Orthogonalité - Produit scalaire dans l'espace

Géométrie - Chapitre 2

Table des matières

I Norme d'un vecteur de l'espace

I 1 Définitions

DEFINITION :

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur de l'espace, et $\overrightarrow{AB}$ un de ses représentants.
La norme du vecteur $\overrightarrow{u}$ est la longueur AB et on note $||\overrightarrow{u}|| = AB$.

DEFINITION :

Un **repère** $\left(O\,;\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath},\overrightarrow{k}\right)$ est dit **orthonormé** et la **base** $\left(\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath},\vec{k}\right)$ **orthonormée**, ssi,
en posant $\overrightarrow{\imath} = \overrightarrow{OI}$, $\overrightarrow{\jmath} = \overrightarrow{OJ}$ et $\overrightarrow{k} = \overrightarrow{OK}$, on a :

- (OI), (OJ) et (OK), sont perpendiculaires deux à deux.
- $||\overrightarrow{\imath}|| = ||\overrightarrow{\jmath}|| = ||\overrightarrow{k}|| = 1$

I 2 Norme et distance

PROPRIETE :

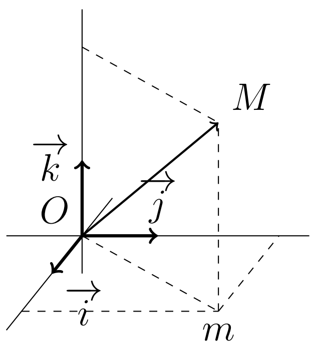
Dans un repère de l'espace $\left(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ **orthonormé**, soit le vecteur $\vec{u}(x\,;y\,;z)$. On a alors : $||\vec{u}|| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

REMARQUE(S) :

PROPRIÉTÉ VRAIE UNIQUEMENT DANS UN REPÈRE ORTHONORMÉ !

DEMONSTRATION :

Soient $\vec{u}(x\,;y\,;z)$ un vecteur de l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$.



Notons M le point de l'espace tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$ et m le projeté orthogonal de M sur le plan (P) engendré par le point O et les vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$. Montrons que $||\vec{u}|| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

1. Pourquoi peut-on appliquer le théorème de Pythagore dans le triangle OmM ?
2. Quelles sont les coordonnées du point m dans le plan (P) ? En déduire une expression de Om^2 en fonction de x et y.
3. Exprimer mM en fonction de z.
4. En déduire une expression de OM^2 en fonction de x, y et z et conclure.

PROPRIETE : Conséquence : distance entre deux points

Soit $M(x\,;y\,;z)$ et $M'(x'\,;y'\,;z')$ deux points de l'espace dans un RON. On a alors : $MM' = \sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}$.

II Produit scalaire de deux vecteurs de l'espace

II 1 Définition

DEFINITION :

Le **produit scalaire** de deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ dans l'espace est leur produit scalaire dans un plan **les contenant.**

REMARQUE(S) :

- Si les vecteurs $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$ (afin que l'angle $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ soit défini) alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times \cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
- Si $\overrightarrow{v}_1$ est le projeté orthogonal de $\overrightarrow{v}$ sur la direction de $\overrightarrow{u}$, alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}_1$.

  Plus précisément, si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}_1$ sont (colinéaires) de **même sens** alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = ||\overrightarrow{u}|| \times ||\overrightarrow{v}_1||$.
  si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}_1$ sont (colinéaires) de **sens contraires** alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = -||\overrightarrow{u}|| \times ||\overrightarrow{v}_1||$.

II 2 Propriétés algébriques

PROPRIETE : Symétrie et bilinéarité

Soients $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs et λ un réel. Alors $\boxed{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}}$ $\boxed{\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}}$ $\boxed{(\lambda\overrightarrow{u}) \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \cdot (\lambda\overrightarrow{v}) = \lambda(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})}$

PROPRIETE :

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs. Alors :

$$\boxed{\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2=\|\overrightarrow{u}\|^2+2\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\|\overrightarrow{v}\|^2} \qquad \boxed{\|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\|^2=\|\overrightarrow{u}\|^2-2\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\|\overrightarrow{v}\|^2}$$

Conséquences : Formules de polarisation

$$\boxed{\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2-\|\overrightarrow{u}\|^2-\|\overrightarrow{v}\|^2\right)} \qquad \boxed{\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{u}\|^2+\|\overrightarrow{v}\|^2-\|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\|^2\right)}$$

$$\boxed{\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\frac{1}{4}\left(\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2-\|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\|^2\right)}$$

II 3 Expression analytique du produit scalaire

PROPRIETE :

Soit $\left(O ; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ un repère **orthonormé** de l'espace. Soit $\overrightarrow{u}(x\,;y\,;z)$ et $\overrightarrow{v}(x'\,;y'\,;z')$ deux vecteurs de l'espace.
On a alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = xx' + yy' + zz'$.

DEMONSTRATION :

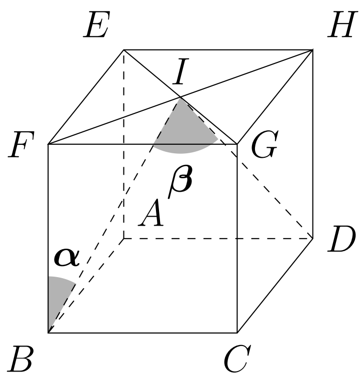
À l'aide d'une des trois formules donnant le produit scalaire en fonction des normes (formules de polarisation), démontrer l'égalité demandée.

Exercice 1

Pour calculer un angle géométrique formé par deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, on exprime $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ de deux façons différentes : l'une permettant d'obtenir la valeur du produit scalaire, l'autre faisant intervenir l'angle.

Soit $ABCDEFGH$, un cube de côté 1 et I le centre de la face $EFGH$.
On se place dans le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.
Déterminer, au degré près, les mesures des angles :

- $\alpha = \widehat{IBF}$
- $\beta = \widehat{BID}$



III Vecteurs et orthogonalité dans l'espace

III 1 Orthogonalité de deux vecteurs

DEFINITION :

Deux vecteurs sont **orthogonaux** si l'un des deux est nul ou si deux droites dont ils sont vecteurs directeurs sont perpendiculaires.

REMARQUE(S) :

Le **vecteur nul** est orthogonal (et colinéaire) à tout vecteur de l'espace.

PROPRIETE :

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs de l'espace alors on a : $\boxed{\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0}$

DEMONSTRATION :

1er cas : si l'un des deux vecteurs est nul (ou les deux) :
* Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, alors **le vecteur nul étant colinéaire à tout vecteur**, en appliquant la définition du PS de deux vecteurs colinéaires : $\vec{u}.\vec{v} = 0$ et comme **le vecteur nul est orthogonal à tous les vecteurs**, on a aussi : $\vec{u} \perp \vec{v}$.

2e cas : si aucun des deux vecteurs n'est nul :
Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$, alors $\vec{u}.\vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$.

Ainsi, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) = 0 \iff ||\vec{u}|| = 0$ ou $||\vec{v}|| = 0$ ou $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ ou $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{2}[\pi]$

REMARQUE(S) :

Si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ **alors** $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$. ATTENTION, la **réciproque est FAUSSE** !

III 2 Orthogonalité de deux droites

DEFINITION :

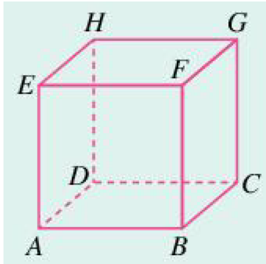
Deux droites sont **orthogonales** ssi tout vecteur directeur de l'une est orthogonal à tout vecteur directeur de l'autre.

Deux droites sont **perpendiculaires** ssi elles sont **coplanaires** et **orthogonales**.

REMARQUE(S) :

- Deux droites orthogonales ne sont pas nécessairement coplanaires.

Par exemple, dans le cube ci-contre, (AB) et (FG) sont orthogonales et non coplanaires car leurs vecteurs directeurs respectifs $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{FG}$ sont orthogonaux.



- Si deux droites sont **perpendiculaires** alors elles sont **orthogonales**. **La réciproque est fausse**.

PROPRIETE : (admises)

- Deux droites sont **orthogonales** ssi leurs **parallèles** passant par un même point quelconque de l'espace sont **perpendiculaires** dans le plan qu'elles définissent.

- Si deux droites sont **parallèles** alors toute droite **orthogonale** à l'une est **orthogonale** à l'autre.
- Si deux droites sont **orthogonales** alors toute droite **parallèle** à l'une est **orthogonale** à l'autre.

III 3 Orthogonalité d'une droite et d'un plan

DEFINITION :

Une droite est **orthogonale** à un plan ssi **tout** vecteur directeur de cette droite est orthogonal à **tous** les vecteurs de la direction de ce plan.

REMARQUE(S) :

Conséquences immédiates :
Une droite est orthogonale à un plan ssi l'un de ses vecteurs directeurs est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de la direction de ce plan (c'est-à-dire, deux vecteurs constituant une base de ce plan).

Une droite est orthogonale à un plan ssi elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan.

PROPRIETE : (admises)

- Si deux droites sont **parallèles** alors tout plan **orthogonal** à l'une est **orthogonal** à l'autre.
- Si deux plans sont **parallèles** alors toute droite **orthogonale** à l'un est **orthogonale** à l'autre.
- Si deux plans sont **orthogonaux** à une **même** droite alors ils sont **parallèles** entre eux.

PROPRIETE :

Une droite est orthogonale à un plan ssi elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.

DEMONSTRATION :

L'implication est immédiate donc on démontre la réciproque : **si une droite est orthogonale à deux droites sécantes d'un plan, alors elle est orthogonale à ce plan.**

Soit Δ une droite et P un plan de l'espace. Soit d et d' deux droites sécantes du plan P telles que $\Delta \perp d$ et $\Delta \perp d'$.
Soit $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{v'}$ des vecteurs directeurs respectifs de Δ, d et d'. On a donc $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v'}$.

Comme d et d' sont sécantes, $(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v'})$ est un couple de vecteurs non colinéaires de la direction de P (autrement dit, $(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v'})$ est une base de P).

Soit D une droite quelconque de P, de vecteur directeur $\overrightarrow{w}$. $\overrightarrow{w}$ est un vecteur de la direction de P donc il existe deux réels a et b tels que $\overrightarrow{w} = a\overrightarrow{v} + b\overrightarrow{v'}$.

Donc $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \cdot (a\overrightarrow{v} + b\overrightarrow{v'}) = a(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}) + b(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v'}) = a \times 0 + b \times 0 = 0$ car $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v'}$.

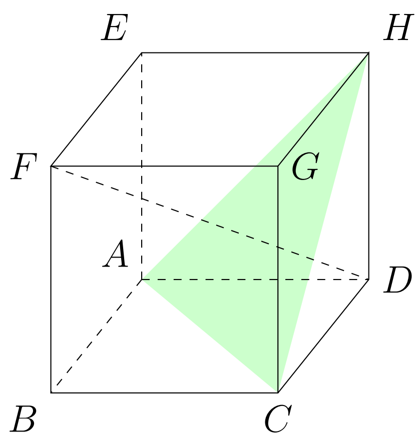
Donc $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{w}$ càd $\Delta \perp D$. On a montré que Δ est orthogonale à toute droite de P donc elle est orthogonale à P.

REMARQUE(S) :

On a aussi montré que le vecteur $\overrightarrow{u}$ est orthogonal à tous les vecteurs de la direction de P.

Exercice 2

Soit $ABCDEFGH$, un cube d'arête 1. Démontrons que la droite (FD) est orthogonale au plan (ACH).



IV Vecteur normal à un plan, équation cartésienne d'un plan

IV 1 Vecteur normal à un plan

DEFINITION :

Soit P un plan. On appelle **vecteur normal** à P tout vecteur directeur $\overrightarrow{n}$ d'une droite **orthogonale** à P.

REMARQUE(S) :

- Un vecteur **normal** est donc toujours **NON NUL**.
- Les vecteurs normaux à P sont **colinéaires**.
- Toute droite incluse dans P a ses vecteurs directeurs orthogonaux aux vecteurs normaux de P.

IV 2 Équation cartésienne d'un plan

IV 2 a Caractérisation d'un plan

Soit P un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n}$ et A un point de P.
$M \in P \iff M = A$ ou $(AM) \subset P \iff \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = 0$ *(Faire schéma)*

PROPRIETE :

Soit $\overrightarrow{n}$ un vecteur non nul, A un point.
Le plan P passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{n}$ est **l'ensemble des points** M de l'espace tels que $\boxed{\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0.}$

IV 2 b Équation cartésienne d'un plan dans un RON

PROPRIETE :

Dans un repère orthonormé, soit P un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n}(a\,;b\,;c)$, (donc a, b et c des réels non tous nuls)

Alors une équation, appelée **équation cartésienne**, du plan P est de la forme $ax+by+cz+d=0$, avec $d \in \mathbb{R}$.

Exercice 3

exercice 99 p 108 (*avec rédaction type*)

DEMONSTRATION :

♡ **Bac** ♡ Soit P un plan passant par le point $A(x_A\,;y_A\,;z_A)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}(a\,;b\,;c)$.
$M(x\,;y\,;z) \in P \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0$.
$M(x\,;y\,;z) \in P \Leftrightarrow a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$.
$M(x\,;y\,;z) \in P \Leftrightarrow ax+by+cz-ax_A-by_A-cz_A=0$,
$M(x\,;y\,;z) \in P \Leftrightarrow ax+by+cz+d=0$, en posant $d=-ax_A-by_A-cz_A$.

PROPRIETE : (Réciproque)

Soit a, b et c des réels non tous nuls (càd $a \neq 0$ ou $b \neq 0$ ou $c \neq 0$, ou bien encore NON($a=0$ et $b=0$ et $c=0$)) et d un réel quelconque.
Tout point $M(x\,;y\,;z)$ tel que $ax+by+cz+d=0$ appartient à un plan P de vecteur normal $\overrightarrow{n}(a\,;b\,;c)$.

DEMONSTRATION :

Soit E l'ensemble des points $M(x\,;y\,;z)$ tels que $ax+by+cz+d=0$. a, b et c sont non tous nuls ; supposons que $a \neq 0$ (dém analogue si $a=0$ et $b \neq 0$). Le point $A\left(-\dfrac{d}{a}\,;0\,;0\right)$ est un point de E car ses coordonnées vérifient l'équation de E.

Soit $\overrightarrow{n}(a\,;b\,;c)$. $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{AM}=a\left(x+\dfrac{d}{a}\right)+by+cz=ax+by+cz+d$ or OSQ $ax+by+cz+d=0$.

Ainsi, $M \in E$ équivaut à $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{AM}=0$. Donc E est le plan P passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{n}$.

Exercice 4

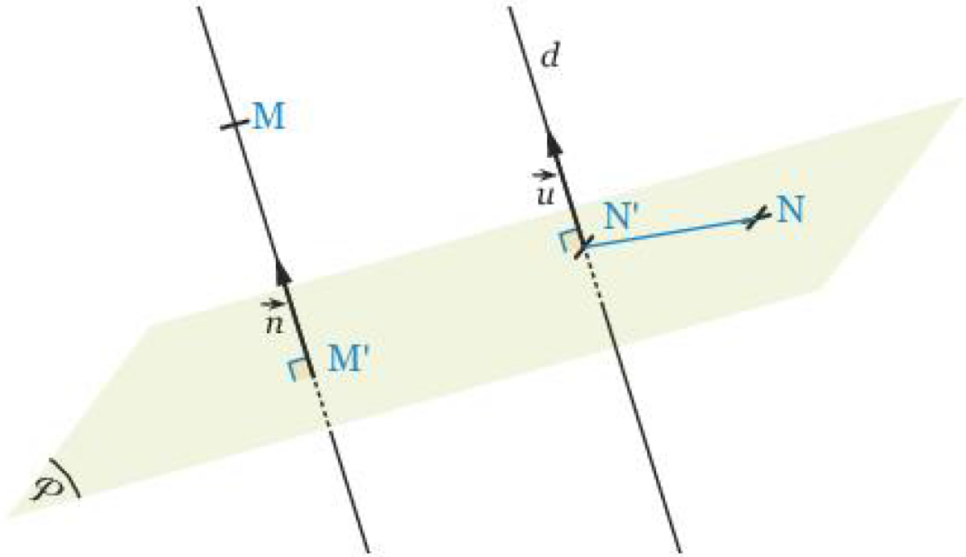
Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath},\overrightarrow{k}\right)$, on considère les points $A(0\,;1\,;1)$, $B(-4\,;2\,;3)$ et $C(4\,;-1\,;1)$.

1. Justifier l'existence du plan (ABC).
2. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).
3. Soit $D(-4\,;-1\,;-2)$. Déterminer une équation du plan (P) passant par D et parallèle à (ABC).

IV 3 Distance d'un point à une droite, à un plan et projetés orthogonaux

Le point M′ est le projeté orthogonal du point M sur le plan $\mathcal{P}$.

Le point N′ est le projeté orthogonal du point N sur la droite d.



IV 3 a Distance d'un point à une droite et projeté orthogonal d'un point sur une droite

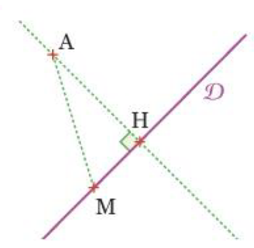
DEFINITION :

Soit A un point et D une droite de l'espace. La **distance** du point A à la droite D est **la plus petite longueur** AM, où $M \in D$.

DEFINITION :

Soit A un point et D une droite de l'espace.

On appelle **projeté orthogonal** du point A sur la droite D, l'unique point H, intersection de la droite D et du plan P **orthogonal** à D et passant par A.



PROPRIETE :

Le **projeté orthogonal** H, du point A sur la droite D est le point de la droite D **le plus proche** du point A.
Autrement dit, la **distance** du point A à la droite D est AH.

DEMONSTRATION :

Pour tout point M de la droite D on a $AM \geqslant AH$ (car AHM rectangle en H) donc la distance de A à la droite D est donc égale à AH.

Exercice 5

L'espace est muni d'un repère orthonormé.

Calculer la distance entre le point $A(2\,;-1\,;2)$ et la droite D dont on donne une représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 2t+1 \\ y = -t \\ z = t-1 \end{cases}$

IV 3 b Distance d'un point à un plan et projeté orthogonal d'un point sur un plan

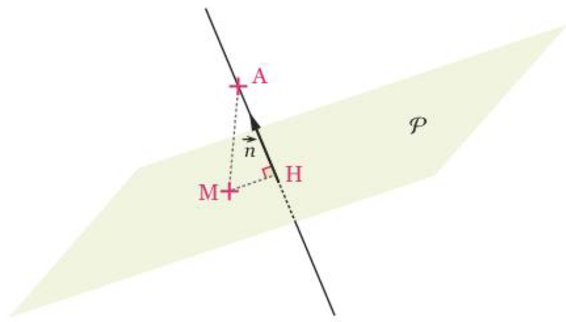
DEFINITION :

Soit A un point et P un plan de l'espace.
La **distance** du point A au plan P est **la plus petite longueur** AM, où $M \in P$.

DEFINITION :

Soit A un point et P un plan de l'espace.

On appelle **projeté orthogonal** du point A sur le plan P, l'unique point H, intersection du plan P et de la droite D **orthogonale** à P et passant par A.



PROPRIETE :

Le **projeté orthogonal** H, du point A sur le plan P est le point du plan P **le plus proche** du point A.
Autrement dit, la **distance** du point A au plan P est AH.

DEMONSTRATION :

♡ Bac ♡

1er cas : Si $A \notin P$

Soit M un point quelconque du plan P. Pour tout point $M \neq H$, le triangle AMH est rectangle en H et donc $AM > AH$ (l'hypoténuse est le plus long des côtés du triangle rectangle). Ainsi AH est la plus petite longueur et donc la distance de A au plan P est donc AH.

2ème cas : Si $A \in P$
Dans ce cas, A et H sont confondus et $AH = 0$. Pour tout point M de P, distinct de A, la longueur AM est différente de 0 donc plus grande que AH. Ainsi, dans tous les cas, H est le point de P le plus proche de A.

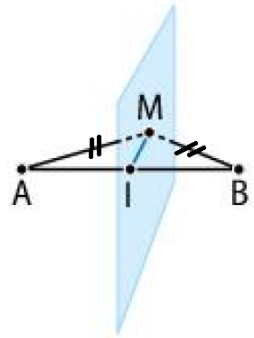
Exercice 6

L'espace est muni d'un repère orthonormé. On considère le plan P d'équation $3x + y - z - 2 = 0$.
Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal du point $A(5\,;1\,;3)$ sur le plan P.
Prolongement : Déterminer la distance de A à P.

IV 4 Plan médiateur d'un segment

DEFINITION :

Soit A et B deux points de l'espace.
Le **plan médiateur du segment** $[AB]$ est le plan passant par le milieu I de $[AB]$ et de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$.



PROPRIETE : (admise)

Le **plan médiateur du segment** $[AB]$ est l'ensemble des points M de l'espace **équidistants** de A et de B.

IV 5 Équation d'une sphère

DEFINITION :

Soit I un point de l'espace. Soit $r \in \mathbb{R}^+$. L'ensemble des points de l'espace situés à la distance r du point I est la sphère de centre I et de rayon r.

PROPRIETE :

Dans un repère orthonormé, soit $I(x_I\,;y_I\,;z_I)$ un point de l'espace. Soit $r \in \mathbb{R}^+$.

La sphère S de centre I et de rayon r a pour équation cartésienne : $\boxed{(x-x_I)^2+(y-y_I)^2+(z-z_I)^2=r^2}$.

DEMONSTRATION :

$M(x\,;y\,;z) \in S \Longleftrightarrow IM = r \Longleftrightarrow IM^2 = r^2 \Longleftrightarrow (x-x_I)^2+(y-y_I)^2+(z-z_I)^2 = r^2.$

Faire exercices 171 et 172 p 115

V Plans perpendiculaires,

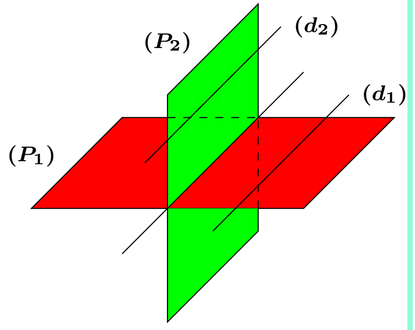
DEFINITION :

On dit que deux plans sont **perpendiculaires** si un des plans contient une droite orthogonale à l'autre.

REMARQUE(S) :

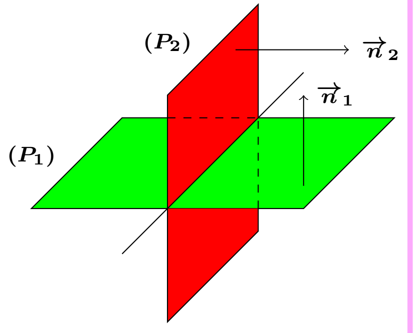
Soient (P_1) et (P_2), deux plans perpendiculaires.
Si (d_1) est une droite de (P_1) et (d_2) est une droite de (P_2), alors (d_1) et (d_2) ne sont pas nécessairement orthogonales.

Ci-contre, deux droites (d_1) et (d_2) parallèles.



PROPRIETE : Caractérisation (admise)

Deux plans sont perpendiculaires si et seulement si tout vecteur normal de l'un est orthogonal à tout vecteur normal de l'autre.



Exercice 7

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé. Dans les deux cas suivants, étudier la position relative des deux plans.

- Soient (P_1) et (P_2) deux plans de vecteurs normaux respectifs $\overrightarrow{n}_1 \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{n}_2 \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- Soient (P_1) et (P_2) deux plans de vecteurs normaux respectifs $\overrightarrow{n}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{n}_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

VI Position relative droite/plan et intersection

Méthode 1 : Déterminer si elle existe l'intersection d'une droite et d'un plan

Soient (d) une droite dirigée par $\overrightarrow{u}$ et (P) un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n}$.

1. Tester le parallélisme de (d) et (P) en calculant $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{n}$:
   (a) si $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{n} = 0$, alors (d) est parallèle, strictement ou non, à (P) ;
   (b) si $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{n} \neq 0$, alors (d) et (P) se coupent en un point M.
2. Si l'intersection existe, résoudre le système composé des équations décrivant (d) et (P) afin de calculer les coordonnées de M.

Exercice 8

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$, on considère la droite (d) de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1-t \\ y &=& 2t \\ z &=& 5 \end{array}\right., \ t \in \mathbb{R}$ et le plan (P) d'équation cartésienne $3x + z + 7 = 0$.

Déterminer, s'il existe, les coordonnées du point d'intersection de (d) et de (P).

Exercice 9

Même consigne avec la droite (d) : $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1-t \\ y &=& 2-2t \\ z &=& 3+5t \end{array}\right., \ t \in \mathbb{R}$ et le plan (P) : $-6x - 2y - 2z + 1 = 0$.

VII Position relative plan/plan et intersection

Méthode 2 : Déterminer, si elle existe, l'intersection de deux plans
Soient (P_1) et (P_2) deux plans de vecteurs normaux respectifs $\overrightarrow{n}_1$ et $\overrightarrow{n}_2$.

1. Tester le parallélisme de (P_1) et (P_2) en testant la colinéarité de $\overrightarrow{n}_1$ et $\overrightarrow{n}_2$.
2. Si les plans ne sont pas parallèles :
   (a) écrire le système composé des équations décrivant (P_1) et (P_2) ;
   (b) choisir une des coordonnées comme paramètre ;
   (c) en déduire une représentation paramétrique de la droite d'intersection.

Exercice 10

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$, on considère les plans (P_1) et (P_2) d'équations respectives $x + 2y + z - 1 = 0$ et $2x - 3y - z + 2 = 0$.
Déterminer, si elle existe, une représentation paramétrique de la droite d'intersection entre (P_1) et (P_2).

Exercice 11

Même consigne avec les plans (P_1) et (P_2) d'équations respectives $2x - 4y + 3z - 5 = 0$ et $-4x + 8y - 6z + 10 = 0$.