Loi binomiale

Probabilité - Chapitre 2

Table des matières

I Rappels et introduction, variable aléatoire discrète

Variable aléatoire : définition
Loi de probabilité

Exercice 1 - Activité -

Dans une entreprise on dispose de $5\ 000$ euros pour le salaire de 5 personnes.
Soit 3 manières A, B et C pour répartir ces $5\ 000$ euros entre ces 5 personnes.

Calculer la moyenne, la variance et l'écart-type de ces 3 répartitions des salaires.

	A	B	C
Personne 1	$1\ 000$	800	200
Personne 2	$1\ 000$	900	800
Personne 3	$1\ 000$	$1\ 000$	$1\ 000$
Personne 4	$1\ 000$	$1\ 100$	$1\ 200$
Personne 5	$1\ 000$	$1\ 200$	$1\ 800$

Objectifs : faire les calcul à la main pour rappels des définitions de ces indicateurs, puis utilisation du mode statistique de la calculatrice, et interprétation des notions d'espérance et de variance.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
=				Moyenne			=OneVar(				=OneVar(				=OneVar(
1	1000	800	200			Titre	Statistiq...			Titre	Statistiq...			Titre	Statistiq...
2	1000	900	800			$\bar{x}$	1000.			$\bar{x}$	1000.			$\bar{x}$	1000.
3	1000	1000	1000			Σx	5000.			Σx	5000.			Σx	5000.
4	1000	1100	1200			Σx^2	5.E6			Σx^2	5.1E6			Σx^2	6.36E6
5	1000	1200	1800			$sx := s_{n-1}x$	0.			sx :=...	158.114			sx :=...	583.095
6				Ecart-type		$\sigma x := \sigma_n x$	0.			σx :=...	141.421			σx :=...	521.536
7						n	5.			n	5.			n	5.
8						MinX	1000.			MinX...	800.			MinX...	200.
9						Q_1X	1000.			Q_1X	850.			Q_1X	500.
10						MedianX	1000.			Med...	1000.			Med...	1000.
11						Q_3X	1000.			Q_3X	1150.			Q_3X	1500.
12						MaxX	1000.			Max...	1200.			Max...	1800.
13						$SSX := \Sigma(x-\bar{x})^2$	0.			SSX...	100000.			SSX...	1.36E6
14															
15		Q3-Q1		et		variance					A diviser par l'effectif total : 5				
16		0		0.	a	0.									
17		300		141....	b	20000.									
18		1000		521....	c	272000.									

I 1 Espérance

DEFINITION : Espérance (moyenne)

L'espérance mathématique de la loi de probabilité de X est le nombre **réel**, noté $E(X)$, défini par : $\boxed{E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i\, x_i}$

(Il s'agit de la moyenne pondérée, elle est "pondérée" par les probabilités ;
en statistique, la moyenne est pondérée par les fréquences.)

PROPRIETE : Linéarité

Soit a et b deux réels et X une variable aléatoire. Alors : $\boxed{E(aX+b) = aE(X)+b}$

DEMONSTRATION :

Si X prend les valeurs x_1, x_2, ..., x_n alors $aX+b$ prend les valeurs ax_1+b, ax_2+b, ..., ax_n+b.
Donc quelle que soit la valeur de i, la probabilité de $X = x_i$ est égale à la probabilité de $aX+b = ax_i+b$.
Si on pose $P(X = x_i) = p_i$, on a alors :

$$E(aX+b) = \sum_{i=1}^{n}(ax_i+b)\,P(aX+b = ax_i+b) = \sum_{i=1}^{n}(ax_i+b)p_i = \sum_{i=1}^{n} ax_ip_i + \sum_{i=1}^{n} bp_i = a\sum_{i=1}^{n} p_i\,x_i + b\sum_{i=1}^{n} p_i$$

Or $\sum_{i=1}^{n} p_i\,x_i = E(X)$ et $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ donc $E(aX+b) = aE(X)+b$.

I 2 Variance et écart-type

I 2 a Définitions

DEFINITION : Variance et écart-type

La variance de la loi de probabilité de X est le **nombre réel positif** noté $V(X)$ défini par :

$$\boxed{V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i(x_i - E(X))^2}$$

(Somme pondérée des carrés des écarts à la moyenne)

L'écart-type de la loi de probabilité de X est le **nombre réel positif** noté $\sigma(X)$ défini par : $\boxed{\sigma(X) = \sqrt{V(X)}}$

I 2 b Propriétés de la variance

PROPRIETE : 2nde formule de la variance, formule de König-Huygens

Soit X une variable aléatoire. Alors : $\boxed{V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} p_i\, x_i\right)^2 = E(X^2) - E(X)^2}$ *(pratique pour les calculs)*

DEMONSTRATION :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i(x_i - E(X))^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i(x_i^2 - 2 \times x_i \times E(X) + E(X)^2) = \sum_{i=1}^{n} p_i\ x_i^2 - 2E(X)\sum_{i=1}^{n} p_i\ x_i + E(X)^2 \sum_{i=1}^{n} p_i$$

or $\sum_{i=1}^{n} p_i\ x_i^2 = E(X^2)$, $\sum_{i=1}^{n} p_i\ x_i = E(X)$ et $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ donc $V(X) = E(X^2) - 2E(X)^2 + E(X)^2 = E(X^2) - E(X)^2$

PROPRIETE : Non-linéarité de la variance

Soit a et b deux réels et X une variable aléatoire. Alors pour la **variance** $\boxed{V(aX+b)=a^2V(X)}$
et en conséquence pour l'**écart-type** $\boxed{\sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)}$ *(valeur absolue de a)*

DEMONSTRATION :

$$V(aX+b)=\sum_{i=1}^{n}p_i(ax_i+b-E(aX+b))^2 \text{ donc } V(aX+b)=\sum_{i=1}^{n}p_i(ax_i+b-(aE(X)+b))^2$$

$$V(aX+b)=\sum_{i=1}^{n}p_i(ax_i-aE(X))^2 \text{ donc } V(aX+b)=\sum_{i=1}^{n}p_i\,a^2(x_i-E(X))^2$$

$$V(aX+b)=a^2\sum_{i=1}^{n}p_i\,(x_i-E(X))^2 \text{ donc } V(aX+b)=a^2\,V(X)$$

$$\sigma(aX+b)=\sqrt{V(aX+b)}=\sqrt{a^2\,V(X)}=|a|\sigma(X)$$

II Somme de variables aléatoires

PROPRIETE : admise, sera démontrée au chapitre P3

Soit X et Y deux variables aléatoires. On a alors $\boxed{E(X+Y)=E(X)+E(Y)}$ (2ème formule de la **linéarité** de l'espérance)

Si X et Y sont **indépendantes** on a également $\boxed{V(X+Y)=V(X)+V(Y)}$

REMARQUE(S) :

La **linéarité de l'espérance** se traduit par : $\boxed{E(X+Y)=E(X)+E(Y)}$ **et** $\boxed{E(aX+b)=aE(X)+b}$
(Applications linéaires, post-bac)

III Schéma de Bernoulli

III 1 Problématique

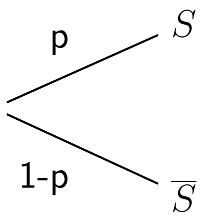
Exercice 2 - Problématique -

On lance vingt fois de suite, dans les mêmes conditions, un dé bien équilibré à 6 faces.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir 20 fois la face 6 sur les 20 lancers ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir 0 fois la face 6 sur les 20 lancers ?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir 4 fois la face 6 sur les 20 lancers ?

III 2 Épreuve de Bernoulli

DEFINITION : Épreuve de Bernoulli



Lorsque, dans une expérience aléatoire, on s'intéresse uniquement à la réalisation d'un certain événement S (appelé « succès ») ou à sa non-réalisation $\overline{S}$ (appelé « échec »), on dit que cette expérience est une **épreuve de Bernoulli**.

Si p est un réel appartenant à l'intervalle $[0\,;1]$, on modélise une épreuve de Bernoulli avec l'arbre ci-contre.
La probabilité du **succès** S est p et celle de l'**échec** $\overline{S}$ est $q = 1 - p$.

III 3 Loi de Bernoulli

DEFINITION : Loi de Bernoulli

Soit p un réel de l'intervalle $[0\,;1]$ et une **épreuve de Bernoulli** de **succès** S ayant pour **probabilité** p.
La **variable aléatoire** X suit une **loi de Bernoulli** lorsqu'elle prend la valeur **1 en cas de succès**, et **0 en cas d'échec**.
On résume la **loi de Bernoulli** par le tableau :

x_i	1	0
$P(X = x_i)$	p	$q = 1 - p$

Exemple : Un jeu de dé est tel que le joueur gagne lorsque le 6 sort et perd dans le cas contraire.

Soit S l'événement « le 6 sort » ; alors si le dé n'est pas pipé, $P(S) = \dfrac{1}{6}$ et $P(\overline{S}) = 1 - \dfrac{1}{6} = \dfrac{5}{6}$.

La variable aléatoire qui prend la valeur 1 si le 6 sort et la valeur 0 dans les cinq autres cas suit une loi de Bernoulli :

x_i	1	0
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$

PROPRIETE : Espérance, variance et écart-type d'une VA suivant la loi de Bernoulli

Si X est une variable aléatoire qui suit la **loi de Bernoulli**, alors :

L'**espérance** de X est $\boxed{E(X) = p}$, sa **variance** est $\boxed{V(X) = p(1-p)}$ et son **écart-type** est $\boxed{\sigma = \sqrt{p(1-p)}}$

DEMONSTRATION :

• L'**espérance** de X est : $E(X) = P(X = 1) \times 1 + P(X = 0) \times 0 = p \times 1 + (1-p) \times 0 = p$.

• La **variance** de X est : $V(X) = P(X = 1) \times (1 - E(X))^2 + P(X = 0) \times (0 - E(X))^2 = p \times (1-p)^2 + (1-p) \times (0-p)^2$

$$V(X) = p \times (1-p)^2 + (1-p) \times p^2 = p(1-p)(1-p+p) = p(1-p).$$

• Immédiat pour l'écart-type, racine carrée de la variance.

Exemple : On reprend l'exemple précédent, et on a donc $E(X) = \dfrac{1}{6}$ et $V(X) = \dfrac{1}{6} \times \dfrac{5}{6} = \dfrac{5}{36}$

III 4 Schéma de Bernoulli

DEFINITION : Schéma de Bernoulli

Soit n un entier **naturel non nul**.
Lorsque l'on effectue n épreuves de Bernoulli **successives, identiques et indépendantes les unes des autres**, on constitue alors un **schéma de Bernoulli d'ordre** n.

Exemple : L'expérience consistant à effectuer 20 fois de suite le lancer de dé dans l'activité de début de chapitre est un schéma de Bernoulli d'ordre 20.

IV Loi binomiale

IV 1 Définition

DEFINITION : Loi binomiale

Soit n un entier **naturel non nul** et p un **réel compris entre 0 et 1**.
On considère un **schéma** de Bernoulli constitué par la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.
Pour chacune d'elles, on note p la probabilité d'obtenir un succès S.
Soit X la **variable aléatoire** égale au **nombre de succès** obtenus parmi les n épreuves.

Alors on dit que la loi de probabilité de X est une **loi binomiale de paramètres** n et p. On note : $\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{B}(n\,;p)}$

IV 2 Propriété

IV 2 a Définition de factorielle

DEFINITION : Factorielle

Soit n un entier **naturel non nul**. On appelle **factorielle** de n, le nombre : $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times 1 = \prod_{i=1}^{n} i$.

Par convention, $0! = 1$.

IV 2 b Formule du coefficient binomial

PROPRIETE :

Le nombre de chemins, qui correspond au nombre de combinaisons possibles de k succès parmi n épreuves, se note $\binom{n}{k}$ et est appelé un coefficient binomial ou une combinaison. Pour le calculer, on peut utiliser la formule suivante (qui sera démontrée au chapitre suivant) : $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{(n-k)!\ k!}$

IV 2 c Calcul des probabilités

PROPRIETE : Théorème

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi **binomiale** de paramètres n et p. Alors pour tout entier k compris entre 0 et n, on a :

$$\boxed{P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}$$

DEMONSTRATION :

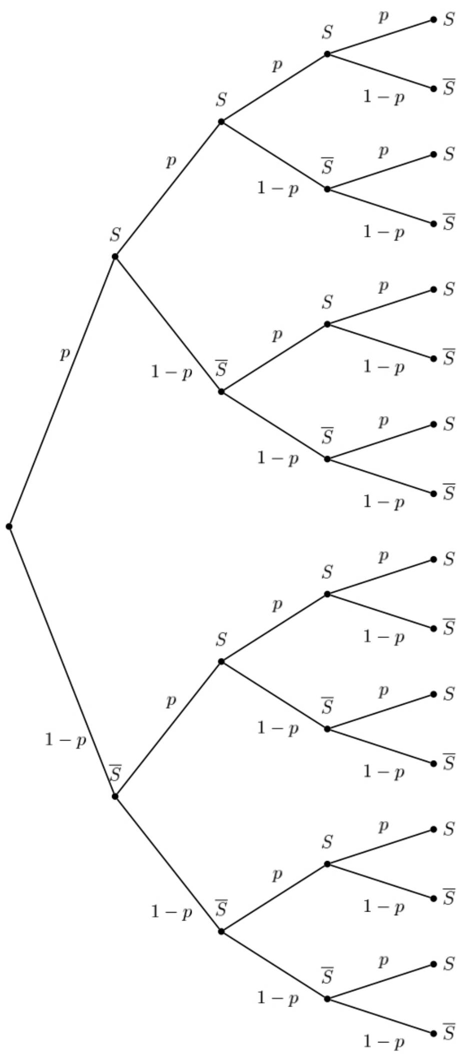
♡ **Bac** ♡

L'événement $X = k$ est associé à l'ensemble des chemins dans l'arbre pour lesquels il y a exactement k succès et donc $(n-k)$ échecs.

Chacun de ces chemins a une probabilité égale au produit des probabilités inscrites sur les branches qui constituent ce chemin, c'est-à-dire $p^k(1-p)^{n-k}$.

Or, il y a $\binom{n}{k}$ chemins de ce type. D'où $\boxed{P(X=k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}}$

Exemple :
Considérons un schéma de Bernoulli constitué de la répétition de 4 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. On pose $p = P(S)$ où S est le succès de l'épreuve de Bernoulli.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de succès obtenus parmi les 4 épreuves.
Cette situation peut être représentée par l'arbre ci-après :



- $P(X = 4) = p^4$

- $P(X = 0) = (1 - p)^4$

- $P(X = 1)$:
L'événement $X = 1$ est réalisé par **quatre** chemins différents de l'arbre.
Chaque chemin comporte 1 succès parmi 4 épreuves.
Ce nombre de chemins est $\binom{4}{1}$. On a $\binom{4}{1} = 4$.
On remarque que chacun de ces chemins a la même probabilité : $p(1-p)^3$

Ainsi : $P(X = 1) = \binom{4}{1} \times p \times (1 - p)^3 = 4p(1 - p)^3$.

- $P(X = 2) = \binom{4}{2} \times p^2 \times (1 - p)^2 = 6p^2(1 - p)^2$.

- $P(X = 3) = \binom{4}{3} \times p^3 \times (1 - p) = 4p^3(1 - p)$.

On a ainsi déterminer la loi de probabilité de X.

On peut vérifier que $\sum\limits_{k=0}^{4} P(X = k) = 1$ (formule du binôme de Newton).

IV 3 Espérance et variance de la loi binomiale

PROPRIETE :

Si X est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n\,;p)$, alors :

$$\boxed{E(X) = np} \quad , \quad \boxed{V(X) = np(1-p)} \quad \text{et} \quad \boxed{\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{np(1-p)}}$$

DEMONSTRATION :

♡ **Bac** ♡

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et p.
Il existe alors n variables aléatoires de Bernoulli de paramètre p telles que $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$.
Et pour tout k entier compris entre 1 et n, on a $E(X_k) = p$ et $V(X_k) = p(1-p)$

On a donc d'une part, $E(X) = E(X_1) + E(X_2) + \ldots + E(X_n) = p + p + \ldots + p = np$

et d'autre part, comme les variables aléatoires X_1, X_2, ... X_n sont **indépendantes**, on a :
$V(X) = V(X_1) + V(X_2) + \ldots + V(X_n) = p(1-p) + p(1-p) + \ldots + p(1-p) = np(1-p)$.

Enfin pour l'écart-type : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{np(1-p)}$

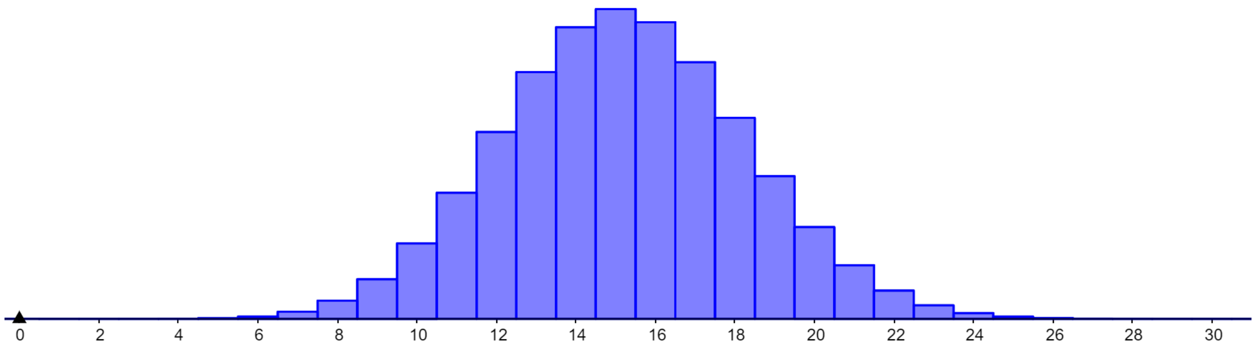
V Introduction à l'échantillonnage

V 1 Représentation : diagramme en barres (ou bâtons)

On peut représenter la loi binomiale par son **diagramme en bâtons**.
Ci-dessous la loi binomiale $B(40; 0,38)$.
On observe alors une représentation en forme de **"cloche" centrée** sur l'**espérance**, ici $E(X) = 40 \times 0,38 = 15,2$.

Plus l'**écart-type** est grand et plus le diagramme est étalé et "aplati".

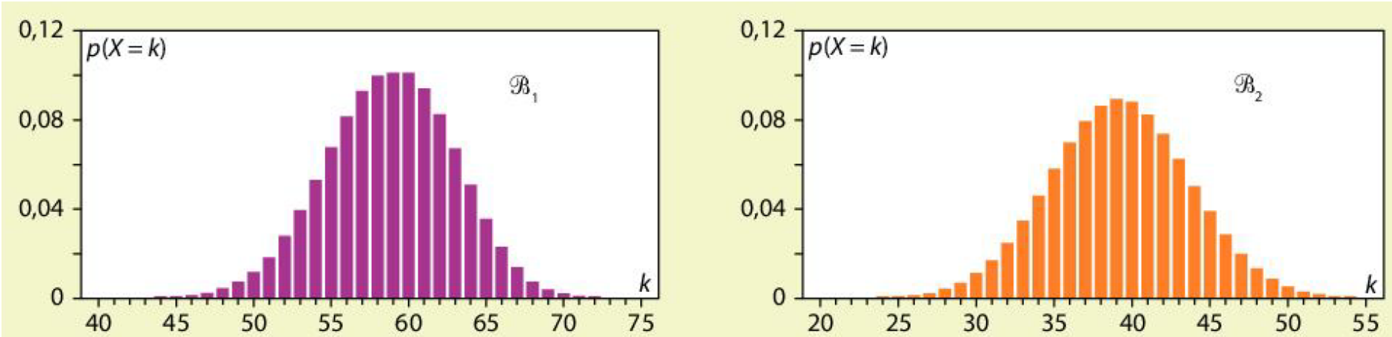
Plus il est petit, plus la "cloche" est étroite et haute.



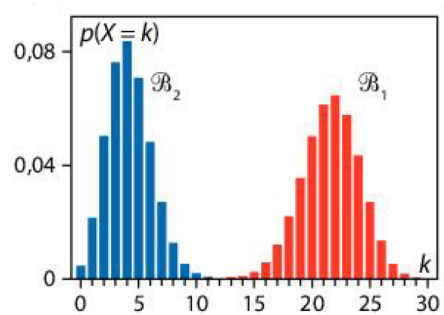
Exercice 3

A) On donne les diagrammes en barres associés à deux lois binomiales B_1 (à gauche) et B_2 (à droite).

1. Soit X_1 la variable aléatoire suivant la loi B_1. Estimer graphiquement $E(X_1)$.
2. Les paramètres de B_1 sont $p_1 = 0,74$ et n_1. Déterminer une valeur possible pour n_1.
3. B_2 admet pour paramètres $n_2 = n_1$ (celle déterminée à la question précédente) et p_2.
   L'écart-type associé à la loi B_2 est-il plus ou moins grand que celui associé à la loi B_1 ?



B) On donne les diagrammes en bâtons associés à deux lois binomiales B_1 et B_2 de paramètres $n = 30$ et p inconnu. Laquelle a la plus grande espérance ? Le plus grand écart-type ?



V 2 Intervalle de fluctuation

PROPRIETE :

Soit n un entier naturel non nul, α et p deux nombres réels de l'intervalle $[0\,;1]$
et X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $B(n,p)$.

Il existe un intervalle I non vide tel que $P(X \in I) \geqslant 1-\alpha$.

DEMONSTRATION :

L'intervalle $[0\,;n]$ convient.
En effet, pour tout $\alpha \in [0\,;1]$, $1-\alpha \leqslant 1$ et $P(0 \leqslant X \leqslant n) = 1$ donc on a bien $P(X \in I) \geqslant 1-\alpha$.

REMARQUE(S) :

1. La suite (u_k) de terme général $u_k = P(X \leqslant k)$ est croissante et à partir d'un certain rang ses termes valent tous 1.
2. Dans la pratique, on cherchera souvent un intervalle dont l'amplitude est la plus petite possible.
3. Selon le contexte, l'intervalle est de la forme $[0\,;k]$, $[k\,;n]$ ou $[a\,;b]$ (intervalle souvent centré dans ce cas).

Exercice 4

On considère la variable aléatoire X qui suit la loi binomiale $B(n\,;p)$ avec $n=40$ et $p=0,38$.
Dans chaque cas, déterminer les entiers a ou b vérifiant $P(a \leqslant X \leqslant b) \geqslant 0,95$ et la condition donnée.

1. On pose $a=0$ et on cherche le plus petit entier b qui puisse convenir.
2. On pose $b=40$ et on cherche le plus grand entier a qui puisse convenir.
3. On cherche l'intervalle $[a\,;b]$ de plus petite amplitude possible tel que $P(X \leqslant a) \approx P(X \geqslant b)$ (arrondir à 10^{-3}).

DEFINITION :

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p, α un réel de $[0\,;1]$ et a et b des réels.

Un intervalle $[a\,;b]$ tel que $P(a \leqslant X \leqslant b) \geqslant 1-\alpha$ est appelé **intervalle de fluctuation au seuil** de $1-\alpha$ (ou au **risque** α) associé à X.

Exercice 5

Une société de vente en ligne de matériel de jardinage propose à ses clients des lots de 80 asperseurs.
Une étude a montré que 5% des asperseurs vendus sont défectueux.
On choisit un lot au hasard et on note X la variable aléatoire qui compte le nombre d'asperseurs défectueux sur les 80 du lot.

1. Modéliser la situation par une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. **Cas particulier :** la société souhaite déterminer le plus petit nombre entier naturel k tel que $P(X \leqslant k) \geqslant 0,95$.
   Déterminer cette valeur de k à l'aide de la calculatrice. Interpréter cette information dans le contexte de l'exercice.
3. **Généralisation :** la société souhaite déterminer le plus petit nombre entier naturel k tel que $P(X \leqslant k) \geqslant S$ où S est un nombre réel de l'intervalle $]0\,;1[$.
   Au début de l'algorithme incomplet ci-dessous, on affecte 0 à la variable k et $0,95^{80}$ à la variable P ; on donne une valeur de $]0\,;1[$ à la variable S.
   A la fin de son exécution, l'algorithme renvoie la valeur de la variable k.
   Compléter les pointillés.

   Tant que $P < S$
   $\quad k \leftarrow ....$
   $\quad P \leftarrow ....$
   Fin Tant que

4. Coder cet algorithme à l'aide d'une fonction SEUIL en langage Python.
   Saisir cette fonction et l'exécuter pour $S = 0,99$, puis pour $S = 0,999$.

V 3 Loi binomiale, intervalle de fluctuation centré et simulation

DEFINITION :

Un intervalle de fluctuation **centré** de X au seuil de 95% est l'intervalle $[a;b]$ où :
a : **plus petit entier** tel que $p(X \leq a) > 0,025$ et b : **plus petit entier** tel que $p(X \leq b) \geq 0,975$.

Exercice 6

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètre $n = 100$ et $p = 0,25$.
1) Tabuler avec votre calculatrice la loi binomiale correspondante.
2) Déterminer l'intervalle de fluctuation centré au seuil de 95%.

Exercice 7

Dans la population française, il y a 24,4% de "moins de 20 ans".

1) On prélève au hasard un échantillon de 250 personnes dans la population française. Donner un intervalle de fluctuation au seuil de 95% de la fréquence des "moins de 20 ans" dans cet échantillon.
2) Dans un village de 250 habitants, la proportion de "moins de 20 ans" est de 28,5%. Ce village est-il représentatif de la population française sur ce critère ?

V 4 Prise de décision

La détermination d'un intervalle de fluctuation permet de prendre une décision lorsque l'on fait une hypothèse sur une proportion dans une population. En effet, en faisant une hypothèse sur la proportion p d'un caractère dans une population, on peut déterminer un intervalle de fluctuation I à 95% de la fréquence de ce caractère dans un échantillon de taille n. Ainsi, on établira une règle de décision : si la fréquence observée dans l'échantillon n'appartient pas à I, comme cela n'a qu'une probabilité de 0,05 de se produire, alors on rejettera l'hypothèse faite sur p, avec un risque de se tromper de 5%. On en déduit la propriété suivante :

PROPRIETE :

On considère une population dans laquelle on **suppose** que la proportion d'un caractère est p. Après expérience, on **observe** f comme fréquence de ce caractère dans un échantillon de taille n.
Soit l'hypothèse : « la proportion de ce caractère dans la population est p ».
Si I est l'intervalle de fluctuation à 95% de la fréquence de ce caractère dans un échantillon de taille n, alors :
* Si $f \notin I$ alors on rejette cette hypothèse avec un risque d'erreur de 5%.
* Sinon, on ne rejette pas cette hypothèse.

Exercice 8

On a lancé 100 fois une pièce de monnaie et le côté pile est apparu 65 fois ; on s'interroge sur la nature équilibrée de la pièce.

Exercice 9

Un candidat à l'élection présidentielle affirme que 54% de la population lui est favorable. Lors d'un sondage réalisé sur 1 000 personnes, 523 personnes se sont déclarées favorables à ce candidat. Peut-on rejeter ou non la proportion de 54% donnée par ce candidat, au seuil de 95% ?

Exercice 10

Une association de lutte contre la discrimination se voit présenter les cas de deux entreprises :
- l'entreprise **Savamal** dans laquelle 21 des 53 employés sont des femmes ;
- l'entreprise **Cébon** dans laquelle 459 des 1027 employés sont des femmes.

1. Calculer les fréquences d'employées "femmes" dans chaque entreprise. Comparez-les.
2. Cette association peut-elle penser au risque d'erreur de 5% que l'une ou l'autre de ces entreprises pratique la discrimination ?

Point sur l'utilisation de la calculatrice pour la loi binomiale

Supposons que X suive la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,3$:

1. **Binomiale DdP** : permet de calculer la probabilité que la v.a. soit égale à une valeur k.
   Ex : $P(X = 24)$

   ```
   binomPdf(100,0.3,24)      0.038039
   ```

2. **Binomiale FdR** : permet de calculer la probabilité que la v.a. soit entre deux valeurs entières.
   Ex : $P(32 \leqslant X \leqslant 43)$

   ```
   binomCdf(100,0.3,32,43)   0.364777
   ```

3. **Binomiale inverse** : permet de connaitre la plus petite valeur k telle que la probabilité que la v.a. X soit inférieure ou égale à k soit supérieure à une valeur choisie.
   Ex : Déterminer k telle que $P(X \leqslant k) \geqslant 0,97$

   ```
   invBinom(0.97,100,0.3)    39
   ```

4. **Binomiale inverse N** : Cette fois n **est l'INCONNUE** que l'on recherche.

   Par exemple, dans la situation suivante : si on sait que la probabilité de marquer un but lors d'un tir est de $0,7$ ($p = 0,7$) et que l'on souhaite connaître le nombre minimum de tirs à effectuer pour réussir **plus que 50 buts** (lors d'un entrainement) avec une probabilité de réalisation de 99% càd l'événement : $P(X > 50) > 0,99$.
   On passe par l'événement contraire : $P(X > 50) > 0,99 \iff P(X \leqslant 50) \leqslant 0,01$.
   On trouve ainsi, qu'il est nécessaire d'effectuer 87 tirs.

   ```
   invBinomN(0.01,0.7,50)    87
   binomCdf(87,0.7,51,87)    0.991176
   ```