Fonction logarithme népérien

Analyse - Chapitre 5

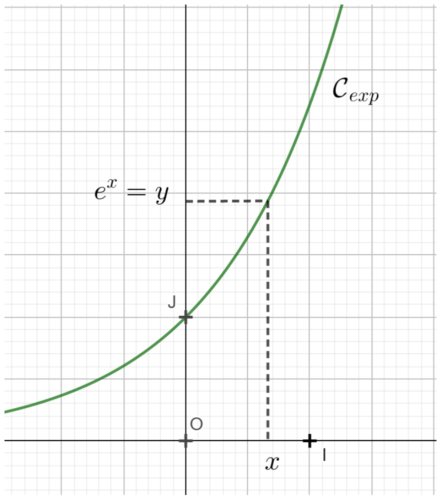
Table des matières

I La fonction ln

I 1 Introduction à cette nouvelle fonction et définition

La fonction **exponentielle** est **continue**, **strictement croissante**, $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$. L'intervalle image de $\mathbb{R}$ par la fonction exponentielle est donc $]0\,;+\infty[$.

D'après le **corollaire du théorème des valeurs intermédiaires**, pour tout réel $y > 0$, l'équation $e^x = y$ admet une unique solution, c'est à dire que :



DEFINITION :

On définit la fonction **logarithme népérien**, notée $\ln$, qui à tout réel **strictement positif**, associe son **unique antécédent par la fonction exponentielle**.
On dit que la fonction **logarithme népérien** est la fonction **réciproque** de la fonction **exponentielle**.

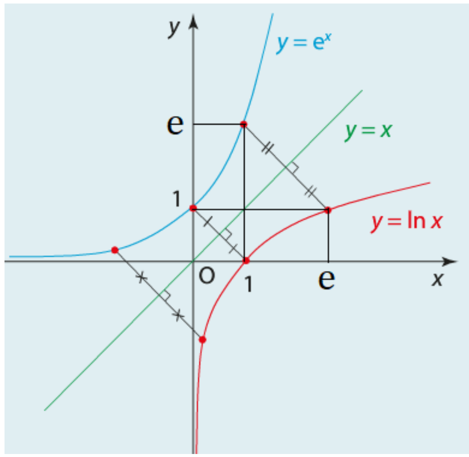
Fonction **exponentielle** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto y = e^x$ Fonction **logarithme** $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $y \mapsto x = \ln y$

REMARQUE(S) :

- **Attention**, cette écriture $\ln x$ n'a de sens que pour $x > 0$.
- **D'autres fonctions réciproques connues :** fonction carré et fonction racine carré sur $\mathbb{R}^+$, fonction inverse qui est également sa propre fonction réciproque sur $\mathbb{R}^{*+}$ et sur $\mathbb{R}^{*-}$.

PROPRIETE : - Conséquence graphique -

Les **courbes** représentatives de ces deux fonctions sont **symétriques** par rapport à la première bissectrice du repère (la droite d'équation $y = x$).



I 2 Conséquences immédiates de la définition

PROPRIETE :

$x > 0$ **et** $y = \ln x \iff e^y = x$.

REMARQUE(S) :

- On note $\ln x$, au lieu de $\ln(x)$, le logarithme népérien de x, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté.
- $e^0 = 1$ donc $\ln(1) = 0$.
- $e^1 = e$ donc $\ln(e) = 1$.

PROPRIETE :

- Pour tout réel x **strictement positif**, $e^{\ln x} = x$.
- Pour tout réel x, $\ln\left(e^x\right) = x$.

DEMONSTRATION :

immédiate

II Etude de la fonction $\ln$

II 1 Continuité, dérivabilité et dérivée

PROPRIETE : Continuité (admise)

La fonction logarithme népérien est **continue** sur $]0;+\infty[$.

PROPRIETE : Dérivabilité

La fonction logarithme népérien est **dérivable** sur $]0;+\infty[$ et $\boxed{\forall x>0,\ \ln'(x)=\dfrac{1}{x}}$.

DEMONSTRATION :

♡ Bac ♡

On **admet la dérivabilité** de la fonction logarithme népérien. Montrons que $\ln'(x)=\dfrac{1}{x}$:

Soit la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\mathrm{e}^{\ln x}=x$. f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$, de dérivée $f'(x)=\ln'(x)\times\mathrm{e}^{\ln x}=x\ln'(x)$.

Or $\forall x\in]0\,;+\infty[$, $f(x)=x$ donc $f'(x)=1$ sur $]0\,;+\infty[$. Donc $\forall x\in]0\,;+\infty[$, $x\ln' x=1$ soit $\ln' x=\dfrac{1}{x}$.

II 2 Variations

PROPRIETE :

La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

DEMONSTRATION :

La dérivée de la fonction $\ln$ est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$. Or si $x > 0$ alors, $\dfrac{1}{x} > 0$.
La **dérivée** de la fonction $\ln$ est **strictement positive**, donc la **fonction** $\ln$ est **strictement croissante** sur $]0;+\infty[$.

x	0		1		e		$+\infty$
$\ln'$	‖			+			
$\ln$	‖	↗	0	↗	1	↗	

Du sens de variation de la fonction $\ln$, on déduit :

PROPRIETE : (conséquence de la stricte monotonie de $\ln$ sur $\mathbb{R}^{*+}$)

Pour tous réels a et b **strictement positifs**,

$\bullet \ln a = \ln b \iff a = b$ $\qquad$ $\bullet \ln a > \ln b \iff a > b$

II 3 Comportement asymptotique

PROPRIETE :

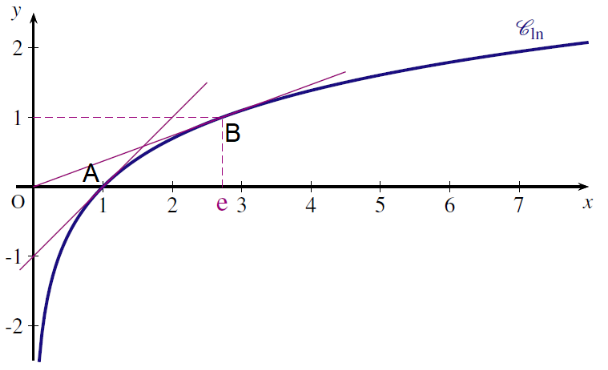
$$\lim_{x \to 0} \ln x = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty.$$

DEMONSTRATION :

- **Limite en $+\infty$:** La fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{*+}$ donc si $x > \mathrm{e}^A$ alors $\ln x > A$.
  Donc pour x suffisamment grand, $\ln x \in]A\,;+\infty[$.
- **Limite en 0 :** $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \left(\dfrac{1}{x}\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} \ln X = +\infty$ donc par limites de fcts composées $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \ln \left(\dfrac{1}{x}\right) = +\infty$
  Or $\ln \dfrac{1}{x} = -\ln x$ (utilisation des prop. algébriques) donc $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$

II 4 Récapitulatif : tableau de variation complet et courbe représentative

x	0		1		e		$+\infty$
$\ln'$	‖			+			
$\ln$	‖ $-\infty$	↗	0	↗	1	↗	$+\infty$

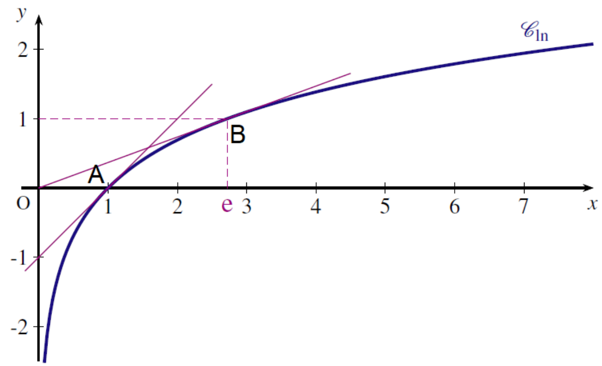


Notons $\mathcal{C}_{\ln}$ la courbe représentative de de la fonction logarithme népérien.

- $\ln(1) = 0$ et $\ln(e) = 1$ donc les points $A(1;0)$ et $B(e;1)$ appartiennent à la courbe $\mathcal{C}_{\ln}$.
- Le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_{\ln}$ au point $A(1;0)$ est $\ln'(1) = 1$.
  Donc la tangente à la courbe $\mathcal{C}_{\ln}$ au point $A(1;0)$ a pour équation : $y = x - 1$.
- Le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_{\ln}$ au point $B(e;1)$ est $\ln'(e) = \dfrac{1}{e}$.
  Donc la tangente à la courbe $\mathcal{C}_{\ln}$ au point $B(e;1)$ a pour équation : $y = \dfrac{1}{e}(x-e)+1 \iff y = \dfrac{1}{e}x$
  La tangente à la courbe $\mathcal{C}_{\ln}$ au point d'abscisse e passe par l'origine du repère.

La fonction $\ln$ est **concave** et la fonction $\exp$ **convexe**. (Preuve immédiate, signe de la dérivée seconde par exemple)

II 5 Signe de $\ln x$



Du sens de variation de la fonction $\ln$ et de $\ln 1 = 0$, on déduit :

PROPRIETE :

Pour tout réel x **strictement positif** :

- $\ln x = 0 \iff x = 1$
- $\ln x > 0 \iff x > 1$
- $\ln x < 0 \iff 0 < x < 1$

x	0		1		$+\infty$
$\ln x$	||	$-$	0	$+$	

III Propriétés algébriques

III 1 Relation fonctionnelle, relation fondamentale

PROPRIETE :

Pour tous réels a et b **strictement positifs** :

$$\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$$

DEMONSTRATION :

Soient $a > 0$ et $b > 0$ deux réels strictement positifs,
Par définition de la fonction logarithme népérien : $a = e^{\ln a}$, $b = e^{\ln b}$ et $a \times b = e^{\ln(a \times b)}$ D'autre part, $a \times b = e^{\ln a} \times e^{\ln b} = e^{\ln a + \ln b}$

D'où $e^{\ln(a \times b)} = e^{\ln a + \ln b}$. Donc $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$.

REMARQUE(S) :

• $\forall a < 0$ et $\forall b < 0$, on a donc $ab > 0$ (donc $\ln(ab)$ existe tandis que $\ln a$ et $\ln b$ non !) et $\ln(ab) = \ln((-a) \times (-b)) = \ln(-a) + \ln(-b)$

• John Napier publia en 1614 une méthode de calcul **transformant les multiplications en additions** : les logarithmes, du grec *logos* (rapport, raison) et *arithmos* (nombre).
La fonction exponentielle, sa fonction réciproque, transforme, elle, les sommes en produits.

III 2 Logarithme d'un inverse, d'un quotient, d'une puissance

PROPRIETE :

Pour tous réels a et b **strictement positifs** et n entier relatif :

1. $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln a$
2. $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$
3. $\ln\left(a^n\right) = n \ln a$
4. $\ln\left(\sqrt{a}\right) = \dfrac{1}{2}\ln a$

DEMONSTRATION :

1. Soit $a > 0$ alors $\dfrac{1}{a} > 0$. Or $a \times \dfrac{1}{a} = 1$ donc $\ln\left(a \times \dfrac{1}{a}\right) = \ln 1 \iff \ln a + \ln\dfrac{1}{a} = 0 \iff \ln\dfrac{1}{a} = -\ln a$
2. Soient $a > 0$ et $b > 0$, $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln\left(a \times \dfrac{1}{b}\right) = \ln a + \ln\dfrac{1}{b} = \ln a - \ln b$
3. Soient $a > 0$ un réel strictement positif et n un entier relatif, $e^{\ln(a^n)} = a^n$ et $e^{n\ln a} = \left(e^{\ln a}\right)^n = a^n$
   Donc $e^{\ln(a^n)} = e^{n\ln a}$ et par conséquent, $\ln\left(a^n\right) = n\ln a$.
4. Soit $a > 0$ alors $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ donc $\ln a = \ln\left(\sqrt{a}\right)^2 = 2\ln\sqrt{a}$

III 3 Résolution d'équations et d'inéquations

Exercice 1 - Questions indépendantes -

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $\ln(2x-1) = \ln(x-2)$
2. $\ln(3x+1) < 2$
3. $2(\ln x)^2 - 3\ln(x) + 1 = 0$
4. $3^n \geqslant 10^{12}$
5. $0,8^n \leqslant 10^{-9}$

Exercice 2 - Loi binomiale -

Une entreprise a chargé un centre d'appel de démarcher des clients potentiels. On a constaté qu'une personne contactée sur cinq accepte un rendez-vous avec un commercial. Ce centre d'appel contacte n personnes successivement et de manière indépendante.

Quel est le nombre minimal de personnes qu'il faudrait démarcher pour que la probabilité qu'au moins une des personnes contactées accepte un rendez-vous avec un commercial soit supérieure à 0,99 ?

IV Compléments

IV 1 Limites

PROPRIETE :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$
- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} (x \ \ln x) = 0$
- $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\ln(1+h)}{h} = 1$

Plus généralement, pour tout entier naturel non nul n,

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = 0$
- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} (x^n \ \ln x) = 0$

DEMONSTRATION :

Pour les 3 premières, les deux dernières sont admises.

- En posant $\ln x = X$, on a $x = \mathrm{e}^X$, et $\dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{X}{\mathrm{e}^X}$. Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ et comme $\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^X}{X} = +\infty$, $\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{X}{\mathrm{e}^X} = 0$.

Donc par composition, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.

- ♡ Bac ♡ $x \ln x = -\dfrac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{1}{x}\right)}$. Or, $\lim\limits_{y \to +\infty} \dfrac{\ln y}{y} = 0$. Le théorème de composition des limites permet de conclure.

Ou encore : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $x \ln x = \mathrm{e}^{\ln x} \ln x$ et comme $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{X \to -\infty} X e^X = 0$, par composition on obtient $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} (x \ \ln x) = 0$

- $\ln' 1 = \dfrac{1}{1} = 1$, donc par définition, $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\ln(1+h) - \ln 1}{h} = 1$. D'où le résultat.

Exercice 3

Déterminer les limites suivantes : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$

IV 2 Dérivée de $\ln u$

PROPRIETE :

Soit u une fonction **dérivable et strictement positive** sur un intervalle I.

La fonction $x \mapsto \ln(u(x))$, notée $\ln u$, est dérivable sur I et on a, sur I, $\boxed{(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}}$.

DEMONSTRATION :

Preuve immédiate avec le théorème de la dérivée d'une fonction composée.

Exercice 4 - Questions indépendantes -

1. Soit la fonction f définie sur $]-\infty\,;-6[$ par $f(x) = \ln\left(x^2 - 36\right)$. Étudier les variations de la fonction f.
2. Soit la fonction g définie par $x \mapsto \ln\left(\dfrac{2x-5}{x+3}\right)$. Étudier les variations de la fonction g.

IV 3 Logarithme décimal

DEFINITION :

La fonction **logarithme décimal**, notée **log**, est définie sur $]0\,;+\infty[$ par $\boldsymbol{\log(x) = \dfrac{\ln x}{\ln 10}}$.

PROPRIETE :

La fonction logarithme décimal vérifie les même propriétés algébriques que la fonction $\ln$.

PROPRIETE :

Pour tout entier relatif n, $\log(10^n) = n$.

$\log(1) = 0$; $\log(10) = 1$; $\log(1000) = 3$; $\log(10^{-2}) = -2$; $\log(0,0001) = -4$