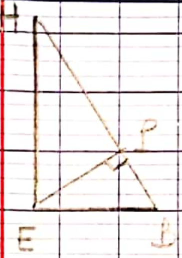
– Trigonométrie – 1ère spé –

Exercices de réinvestissement

I

Ex 1



$EH = 12\,cm$

$\widehat{BHE} = 30°$

2) Dans le triangle EBH rectangle en E, $\cos \widehat{BHE} = \dfrac{EH}{BH}$

Donc $BH = \dfrac{EH}{\cos \widehat{BHE}}$

Ainsi $BH = \dfrac{12}{\cos 30°}$

$BH = \dfrac{12}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{24\sqrt{3}}{3} = 8\sqrt{3}$.

3) Dans le triangle EPH rectangle en P, $\sin \widehat{BHE} = \dfrac{EP}{EH}$

Donc $EP = EH \times \sin \widehat{BHE}$

$= 12 \times \sin 30°$

$= 12 \times \dfrac{1}{2}$

$EP = 6$

4) • Dans le triangle EPH rectangle en P, $\cos \widehat{BHE} = \dfrac{HP}{HE}$

Donc $HP = HE \times \cos \widehat{BHE}$

$= 12 \times \cos 30°$ {autre méthode : Pythagore}

$= 12 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$HP = 6\sqrt{3}$

• Comme $P \in [HB]$, $PB = HB - HP$

$= 8\sqrt{3} - 6\sqrt{3}$

$PB = 2\sqrt{3}$

5) L'aire du triangle BPE est : $\mathcal{A} = \dfrac{EP \times PB}{2} = \dfrac{6 \times 2\sqrt{3}}{2}$

$\mathcal{A} = 6\sqrt{3}$

Ex 2 1) H est le pied de la hauteur issue de A dans le triangle équilatéral ABC. Donc H est le milieu de [BC] et la droite (AH) est la médiatrice du segment [BC]. Or la médiatrice est l'ensemble des points équidistants des extrémités du segment donc D, équidistant de B et C (car BDC isocèle en D), appartient à (AH).

2) $\widehat{ABD} = \widehat{ABC} - \widehat{DBC}$
$= 60° - 45°$ (angles d'un triangle équilatéral et d'un triangle rectangle isocèle)
$\widehat{ABD} = 15°$.

3) • ABC équilatéral donc $AB = BC = 2$.
• $AH = \frac{\sqrt{3}}{2} AB$ (à connaître, ou trigo dans le triangle ABH rect en H)
$AH = \sqrt{3}$

• $AD = AH - DH$ (car $D \in [AH]$)
et $DH = BH = \frac{1}{2} BC = 1$ (triangle rectangle isocèle BDC.)
Donc $AD = \sqrt{3} - 1$.

4) a) Dans le triangle KBD rectangle en K : $\sin \widehat{KBD} = \frac{KD}{BD}$.
Donc $KD = BD \times \sin \widehat{KBD}$
or $BD = \sqrt{2}$ (th. de Pythagore dans BHD)
Donc $KD = \sqrt{2} \times \sin 15°$

b) L'aire du triangle ABD est donc :
$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \times AB \times KD$
$= \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{2} \times \sin 15°$
$\mathcal{A} = \sqrt{2} \times \sin 15°$

5) a) • L'aire de ABH vaut : $\frac{1}{2} \times BH \times AH = \frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
• L'aire de BDH vaut : $\frac{1}{2} BH \times HD = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$

b) Donc l'aire de ABD vaut la différence des 2 aires précédentes : $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}$

6) L'aire de ABD vaut également : $\frac{1}{2} \times AB \times KD = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{2} \sin 15°$
soit : $\sqrt{2} \sin 15°$
Ainsi $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} = \sqrt{2} \times \sin 15°$

Donc $\sin 15° = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

II

Ex 1 a) $\frac{3}{4}$ et $\frac{\sqrt{7}}{4}$ sont des nombres compris entre 0 et 1

et $\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2 = \frac{9+7}{16} = 1$

Donc oui il existe un angle aigu $\hat{A}$ tel que
$\cos \hat{A} = \frac{3}{4}$ et $\sin \hat{A} = \frac{\sqrt{7}}{4}$.

b) $\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{5} + \frac{4}{25} = \frac{24}{25}$ et $\frac{24}{25} \neq 1$.

Donc non il n'existe aucun angle aigu $\hat{A}$ tel que $\cos \hat{A} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ et $\sin \hat{A} = \frac{2}{5}$.

Ex 2

- $\cos \hat{C} = \frac{\sqrt{2}}{3}$ or $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

Donc $\sin^2 \hat{C} = 1 - \cos^2 \hat{C}$

$= 1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2$

$= 1 - \frac{2}{9}$

$\sin^2 \hat{C} = \frac{7}{9}$

- Or $\hat{C}$ est aigu donc $0 < \sin \hat{C} < 1$.

Donc $\sin \hat{C} = \sqrt{\frac{7}{9}} = \frac{\sqrt{7}}{3}$

- $\tan \hat{C} = \frac{\sin \hat{C}}{\cos \hat{C}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{14}}{2}$

Ex 3

1) $\hat{A}$ est un angle aigu donc $0 < \hat{A} < \frac{\pi}{2}$.

$1 + \tan^2 \hat{A} = 1 + \left(\frac{\sin \hat{A}}{\cos \hat{A}}\right)^2 = 1 + \frac{\sin^2 \hat{A}}{\cos^2 \hat{A}} = \frac{\cos^2 \hat{A} + \sin^2 \hat{A}}{\cos^2 \hat{A}}$

Donc $1 + \tan^2 \hat{A} = \frac{1}{\cos^2 \hat{A}}$ $\left(\hat{A} \neq \frac{\pi}{2},\ \cos \hat{A} \neq 0\right)$

2) $\tan \hat{B} = \frac{1}{2}$ et $0 < \hat{B} < \frac{\pi}{2}$ (angle aigu)

Donc $\cos^2 \hat{B} = \frac{1}{1 + \tan^2 \hat{B}} = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{5}{4}} = \frac{4}{5}$

Comme $\hat{B}$ est aigu, $0 < \hat{B} < \frac{\pi}{2}$ et donc $\cos \hat{B} > 0$

Donc $\cos \hat{B} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

3) $\sin^2 \hat{B} = 1 - \cos^2 \hat{B} = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$ et comme $\hat{B}$ aigu

$\sin \hat{B} > 0$, $\sin \hat{B} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Ex 4

$(\cos \hat{A} + \sin \hat{A})^2 = \cos^2 \hat{A} + 2 \cos \hat{A} \sin \hat{A} + \sin^2 \hat{A}$

$= (\cos^2 \hat{A} + \sin^2 \hat{A}) + 2 \cos \hat{A} \sin \hat{A}$

$= 1 + 2 \cos \hat{A} \sin \hat{A}$

Ex 5 $\sin 15° = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

1) $\left(\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \dfrac{6+2\sqrt{12}+2}{16} + \dfrac{6-2\sqrt{12}+2}{16}$

$= \dfrac{16}{16} = 1$

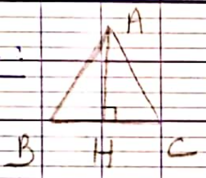
Donc $\cos 15° = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

2) $\tan 15° = \dfrac{\sin 15°}{\cos 15°} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} \times \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1}$

$\tan 15° = \dfrac{3-2\sqrt{3}+1}{3-1} = \dfrac{4-2\sqrt{3}}{2} = 2-\sqrt{3}$

Activités

Act 1 :



1) $\widehat{ABH} = 60°$ (triangle équilatéral)
(AH) hauteur issue de A est également bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$, ainsi
$\widehat{BAH} = 30°$

2) ABH triangle rectangle en H donc d'après le théorème de Pythagore : $AH^2 + HB^2 = AB^2$ (1)
Comme (AH) est hauteur d'un triangle équilatéral elle est aussi médiane donc H milieu de [BC]
ainsi $BH = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}a$.
Donc (1) $\Leftrightarrow$ $AH^2 = AB^2 - HB^2$

$= a^2 - \left(\frac{1}{2}a\right)^2$

$= a^2 - \frac{1}{4}a^2$

$= \frac{3}{4}a^2$

Sachant que $AH \geq 0$, on obtient donc $AH = \frac{\sqrt{3}}{2}a$.

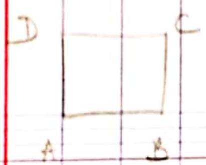
3) Dans ABH rectangle en H :
- $\cos \widehat{BAH} = \dfrac{AH}{AB} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{a} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ donc $\cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
- $\sin \widehat{BAH} = \dfrac{BH}{AB} = \dfrac{\frac{1}{2}a}{a} = \dfrac{1}{2}$ donc $\sin 30° = \dfrac{1}{2}$

et
- $\cos \widehat{ABH} = \dfrac{BH}{AB} = \dfrac{1}{2}$ donc $\cos 60° = \dfrac{1}{2}$
- $\sin \widehat{ABH} = \dfrac{AH}{AB} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ donc $\sin 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

4) • $\tan 30° = \dfrac{\sin 30°}{\cos 30°} = \dfrac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

et • $\tan 60° = \dfrac{\sin 60°}{\cos 60°} = \dfrac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$

Act 2



1) Dans ABC rectangle en B : $AB^2 + BC^2 = AC^2$

Donc $AC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$

et comme $AC \geq 0$, on a $AC = \sqrt{2}\,a$.

2) $\widehat{BAC} = 45°$ (ABC rectangle isocèle en B)

et $\widehat{BCA} = 45°$

3) Dans ABC rectangle en B :

$\cos \widehat{BAC} = \dfrac{BA}{AC} = \dfrac{a}{\sqrt{2}\,a} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ donc $\cos 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

et $\sin \widehat{BAC} = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{a}{\sqrt{2}\,a} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ donc $\sin 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Valeurs Remarquables à connaître :

Angle x	$30°$	$45°$	$60°$
$\cos x$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{1}{2}$
$\sin x$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$