I Ensembles de nombres

I 1 Les différents ensembles de nombres

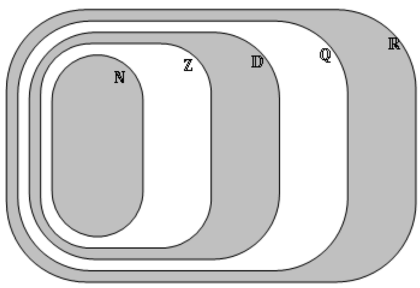
Ensembles des	Notation	Exemples d'éléments appartenant	Propriétés	Contre-exemples : éléments n'appartenant pas
Entiers naturels Dès l'Antiquité, entre -580 et -497	$\mathbb{N}$	$0; 1; 2; 46; 100$; 10^4 ; 2 978 653	0 est le plus petit de tous les entiers naturels. Il n'y a pas de nombre plus grand que tous les autres.	-4 ; $0,946$; $\frac{10}{3}$; $\frac{1}{7}$; $17,55\underline{5}...$; π ; $\sqrt{2}$
Entiers relatifs Nombres négatifs sont plus récents : indiens VIè mais en occident il faut attendre le XVIè	$\mathbb{Z}$	0 ; 1 ; 100 ; -4 ; -2 468 ; -1 ; -10^7	A tout entier naturel n correspond un entier relatif –n. 0 est à la fois positif et négatif.	$0,946$; $\frac{10}{3}$; $\frac{1}{7}$; $17,55\underline{5}...$; π ; $\sqrt{2}$; $-2\sqrt{7}$
Décimaux XVè Al Kashi (Persan) diffusé par Stevin (Belge) fin du XVIè	$\mathbb{D}$	0 ; 1 ; 100 ; -4 ; -2 468 ; -1 ; -10^7 ; $-\frac{1}{4}$; 10^{-3} ; 0,946	Tout décimal peut s'écrire en fraction dont le dénominateur est une puissance de 10. « si la décomposition du dénominateur s'écrit sous la forme d'un produit $2p \times 5q$ avec p et q entiers naturels alors la fraction est un nombre décimal. » Un décimal se reconnaît par son écriture décimale finie.	$\frac{10}{3}$; $\frac{1}{7}$; $17,55\underline{5}...$; π ; $\sqrt{2}$; $-2\sqrt{7}$; cos 7°
Rationnels Dès l'Antiquité, (les irrationnels également, $\sqrt{2}$ connu par Euclide au IIIè av JC)	$\mathbb{Q}$	0 ; 1 ; 100 ; -4 ; -2 468 ; -1 ; -10^7 ; $-\frac{1}{4}$; 10^{-3} ; $\frac{10}{3}$; $\frac{1}{7}$; $17,55\underline{5}...$	Tout rationnel peut s'écrire sous forme d'une fraction $\frac{p}{q}$, p entier relatif et q naturel non nul	π ; $\sqrt{2}$; $-2\sqrt{7}$; cos 7°
Réels	$\mathbb{R}$	Tous les nombres connus en classe de seconde	L'ensemble des réels se représente sur un axe gradué.	AUCUN, pour l'instant ...

Remarque : Les notations des ensembles ont été utilisées la 1ère fois par un italien Giuseppe Peano (1858-1932) mais évolution des notations au cours du XXè.

I 2 Appartenance et inclusion

Appartenance : si un élément a est dans un ensemble E alors on dit que a appartient à E (ou bien encore que a est élément de E) et on note : $a \in E$. Dans le cas **contraire**, on dit que a n'appartient pas à E et on note : $a \notin E$.

Inclusion : Soit deux ensembles E et F. On dit que F est inclus dans E (ou est contenu dans) si tout élément de F est un élément de E, on note $F \subset E$. Dans le cas **contraire**, on dit que F est non inclus dans E et on note : $F \not\subset E$.



$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

I 3 Intervalles de $\mathbb{R}$

EQUIVALENCES pour la rédaction et Représentation sur l'axe gradué des solutions puis INTERVALLE.

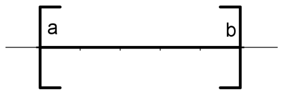
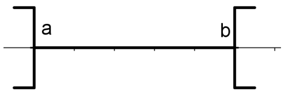
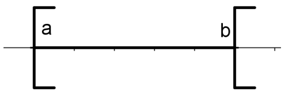
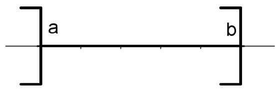
Exercice 1 :

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $7x - 3 \geqslant 4$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $5 - 2x > -1$.

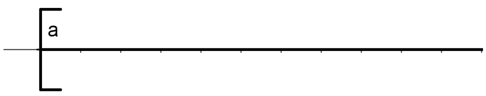
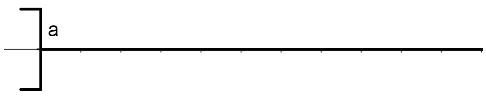
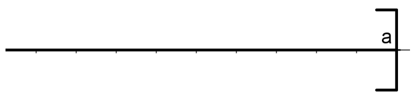
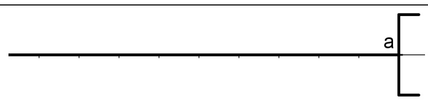
Exercice 2 :

1. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système d'inéquations $\begin{cases} -3x & < & 12 \\ x+3 & < & 0 \end{cases}$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système d'inéquations $\begin{cases} 2x-4 & \leqslant & 2 \\ -3x+2 & \leqslant & -1 \end{cases}$
3. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système d'inéquations $\begin{cases} 4x-1 & \geqslant & -9 \\ -3x+2 & > & -16 \end{cases}$
4. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système d'inéquations $\begin{cases} 6x & > & 2 \\ -4x & \geqslant & -2 \end{cases}$

Intervalles bornés

Intervalles bornés	Encadrement	Représentation sur une droite graduée
$[a; b]$	$a \leq x \leq b$	
$]a; b[$	$a < x < b$	
$[a; b[$	$a \leq x < b$	
$]a; b]$	$a < x \leq b$	

Intervalles non bornés

Intervalles non bornés	Inégalité	Représentation sur une droite graduée
$[a; +\infty[$	$x \geq a$	
$]a; +\infty[$	$x > a$	
$]-\infty; a]$	$x \leq a$	
$]-\infty; a[$	$x < a$	

Remarques :

1) ∞ n'est pas un nombre mais une **notation**.
2) $[a;b]$ est un **intervalle fermé**.
3) $]a;b[$ est un **intervalle ouvert**.
4) a et b sont les **bornes** de l'intervalle $[a;b]$.
5) Un intervalle est **TOUJOURS ouvert** du côté de l'infini.

6) **Notations usuelles importantes :**
$\mathbb{R} =]-\infty;+\infty[$; $\mathbb{R}^+ = [0;+\infty[$; $\mathbb{R}^- =]-\infty;0]$
$\mathbb{R}^* =]-\infty;0[\cup]0;+\infty[= \mathbb{R}\backslash\{0\}$ **et** $\mathbb{R}^{*-} =]-\infty;0[$; $\mathbb{R}^{*+} =]0;+\infty[$

7) Notation pour l'**ensemble vide** : $\emptyset$

8) **Deux points de logique :**

$a \leq x \leq b$ signifie $a \leq x$ **et** $x \leq b$: il faut **à la fois** $a \leq x$ **ET** $x \leq b$
$x \leq a$ signifie $x < a$ **OU** $x = a$