Vecteurs, droites et plans de l'espace

Géométrie - Chapitre 1

Table des matières

I Positions relatives de droites, de plans et règles d'incidence **1**

I 1 Règles d'incidence 1

I 2 Caractérisation d'un plan 1

I 3 Positions relatives de deux droites 2

I 4 Positions relatives d'une droite et d'un plan 3

I 5 Positions relatives de deux plans 4

II Vecteurs, du plan à l'espace **5**

II 1 Définitions 5

II 2 Propriétés élémentaires 6

III Vecteurs colinéaires, combinaison linéaire, vecteurs coplanaires, bases **7**

III 1 Vecteurs colinéaires 7

III 2 Vecteurs coplanaires 8

III 3 Bases et repères de l'espace 11

III 4 Caractérisation vectorielle d'une droite 14

III 5 Caractérisation vectorielle d'un plan 14

IV Représentations paramétriques de droites et de plans **16**

IV 1 Représentation paramétrique d'une droite 16

IV 2 Représentation paramétrique d'un plan 18

I Positions relatives de droites, de plans et règles d'incidence

I 1 Règles d'incidence

Un plan est une surface plate illimitée.

PROPRIETE : Règles d'incidence

Règle 1 : Deux points distincts définissent une droite et une seule.
Règle 2 : Trois points (distincts et) non alignés définissent un plan et un seul.
Règle 3 : Si un plan contient deux points distincts A et B, alors il contient la droite (AB).
Règle 4 : Tous les résultats établis en géométrie plane restent valables dans chaque plan de l'espace.

I 2 Caractérisation d'un plan

DEFINITION : Plan

Un plan peut être défini :
- soit par trois points (distincts) non alignés.
- soit par une droite et un point n'appartenant pas à cette droite.
- soit par deux droites sécantes.
- soit par deux droites strictement parallèles.

DEFINITION : Points coplanaires

Soient A, B, C et D quatre points de l'espace. A, B, C et D sont **coplanaires ssi** ils appartiennent à un **même** plan.

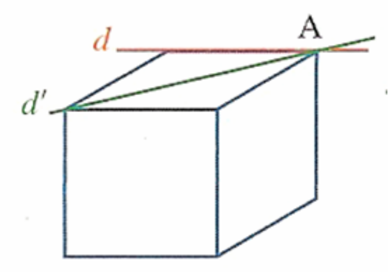
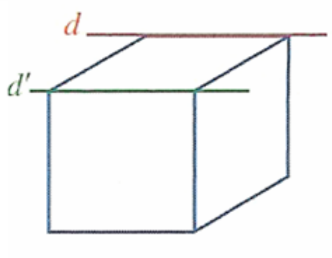
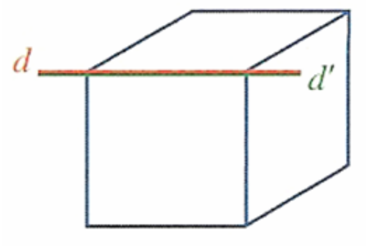
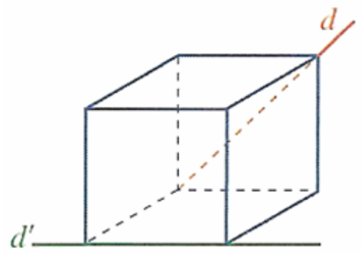
REMARQUE(S) :

Attention, il est **nécessaire** de prendre **4** points pour l'étude de la coplanarité car **3 points de l'espace sont toujours coplanaires**.

I 3 Positions relatives de deux droites

DEFINITION :

- Deux droites (D) et (D') sont dites **coplanaires** lorsqu'elles sont **incluses dans un même plan**.
- Deux droites (D) et (D') sont dites **parallèles** lorsqu'elles sont **coplanaires et non sécantes**.

Droites **coplanaires**			Droites **non coplanaires**
sécantes	parallèles		
			
(d)∩(d') ={A}	(d)∩(d') = Ø	(d)∩(d') = (d) = (d')	(d)∩(d') = Ø

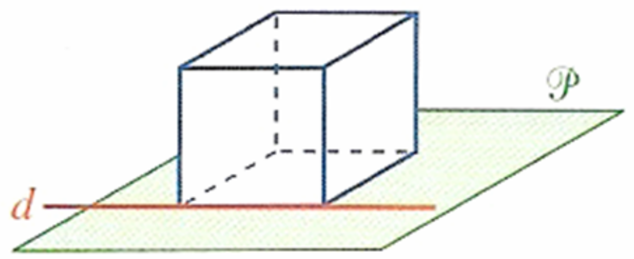
REMARQUE(S) :

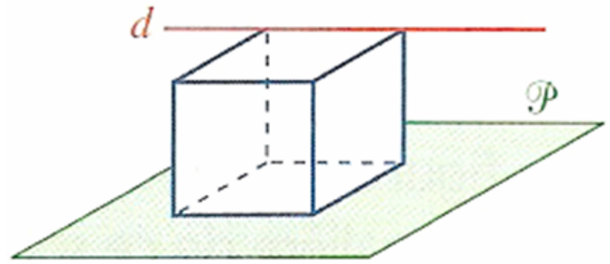
- Si deux droites n'ont **aucun point commun** alors :
  - soit elles sont **non coplanaires**,
  - soit elles sont **coplanaires et strictement parallèles**.
- Deux droites **parallèles** sont **toujours coplanaires**.

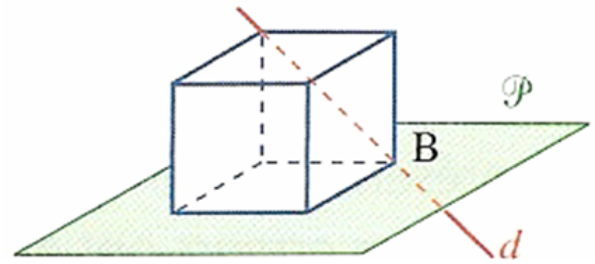
I 4 Positions relatives d'une droite et d'un plan

DEFINITION :

Une droite de l'espace et un plan sont **sécants** lorsqu'ils ont **un seul point commun**.
Lorsqu'ils ne sont **pas sécants**, on dit que la droite est **parallèle** au plan.

<table>
<tr><th colspan="2">Droite et plan parallèles</th><th>Droite et plan sécants</th></tr>
<tr>
<td>

(d) est incluse ou contenue dans P
(d) $\subset P$ et   (d) $\cap P$ = (d)</td>
<td>

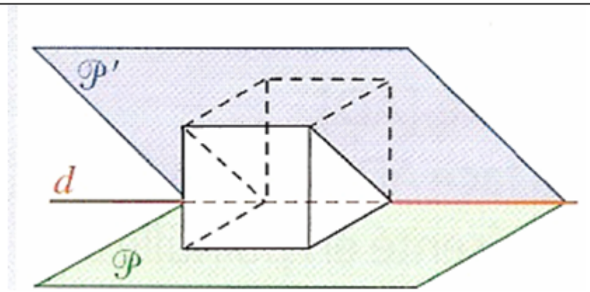
(d) est strictement parallèle à P
(d) // P et   (d) $\cap P = \emptyset$</td>
<td>

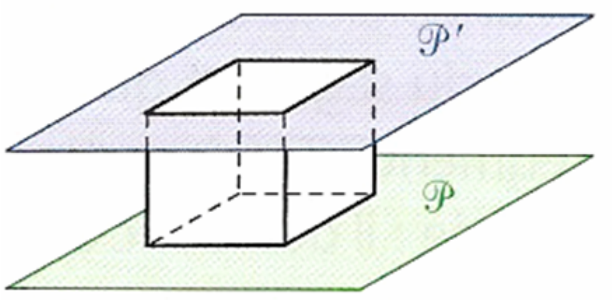
(d) coupe P en B,
la droite et le plan ont un unique point d'intersection : B
(d) $\cap P$ = {B}</td>
</tr>
</table>

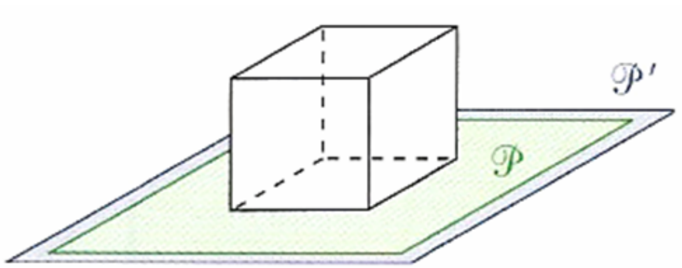
I 5 Positions relatives de deux plans

DEFINITION :

Deux plans de l'espace sont **sécants** lorsqu'ils ont une seule droite commune.
Quand deux plans ne sont **pas sécants**, on dit qu'ils sont **parallèles**.

<table>
<tr><th>Plans sécants</th><th colspan="2">Plans parallèles</th></tr>
<tr><td>

$P \cap P' = (d)$</td><td>

$P \cap P' = \emptyset$</td><td>

$P = P'$ et $P \cap P' = P = P'$</td></tr>
</table>

II Vecteurs, du plan à l'espace

II 1 Définitions

On admettra que la notion de vecteur vue dans le plan se généralise à l'espace.

DEFINITION : Vecteur

Soit A et B deux points distincts de l'espace. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour :

- **direction** : celle de la droite (AB) ;
- **sens** : de A vers B ;
- **norme** (ou longueur) : la distance AB. On la note $||\overrightarrow{AB}||$, ou plus simplement AB.

REMARQUE(S) :

Lorsque A et B sont confondus, on dit que le vecteur $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA}$ est nul et on le note $\overrightarrow{0}$. Le vecteur nul n'a ni direction, ni sens et sa norme vaut 0.

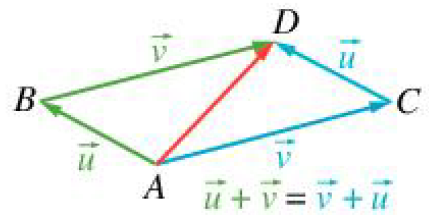
PROPRIETE :

- Deux vecteurs non nuls sont égaux s'ils ont même **direction**, même **sens** et même **norme**.
- Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont **égaux** ssi $AB\mathbf{D}C$ est un **parallélogramme** (éventuellement aplati).
- Pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ et tout point A de l'espace, il **existe un unique** point M tel que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{u}$.
  On dit que $\overrightarrow{AM}$ est **le représentant** de $\overrightarrow{u}$ d'origine A.
- La **translation** de vecteur $\overrightarrow{AB}$ est la transformation qui à tout point C associe le point D tel que $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$.

II 2 Propriétés élémentaires

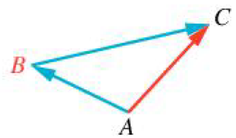
DEFINITION : Somme vectorielle et règle du parallélogramme

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace de représentants $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$.
La somme des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est le vecteur noté $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ de représentant $\overrightarrow{AD}$ tel que $AB\mathbf{D}C$ soit un **parallélogramme**.



PROPRIETE : Relation de Chasles

Pour tous points A, B et C de l'espace, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.



DEFINITION : Multiplication par un réel

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul et k un réel non nul. Le vecteur $k\overrightarrow{u}$ est le vecteur ayant :

- la même direction que $\overrightarrow{u}$.
- le même sens que $\overrightarrow{u}$, si $k > 0$ le sens contraire, si $k < 0$.
- pour norme $|k| \times ||\overrightarrow{u}||$.

Pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ et tout réel k, on a $0\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$

PROPRIETE :

Quels que soient les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et les réels k, ℓ et λ , on a :

- $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{v})$
- $k(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = k\overrightarrow{u} + k\overrightarrow{v}$
- $(k + \ell)\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{u} + \ell\overrightarrow{u}$
- $k(\lambda\overrightarrow{u}) = (k\lambda)\overrightarrow{u}$
- $k\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0} \iff k = 0$ ou $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$

III Vecteurs colinéaires, combinaison linéaire, vecteurs coplanaires, bases

III 1 Vecteurs colinéaires

DEFINITION :

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls de l'espace. $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont **colinéaires** ssi il existe un réel k tel que $\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{v}$.

REMARQUE(S) :

- Dire que deux vecteurs **non nuls** sont **colinéaires** signifie qu'ils ont la **même direction**.
- Par convention, le **vecteur nul** est **colinéaire à tout** vecteur de l'espace.
- **Attention :** La relation **analytique de la colinéarité** (ou **déterminant des deux vecteurs**), vue en géométrie plane, $\boxed{xy' - x'y = 0}$ **n'a pas de sens** en géométrie dans l'espace.

PROPRIETE : Parallélisme de deux droites

Soit A, B, C et D quatre points de l'espace.
Les droites (AB) et (CD) sont parallèles **ssi** les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

PROPRIETE : Alignement de trois points

Soit A, B et C trois points de l'espace. A, B et C sont alignés **ssi** les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

III 2 Vecteurs coplanaires

III 2 a Définition

DEFINITION :

Soit $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de l'espace.
Pour tout point O de l'espace, soit les points A, B et C tels que $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{w}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont dits **coplanaires ssi** les points O, A, B et C sont coplanaires.

REMARQUE(S) :

1) **Deux vecteurs sont toujours coplanaires** (trois points le sont toujours)

2) Si **deux** vecteurs parmi les trois **sont colinéaires** alors les vecteurs sont **nécessairement coplanaires**.
En effet, si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires, les points O, A et B sont donc alignés. Il existe donc au moins un plan qui contient la droite (OA) et le point C, et les vecteurs sont donc coplanaires.

III 2 b Combinaison linéaire

DEFINITION :

Soit deux vecteurs de l'espace $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

On dit que $\overrightarrow{w}$ est une **combinaison linéaire** des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ s'il existe des réels α et β tels que $\overrightarrow{w} = \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v}$.

REMARQUE(S) :

On peut faire des combinaisons linéaires de **plus de deux** vecteurs.

III 2 c Vecteurs coplanaires et combinaison linéaire

PROPRIETE :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs **non colinéaires** et $\vec{w}$ un vecteur quelconque.

Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont **coplanaires** si, et seulement si, il existe des réels x et y tels que : $\boldsymbol{\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}}$.
Dans ce cas, cette **combinaison linéaire** de $\vec{w}$ en fonction des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est **unique**.

DEMONSTRATION :

Soit les points de l'espace, O, A, B et C tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$ et $\overrightarrow{OC} = \vec{w}$
$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ coplanaires signifie que $C \in (OAB) =$ plan $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v})$.
Cela équivaut à : il existe x et y réels tels que $\vec{w} = \overrightarrow{OC} = x\vec{u} + y\vec{v}$.

III 2 d Vecteurs linéairement indépendants

DEFINITION :

Soit trois vecteurs de l'espace $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont **linéairement indépendants** si l'un des vecteurs **n'est pas** une combinaison linéaire des deux autres. Autrement dit, lorsqu'ils ne sont **pas coplanaires**.

PROPRIETE :

Soit trois vecteurs de l'espace $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ et a, b et c trois réels.

Les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont **linéairement indépendants** ssi $\boxed{a\overrightarrow{u}+b\overrightarrow{v}+c\overrightarrow{w}=\overrightarrow{0} \text{ implique } a=b=c=0.}$

DEMONSTRATION :

Il s'agit de la **contraposée** du théorème précédent.

III 3 Bases et repères de l'espace

III 3 a Définitions

DEFINITION :

Trois vecteurs de l'espace **linéairement indépendants** constituent **une base** de l'espace. On la note $\left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \vec{k}\right)$.

Un **repère** de l'espace est constitué d'un point O, origine du repère et d'une base. On le note $\left(O\,;\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$.

III 3 b Coordonnées de points et de vecteurs dans l'espace

PROPRIETE :

Soit $\left(O\,;\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$ un repère de l'espace.

Pour tout point M de l'espace, il existe un **unique triplet** de réels $(x\,;y\,;z)$ tel que $\boxed{\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{\imath} + y\overrightarrow{\jmath} + z\overrightarrow{k}}$.

DEMONSTRATION :

- **Existence**
  Soit P le plan passant par O et dirigé par les vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ (qui ne sont pas colinéaires car $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ sont non coplanaires).
  Soit M' le point d'intersection de P et de la droite parallèle à $(O\,\vec{k}\,)$ passant par M.
  $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\overrightarrow{OM'}$ sont coplanaires avec $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ non colinéaires, donc il existe deux réels x et y tels que $\overrightarrow{OM'} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath}$.
  D'autre part, $\overrightarrow{M'M}$ et $\vec{k}$ sont colinéaires, donc il existe un réel z tel que $\overrightarrow{M'M} = z\,\vec{k}$.
  D'où $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{M'M} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k}$

- **Unicité**
  Supposons qu'il existe deux triplets de réels $(x\,;y\,;z)$ et $(x';y';z')$ tels que $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k} = x'\,\vec{\imath} + y'\,\vec{\jmath} + z'\,\vec{k}$.
  On a alors $(x-x')\,\vec{\imath} + (y-y')\,\vec{\jmath} + (z-z')\,\vec{k} = \vec{0}$.
  Comme $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ ne sont pas coplanaires (ils sont linéairement indépendants), en application de la propriété précédente, on a $x-x' = y-y' = z-z' = 0$, et par suite, $x = x'$, $y = y'$ et $z = z'$.

DEFINITION :

$(x\,;y\,;z)$ est le triplet de coordonnées du point M dans le repère $\left(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$.
x est l'abscisse, y est l'ordonnée et z est la **cote** de M.
$(x\,;y\,;z)$ sont aussi les coordonnées du **vecteur** $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ dans la **base** $\left(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$.

III 3 c Extension à l'espace des propriétés des coordonnées du plan

PROPRIETE :

I) Dans un repère $\left(O\,;\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath},\overrightarrow{k}\right)$ de l'espace, soit $A(x_A\,;y_A\,;z_A)$ et $B(x_B\,;y_B\,;z_B)$.

- **Coordonnées d'un vecteur :** $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B-x_A \\ y_B-y_A \\ z_B-z_A \end{pmatrix}$
- **Coordonnées du milieu d'un segment :** le milieu K de $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{x_A+x_B}{2};\dfrac{y_A+y_B}{2};\dfrac{z_A+z_B}{2}\right)$.
- **Longueur d'un segment :** Si **de plus** $\left(O\,;\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath},\overrightarrow{k}\right)$ est **orthonormé**,

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}.$$

II) Dans une base $\left(\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath},\vec{k}\right)$ de l'espace, soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ deux vecteurs et k un nombre réel.

- **Égalité de vecteurs :** $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{v}\iff x=x'$, $y=y'$ et $z=z'$.
- **Somme vectorielle et produit par un réel :** $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \\ z+z' \end{pmatrix}$ et $k\vec{u}\begin{pmatrix} kx \\ ky \\ kz \end{pmatrix}$.
- **Norme d'un vecteur :** Si **de plus** $\left(\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath},\vec{k}\right)$ est **orthonormée**, alors $||\vec{u}||=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

III 4 Caractérisation vectorielle d'une droite

PROPRIETE : Caractérisation vectorielle d'une droite

Soit A et B deux points **distincts** de l'espace.

La droite (AB) est l'ensemble des points M de l'espace tel que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ soient **colinéaires**,

càd l'ensemble des points M de l'espace tel que $\boxed{\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}}$, t étant un réel quelconque.

III 5 Caractérisation vectorielle d'un plan

III 5 a Direction d'un plan

DEFINITION :

Soit A et B deux points **distincts** quelconques de $\mathcal{P}$.
On appelle **direction** d'un plan $\mathcal{P}$ **l'ensemble des vecteurs** $\overrightarrow{AB}$.

III 5 b Caractérisation vectorielle d'un plan

PROPRIETE :

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs **non colinéaires** et A un point de l'espace.
L'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v}$ avec x et y des réels quelconques, est un plan passant par A.
Un plan est donc déterminé par **un point et deux vecteurs non colinéaires**.

DEMONSTRATION :

Soit A, B et C des points non alignés tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$.
Comme $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas **colinéaires**, $(A\,;\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AC})$ est un repère du plan (ABC).
Donc M appartient au plan (ABC) ssi il existe un couple de réels $(x\,;y)$ tels que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$.

REMARQUE(S) :

- On dit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ **dirigent** le plan (ABC), ce sont des **vecteurs directeurs** de ce plan.
- Deux vecteurs **non colinéaires** $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de la direction de $\mathcal{P}$ **engendrent** cette direction, càd que **tout** vecteur de la direction de $\mathcal{P}$ est une **combinaison linéaire** de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.
- Deux plans sont parallèles $\Longleftrightarrow$ deux vecteurs non colinéaires de la direction de l'un et deux vecteurs non colinéaires de celle de l'autre sont coplanaires.

IV Représentations paramétriques de droites et de plans

IV 1 Représentation paramétrique d'une droite

PROPRIETE : Démonstration et rédaction

L'espace est rapporté à un repère $\left(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$.

Soit D une droite de l'espace, $A(x_A\,;y_A\,;z_A)$ un point de D et $\vec{u}(\alpha\,;\beta\,;\gamma)$ un vecteur directeur de D.

$M(x\,;y\,;z) \in D$ ssi $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires,

ssi il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$

ssi il existe un réel t tel que $\begin{cases} x - x_A = t\alpha \\ y - y_A = t\beta \\ z - z_A = t\gamma \end{cases}$

ssi il existe un réel t tel que $\boxed{\begin{cases} x = x_A + t\alpha \\ y = y_A + t\beta \\ z = z_A + t\gamma \end{cases}}$

REMARQUE(S) :

- t est **le paramètre** (on peut utiliser une autre lettre)
- A chaque valeur de t, on associe **un** point $M(x_A + \alpha t; y_A + \beta t; z_A + \gamma t)$ **et un seul**.

Réciproquement, à chaque point M de D correspond une **unique valeur** de t telle que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$.

DEFINITION :

Le système d'équations $\begin{cases} x = x_A + t\alpha \\ y = y_A + t\beta \\ z = z_A + t\gamma \end{cases}$ $, t \in \mathbb{R}$ est **une représentation paramétrique** de la droite D.

REMARQUE(S) :

Il existe une **infinité** de représentations paramétriques d'une droite.

Exercice 1

Soit les points $A(-3\ ;\ 2\ ;\ 4)$ et $B(-1\ ;\ 1\ ;\ 0)$. Écrire une représentation paramétrique de la droite (AB).

Exercice 2

Soit Δ la droite de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = 3 + t \\ z = 1 - t \end{cases}$ $, t \in \mathbb{R}$

1. Donner les coordonnées d'un vecteur directeur de la droite Δ et un point de Δ.
2. Le point $M(-3\,;4\,;1)$ appartient-il à la droite Δ ?
3. Donner les coordonnées de trois points de la droite Δ.
4. Déterminer une autre représentation paramétrique de Δ.

IV 2 Représentation paramétrique d'un plan

PROPRIETE : ... et définition

Dans un repère $\left(O\,;\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath},\overrightarrow{k}\right)$ de l'espace,

soit le plan P passant par $A(x_A\,;y_A\,;z_A)$ et de vecteurs directeurs non colinéaires $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\alpha'\\\beta'\\\gamma'\end{pmatrix}$.

$M(x\,;y\,;z)\in P$ si et seulement si il existe deux réels t et t' tels que : $\begin{cases}x=x_A+t\alpha+t'\alpha'\\y=y_A+t\beta+t'\beta'\\z=z_A+t\gamma+t'\gamma'\end{cases}$

Définition : Ce système d'équations est **une représentation paramétrique du plan** P.

DEMONSTRATION :

$M(x\;;\;y\;;\;z)\in P$ ssi $\overrightarrow{AM}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont coplanaires,

ssi il existe deux réels t et t' tels que $\overrightarrow{AM}=t\overrightarrow{u}+t'\overrightarrow{v}$.

ssi il existe deux réels t et t' tels que $\begin{cases}x-x_A=t\alpha+t'\alpha'\\y-y_A=t\beta+t'\beta'\\z-z_A=t\gamma+t'\gamma'\end{cases}$

ssi il existe deux réels t et t' tels que $\begin{cases}x=x_A+t\alpha+t'\alpha'\\y=y_A+t\beta+t'\beta'\\z=z_A+t\gamma+t'\gamma'\end{cases}$

Exercice 3

Soit P le plan de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 3 - t + 5t' \\ y = 1 + t' \\ z = -5t + 3t' \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}, t' \in \mathbb{R}$$

1. Donner les coordonnées d'un couple de vecteurs directeurs de P et un point de P.
2. Le point $M(6\,;2\,;-6)$ appartient-il à P ?
3. Donner les coordonnées de trois points de P.
4. Déterminer une autre représentation paramétrique de P.

Exercice 4 Méthode : Étudier des positions relatives

Étudier les positions relatives des droites d et d', puis du plan P et de la droite d et enfin du plan P et de la droite d'. On donnera leur intersection éventuelle.
Le plan P a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 - 2t + 3t' \\ y = -2 + t - t' \\ z = 3 - t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R} \text{ et } t' \in \mathbb{R}$$

Les droites d et d' ont pour représentation paramétrique :

$$d : \begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = 5 - 2t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R} \text{ et}$$

$$d' : \begin{cases} x = 4 - t \\ y = -2 + t \\ z = 1 + 3t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$