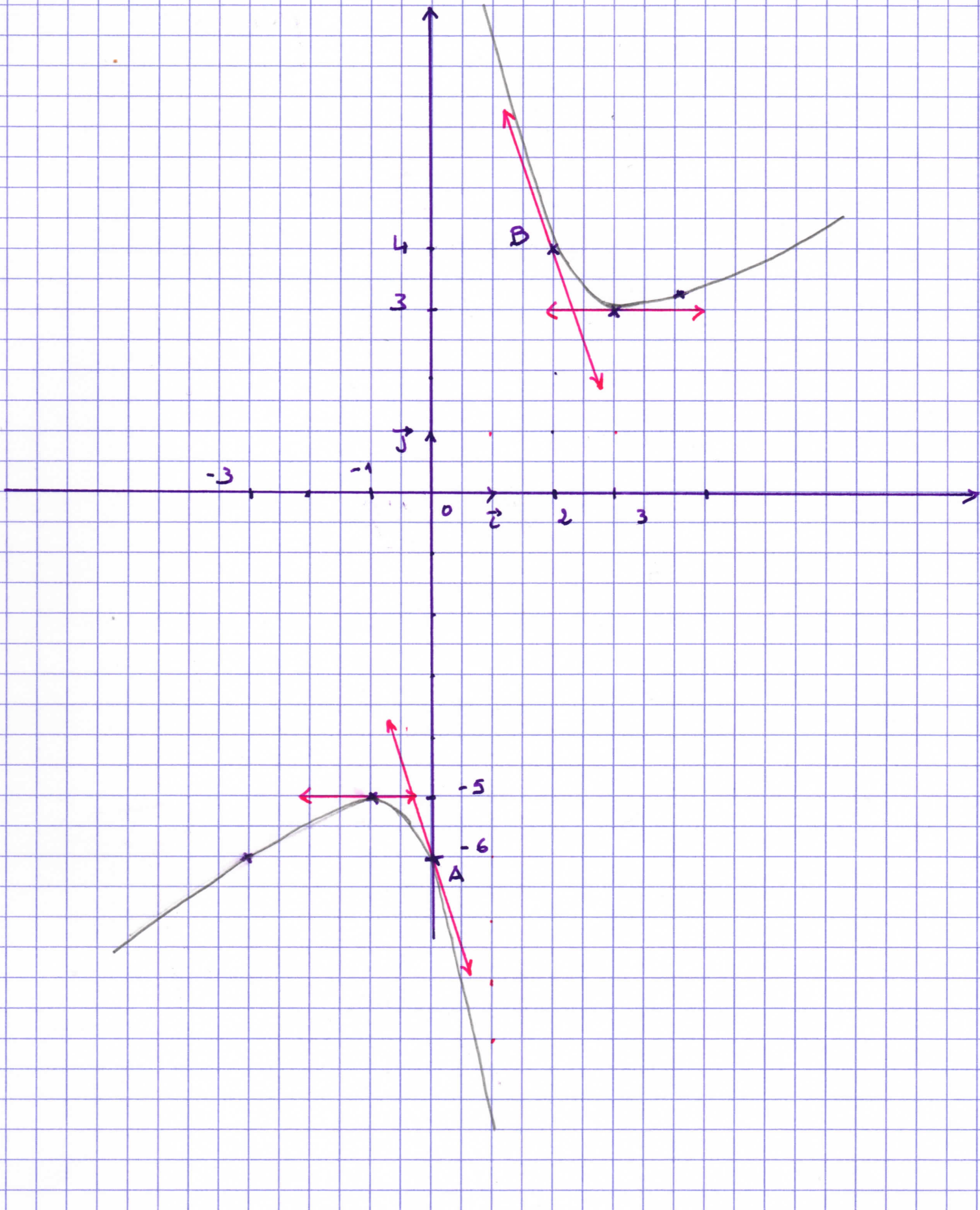
Equation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en B est :

$y = f'(2)(x-2) + f(2) = -3(x-2) + 4 = -3x + 10$

$$\boxed{T_B : y = -3x + 10}$$

Tableau de valeurs

x	-3	-2	-1	0	2	3	4
$f(x)$	-6	$-5,33$	-5	-6	4	3	$3,33$



Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $]0;1[$ par $f(x) = \frac{4}{x} - \frac{9}{x-1}$

f est une fonction rationnelle définie dérivable sur D_f donc :
pour tout $x \in]0;1[$:

$$f'(x) = -\frac{4}{x^2} + \frac{9}{(x-1)^2} = \frac{-4(x-1)^2 + 9x^2}{x^2(x-1)^2} = \frac{9x^2 - 4(x-1)^2}{x^2(x-1)^2}$$

$$= \frac{(3x + 2(x-1))(3x - 2(x-1))}{x^2(x-1)^2} = \frac{(5x-2)(x+2)}{x^2(x-1)^2}$$

Etude du signe de $f'(x)$:
Pour tout $x \in]0;1[$ $x^2(x-1)^2 > 0$ et $x+2>0$
et $5x - 2 > 0 \iff x > \frac{2}{5}$

Donc pour $x \in]0;\frac{2}{5}[$ $f'(x) < 0$ et pour $x \in]\frac{2}{5};1[$ $f'(x) > 0$

x	0		$2/5$		1
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	‖
f	‖	$\searrow$	25	$\nearrow$	‖

f est strictement décroissante sur $]0;\frac{2}{5}[$ et strictement croissante sur $]\frac{2}{5};1[$
et $f(\frac{2}{5}) = 25$

donc 25 est un minimum absolu de f sur $]0;1[$ donc

$\boxed{\text{pour tout } x \in]0;1[\quad f(x) \geq 25 \iff \frac{4}{x} - \frac{9}{x-1} \geq 25}$

Exercice 3

1\. $f(x) = x^3 - 3x + 1$ $\quad D_f = \mathbb{R}$
f est une fonction polynôme définie dérivable sur $\mathbb{R}$ donc
pour donc $x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = 3x^2 - 3$
L'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $\frac{1}{2}$ est :

$$y = f'(\tfrac{1}{2})(x - \tfrac{1}{2}) + f(\tfrac{1}{2})$$

$$\iff y = (3 \times \tfrac{1}{4} - 3)(x - \tfrac{1}{2}) + (\tfrac{1}{2})^3 - 3 \times \tfrac{1}{2} + 1 = -\tfrac{9}{4}x + \tfrac{3}{4}$$

$$\boxed{T_A : y = -\tfrac{9}{4}x + \tfrac{3}{4}}$$

2\. Si $T' /\!/ T$ alors les 2 droites ont le même coefficient directeur $-\frac{9}{4}$; les droites étant des tangentes à $\mathcal{C}_f$ leur coefficient directeur est le nombre dérivé $f'(a)$
Il faut donc résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$f'(a) = -\frac{9}{4} \iff 3a^2 - 3 = -\frac{9}{4} \iff 3a^2 - \frac{3}{4} = 0 \iff x^2 = \frac{1}{4}$$

$$\iff x = \frac{1}{2} \text{ ou } x = -\frac{1}{2}$$

Or T est tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $\frac{1}{2}$ donc il existe une tangente T' à $\mathcal{C}_f$ parallèle à T au point d'abscisse $-\frac{1}{2}$

3. $f_m(x) = x^3 + mx^2 + mx + 2$ $D_{f_m} = \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{R}$

f_m est une fonction polynôme définie dérivable sur $\mathbb{R}$ donc pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f'_m(x) = 3x^2 + 2mx + m$$

le nombre $f'_m(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_{f_m}$ au point d'abscisse x, une tangente horizontale a un coefficient directeur nul il faut donc résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$f'_m(x) = 0 \iff 3x^2 + 2mx + m = 0 \qquad m \in \mathbb{R}$$

$3x^2 + 2mx + m$ est un trinôme : $a = 3$ $b = 2m$ $c = m$
son discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 4m^2 - 12m = 4m(m-3)$ $m \in \mathbb{R}$
$4m(m-3)$ est un trinôme ayant 2 racines d'après la règle du signe d'un trinôme

pour $m \in]-\infty ; 0[\cup]3 ; +\infty[$ $\Delta > 0$ l'équation $f'_m(x) = 0$ admet 2 solutions distinctes donc $\mathcal{C}_{f_m}$ admet 2 tangentes horizontales

pour $m \in]0 ; 3[$ $\Delta < 0$ l'équation $f'_m(x) = 0$ n'a pas de solution donc $\mathcal{C}_{f_m}$ n'admet aucune tangente horizontale

pour $m = 0$ et $m = 3$ $\Delta = 0$ l'équation $f'_m(x) = 0$ a une seule solution donc $\mathcal{C}_{f_m}$ admet une seule tangente horizontale

Exercice 4

Soit f fonction définie par $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $D_f = [0 ; 2]$

1. a. $\mathcal{C}_f$ passe par le point $O(0;0)$ donc $f(0) = 0$
La droite (OC) est confondue avec l'axe des abscisses son coefficient directeur est nul de plus elle est tangente à $\mathcal{C}_f$ en O donc $f'(0) = 0$

b. $f(0) = 0 \iff a \times 0 + b \times 0 + c \times 0 + d = 0 \iff d = 0$

f est une fonction polynôme définie dérivable sur $[0 ; 2]$ donc pour tout $x \in [0;2]$
$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$
et $f'(0) = 0 \iff 3a \times 0 + 2b \times 0 + c = 0 \iff c = 0$

2. a. $A(2;3)$ $A \in \mathcal{C}_f$ donc $A(2 ; f(2))$ et donc $f(2) = 3$
$f'(2)$ est le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 2 c'est-à-dire A, cette tangente est donc (AB)
le coefficient directeur de (AB) est $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{8-3}{4-2} = \dfrac{5}{2}$

donc $f'(2) = \dfrac{5}{2}$

b. Il faut donc résoudre dans $\mathbb{R}$ le système :

$$\begin{cases} f(2) = 3 \\ f'(2) = \frac{5}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} 8a + 4b = 3 \\ 12a + 4b = \frac{5}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} 4a = \frac{5}{2} - 3 \\ 8a + 4b = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -\frac{1}{8} \\ b = 1 \end{cases}$$

d'où $f(x) = -\dfrac{1}{8}x^3 + x^2$