Chap 2 - Géométrie vectorielle

Thème : Géométrie

Table des matières

I Translation et vecteur

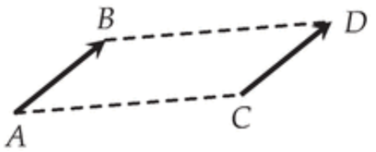
I 1 Translation

I 1 a Définition

Définition : On considère deux points A et B du plan.
On appelle **translation qui transforme A en B**, la transformation qui, à tout point M du plan, associe l'unique point M' tel que $[AM']$ et $[BM]$ ont même milieu.

I 1 b Propriété

Propriété : On considère quatre points A, B, C et D.
Dire que la translation qui transforme A en B transforme C en D équivaut à dire que $AB\underline{D}C$ est un **parallélogramme** (éventuellement aplati).



I 2 Vecteur

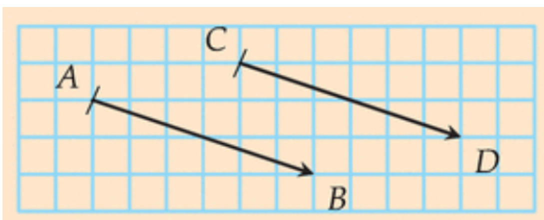
I 2 a Définition

Définition : A chaque translation est associé un **vecteur**.
Pour A et B deux points distincts, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est associé à la translation qui transforme A en B.
Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est caractérisé par :
• sa **direction** : celle de la droite (AB),
• son **sens** (de A vers B)
• et sa **longueur** (ou **norme**) : AB .
A est l'**origine** du vecteur et B son **extrémité**.

Remarque importante : Si A=B, alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{0}$: le **vecteur nul**.
Ce vecteur n'a **ni direction, ni sens**, seule sa longueur, ou norme, est définie et vaut 0.
Ce vecteur est associé à la translation qui transforme un point en lui-même (appelée la transformation "identité").

I 2 b Vecteurs égaux

Définition :
Deux vecteurs qui définissent la même translation sont dits **égaux**.
Deux **vecteurs égaux** ont :
• **même direction**,
• **même sens**,
• et **même longueur**.



Remarque : Quand plusieurs vecteurs sont égaux, on dit qu'ils sont les **représentants d'un même vecteur**, noté souvent à l'aide d'une lettre minuscule : $\overrightarrow{u}$, par exemple.
Pour un vecteur donné, il existe une **infinité** de représentants.

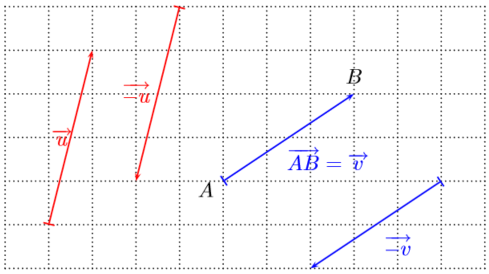
Propriété : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow AB\underline{D}C$ est un parallélogramme (éventuellement aplati).

Un cas d'égalité remarquable :

Propriété : Soit A et B deux points du plan.
Le point I est le milieu du segment $[AB]$ ssi $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$.

I 2 c Vecteurs opposés

Définition :
Quels que soient les points A et B, le vecteur $\overrightarrow{BA}$ est appelé vecteur opposé au vecteur $\overrightarrow{AB}$.



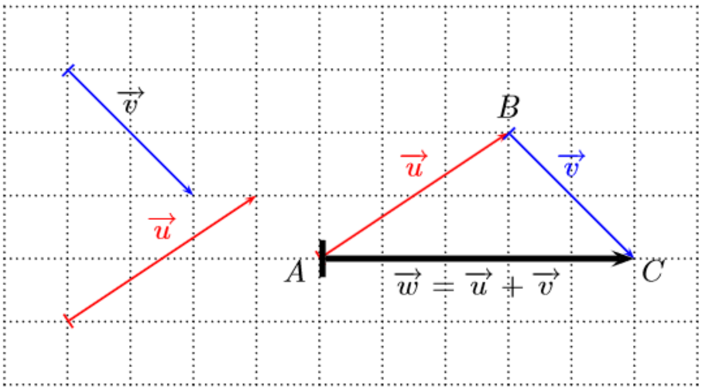
Remarques :
1) $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.
2) Attention au sens de la flèche sur les deux lettres : toujours vers la droite !
3) Deux **vecteurs opposés** ont donc :
- **même direction**,
- **même longueur**,
- mais **des sens opposés, contraires**.

II Opérations sur les vecteurs

II 1 Somme de deux vecteurs

Définition :
Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs. La somme des deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est le vecteur $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ associé à la translation résultant de l'enchainement des translations de vecteurs $\overrightarrow{u}$ et de vecteur $\overrightarrow{v}$.

Méthode de construction :
Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs, le vecteur somme $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ se construit de la façon suivante :
Soit A un point du plan, on trace le représentant de $\overrightarrow{u}$ d'origine A : il a pour extrémité B,
puis on trace le représentant de $\overrightarrow{v}$ d'origine B : il a pour extrémité C. (méthode du "bout à bout")
Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est un représentant du vecteur $\overrightarrow{w}$.



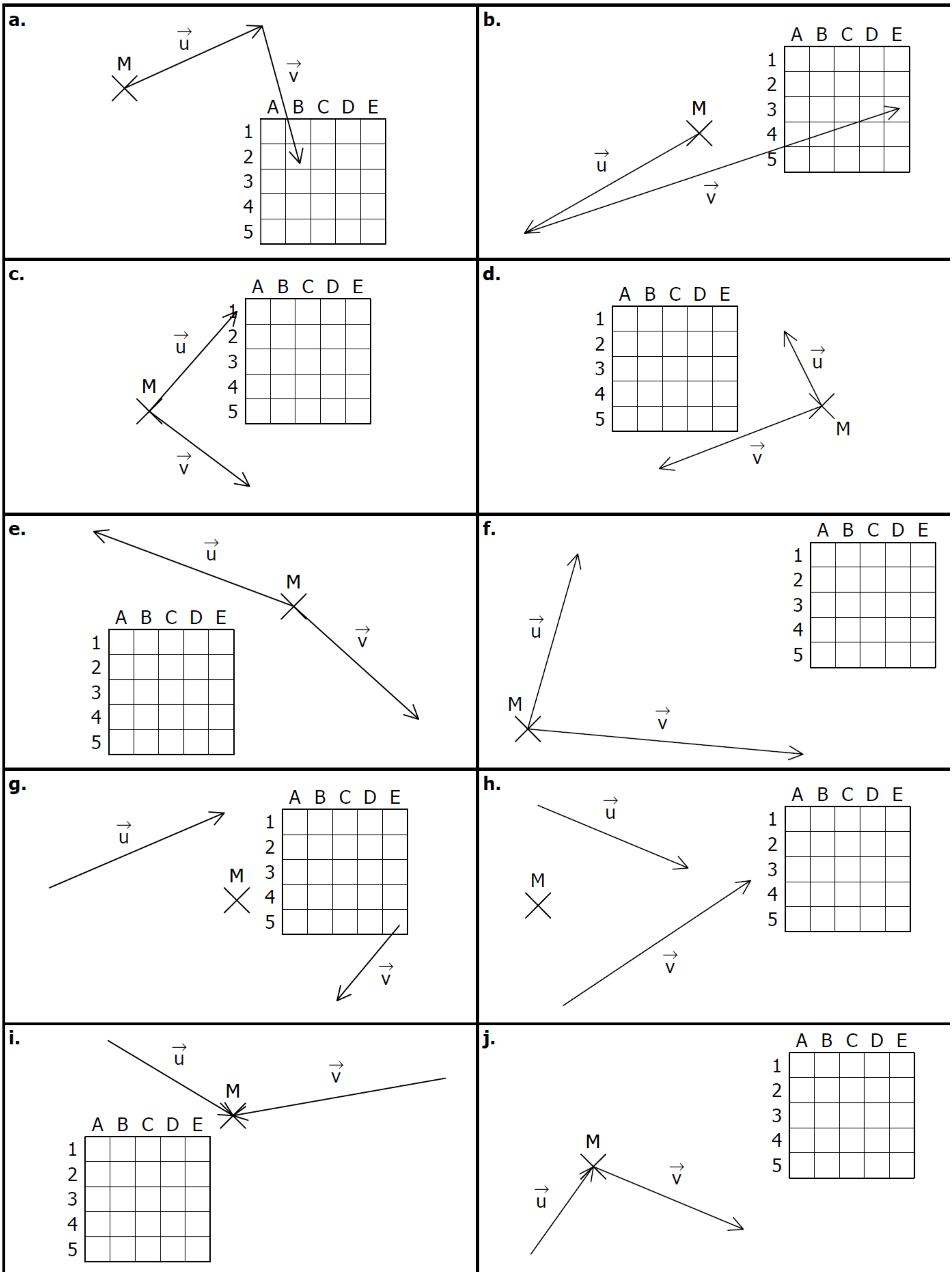
Conséquence très importante de la définition : la Relation de Chasles
Pour tous points A, B et C du plan, on a $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Propriétés :
Quels que soient les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ du plan, on a :

1. $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$,
2. $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w})$,
3. $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{u}$.

Propriétés : la règle du parallélogramme
Soit $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ deux vecteurs de **même origine** A.
On a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ ssi D est le point tel que $AB\underline{D}C$ soit un parallélogramme.

Exercice (Mathenligne) : Construire, dans chaque cas, un représentant du vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ à partir du point M :



II 2 Différence de deux vecteurs

Définition :
Soustraire un vecteur, c'est additionner son opposé.

II 3 Multiplication d'un vecteur par un réel

Définition : Soit $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ un vecteur non nul et k un réel non nul, on définit le vecteur $\overrightarrow{v} = k\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AC}$ par :
• A, B et C sont alignés,
• Si $k > 0$, $AC = kAB$ et B et C sont du **même côté** par rapport à A, c'est-à-dire $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$ de même sens.
• Si $k < 0$, $AC = -kAB$ et B et C sont **de part et d'autre** de A, c'est-à-dire $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$ de sens contraires.

Remarque : Si $\overrightarrow{u} = 0$ ou $k = 0$ alors $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.

Propriété : Soit A et B deux points du plan. Le point I est le milieu du segment [AB] ssi $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Propriétés :
Quels que soient les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et les réels k, l et λ , on a :
• $k(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = k\overrightarrow{u} + k\overrightarrow{v}$
• $(k + l)\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{u} + l\overrightarrow{u}$
• $k(\lambda\overrightarrow{u}) = (k\lambda)\overrightarrow{u}$
• $k\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0} \iff k = 0$ ou $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$

III Colinéarité

III 1 Définition

Définition :
Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont **colinéaires** s'il existe un réel k non nul tel que $\overrightarrow{v} = k\overrightarrow{u}$.
Autrement dit, les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ont la **même direction**.

Remarque : Par définition, le vecteur nul est colinéaire à tous les vecteurs du plan.

III 2 Propriétés

Propriété :
• Trois points A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires,
• Deux droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Méthode : Caractérisation vectorielle d'un parallélogramme et du milieu d'un segment.(mathenligne)

Soit $ABCD$ un parallélogramme de centre I.

1. Compléter, en justifiant, les égalités :
   (a) $\overrightarrow{AB} = ...$
   (b) $\overrightarrow{BC} = ...$
   (c) $\overrightarrow{AI} = ...$
   (d) $\overrightarrow{IB} = ...$
   (e) $\overrightarrow{IA} + ... = \overrightarrow{0}$
   (f) $\overrightarrow{IB} + ... = \overrightarrow{0}$
2. En utilisant les égalités précédentes, prouver que :
   (a) $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \overrightarrow{0}$
   (b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{0}$
   (c) $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{DI} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$
   (d) $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CI} + \overrightarrow{DI} = \overrightarrow{BA}$
   (e) Soit E le point tel que $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AB}$. Montrer que $\overrightarrow{CE} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{0}$
   (f) Soit F le point tel que $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{BC}$. Montrer que $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AD}$

Méthode : Démontrer l'alignement ou le parallélisme : colinéarité et RdC.(mathenligne)

Exercice 1 :
DEF est un triangle. Soit P tel que $\overrightarrow{DP} = -3\,\overrightarrow{EF}$. Soit Q tel que $\overrightarrow{DQ} = \frac{2}{3}\,\overrightarrow{EF}$.
Montrer que les points D, P et Q sont alignés.

Exercice 2 :
$ABCD$ est un parallélogramme. Soit I tel que $\overrightarrow{AI} = 2\,\overrightarrow{AD}$. Soit J tel que $\overrightarrow{BJ} = 2\,\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$.

1. Montrer que $\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{BD}$.
2. Montrer que $\overrightarrow{CJ} = -2\,\overrightarrow{BD}$.
3. En déduire que les points C, I et J sont alignés.

Exercice 3 :
ABC est un triangle. Soit M tel que $\overrightarrow{AM} = 2\,\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$. Soit N tel que $\overrightarrow{AN} = -\,\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\,\overrightarrow{AC}$.
Montrer que les points A, M et N sont alignés.

Exercice 4 :
DEF est un triangle. Soit M tel que $\overrightarrow{DM} = \frac{3}{4}\,\overrightarrow{DE} - \overrightarrow{DF}$. Soit N tel que $\overrightarrow{DN} = -\frac{3}{2}\,\overrightarrow{DE} + 2\,\overrightarrow{DF}$.
Montrer que les points D, M et N sont alignés.

Exercice 5 :
ABC est un triangle. Soit M tel que $\overrightarrow{AM} = 3\,\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$. Soit N tel que $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC}$.
Montrer que (MN) et (AC) sont parallèles.

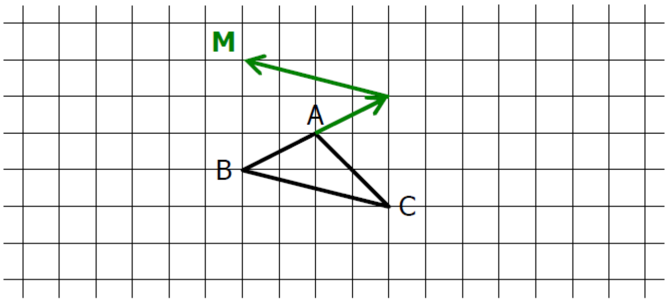
Exercice 6 :
ABC est un triangle. Soit M tel que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} - 3\,\overrightarrow{BC}$. Soit N tel que $\overrightarrow{BN} = 2\,\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$.
Montrer que (MN) et (AC) sont parallèles.

Méthode : Placer un point défini par une égalité vectorielle.(mathenligne)

ABC est un triangle.

Ex 1 : Placer M tel que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB}$.

Méthode : *On part du point A (connu) et on effectue les trajets indiqués pour trouver M.*

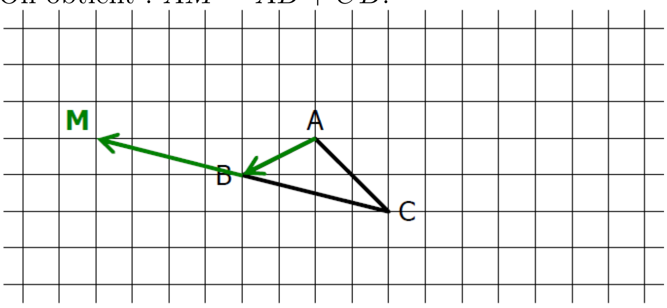


1. Placer N tel que $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{BC} + 2\,\overrightarrow{BA}$.
2. Placer P tel que $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{AC} - 3\,\overrightarrow{AB}$.

Ex 2 : Placer M tel que $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$.

Méthode : *On remplace chaque vecteur par son opposé pour se ramener à "$\overrightarrow{AM} = ...$".*

On obtient : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$.

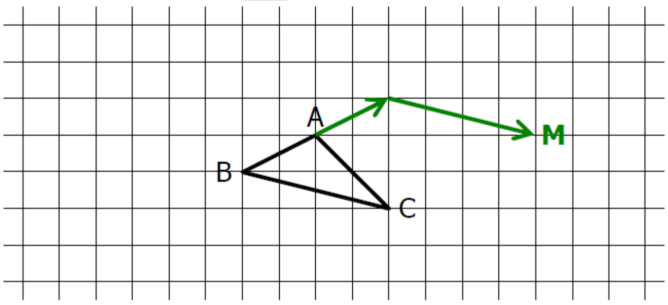


1. Placer N tel que $\overrightarrow{NC} = \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{BA}$.
2. Placer P tel que $\overrightarrow{PA} = 2\,\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$.

Ex 3 : Placer M tel que $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CB}$.

Méthode : *On isole $\overrightarrow{AM}$ comme on le ferait pour une équation classique.*

On obtient : $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$ et donc : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$.

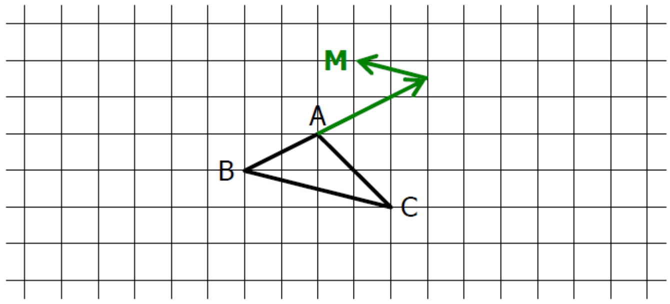


1. Placer N tel que $\overrightarrow{NC} + 2\,\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$.
2. Placer P tel que $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{BC} = 2\,\overrightarrow{AC}$.

Ex 4 : Placer M tel que $2\,\overrightarrow{MA} = 3\,\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

Méthode : *On divise chaque terme de la somme par le coefficient de $\overrightarrow{MA}$ pour se ramener à "$\overrightarrow{MA} = ...$".*

On obtient : $\frac{2}{2}\,\overrightarrow{MA} = \frac{3}{2}\,\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\,\overrightarrow{BC}$ et donc : $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\,\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\,\overrightarrow{CB}$.

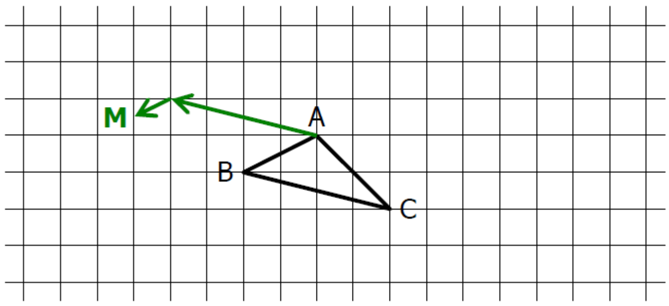


1. Placer N tel que $4\,\overrightarrow{NC} = \overrightarrow{BC}$.
2. Placer P tel que $2\,\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Ex 5 : Placer M tel que $2\,\overrightarrow{MA} = 3\,\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

Méthode : *On utilise la relation de Chasles pour n'avoir qu'un seul type de vecteur contenant le point M.*

On obtient : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} = 2\,\overrightarrow{BC}$ et donc :
$2\,\overrightarrow{MA} = 2\,\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}$ donc
$\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\,\overrightarrow{BA}$ soit
$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}\,\overrightarrow{AB}$.



1. Placer N tel que $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} = \overrightarrow{0}$.
2. Placer P tel que $\overrightarrow{PA} - 2\,\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{AB}$.