Continuité et Convexité

Analyse - Chapitre 4

Table des matières

I Continuité d'une fonction

I 1 Définition

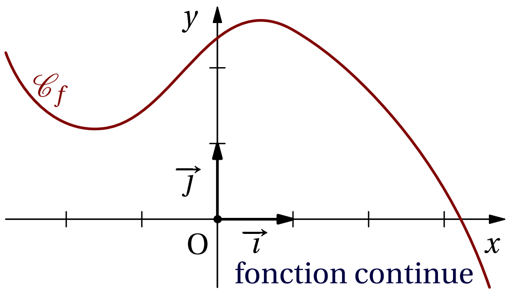
DEFINITION :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant a.

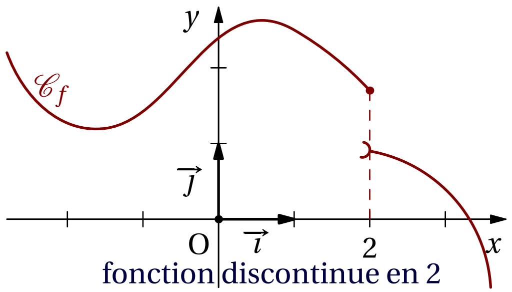
• On dit que f est **continue en** a si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

• On dit que f est **continue sur** I si f est continue en tout point de I.

• Géométriquement, la continuité d'une fonction f sur un intervalle I, correspond à l'idée intuitive selon laquelle, sur I, nous pouvons tracer la courbe représentative de f **d'un tracé continu de crayon**.

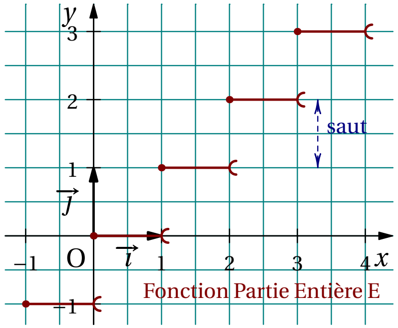


fonction continue



fonction discontinue en 2

• Par exemple, la **fonction partie entière** E
($E(x)$ est le plus grand entier inférieur ou égal à x : $x-1 < E(x) \leqslant x$)
est **discontinue** en chaque point entier. En ces points, la courbe représentative présente des "sauts".



REMARQUE(S) :

Dans un tableau de variations, on admet que les flèches obliques traduisent la **continuité** et la **stricte monotonie** de la fonction sur l'intervalle considéré.

I 2 Dérivabilité et continuité

PROPRIETE :

Si la fonction f est **dérivable** sur l'intervalle I, alors f est **continue** sur I.

DEMONSTRATION :

f est dérivable en $a \in I$ signifie que la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ a pour limite $f'(a)$ quand x tend vers a.
Pour tout $x \neq a$, $g(x)\,(x-a) = f(x)-f(a)$ d'où $f(x) = f(a) + g(x)\,(x-a)$.
Or $\lim\limits_{x\to a} g(x) = f'(a)$ et $\lim\limits_{x\to a} (x-a) = 0$, donc $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.
Ceci est valable pour tout réel a de I donc f est bien continue sur I.

REMARQUE(S) :

- **La réciproque est fausse** : les fonctions **valeur absolue et racine carrée ne sont pas dérivables en zéro** mais elles sont **continues en zéro**.

  ▶ En effet, la **fonction racine carrée** est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ donc elle est continue sur cet intervalle.
  De plus, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \sqrt{x} = 0$, et comme $\sqrt{0} = 0$, elle est continue en zéro, donc sur $[0\,;+\infty[$.

  ▶ Pour la **fonction valeur absolue** :
  $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} |x| = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}(-x) = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} |x| = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x = 0$, et $|0| = 0$
  donc la fonction valeur absolue est continue en zéro et donc sur $\mathbb{R}$ (car dérivable sur $\mathbb{R}^{*-}$ et sur $\mathbb{R}^{*+}$).

- Les fonctions **polynômes** sont continues sur $\mathbb{R}$ et les fonctions **rationnelles** sont continues sur leur ensemble de définition. De manière générale, **toutes les fonctions de référence** sont **continues** sur leur ensemble de définition.
  De plus, toute fonction construite à partir de ces fonctions **par addition, multiplication ou composition**, est continue sur tout intervalle où elle est définie.

II Application aux suites

II 1 Image d'une suite convergente par une fonction continue

PROPRIETE : (admise)

Si f est une fonction **continue** sur un intervalle I et (u_n) une suite d'**éléments de** I, **convergeant** vers un réel ℓ de I.
Alors $\boxed{\lim_{n \to +\infty} f(u_n) = f(\ell)}$.

REMARQUE(S) :

La **réciproque est fausse**. La **suite** $(f(u_n))$ **peut converger** tandis que la **suite** (u_n) **diverge**. Par exemple, la suite u définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = n$ et f, **fonction inverse**, définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. u **diverge** vers $+\infty$ et $f(u_n) = \dfrac{1}{n}$ **converge** vers 0.

II 2 Un théorème du point fixe

PROPRIETE :

Soit f est une fonction **continue sur une intervalle** I **dans lui-même**
et (u_n), la suite définie par un réel u_0 de I et la **relation de récurrence**, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

Si la suite u **converge** vers le nombre réel ℓ de I. **Alors** ℓ est une **solution** de l'équation $f(x) = x$.

DEMONSTRATION :

On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$. Or d'après la propriété précédente, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell)$ d'où $\boxed{\ell = f(\ell)}$.

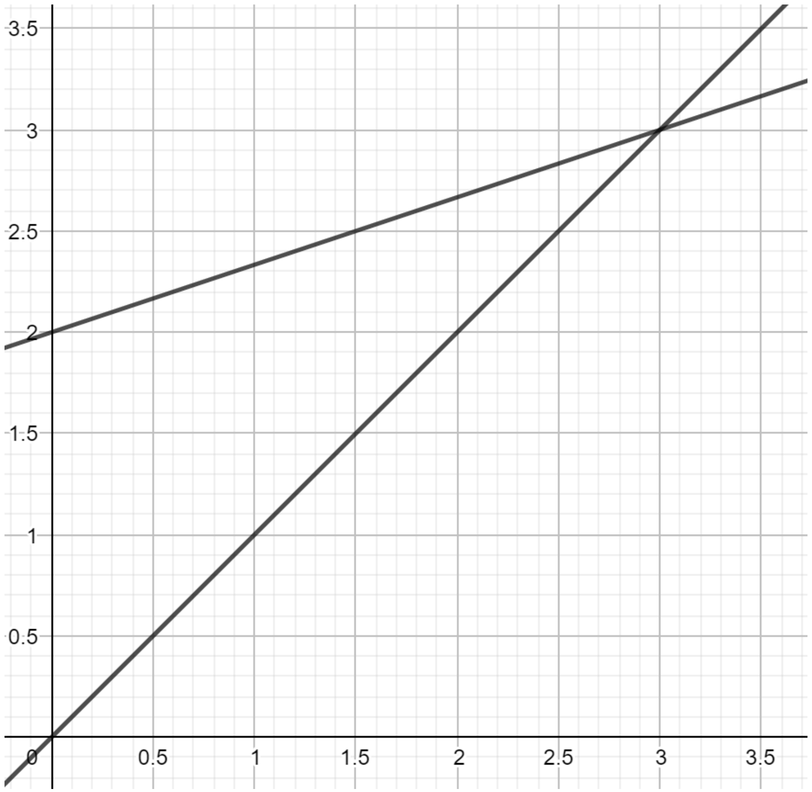
REMARQUE(S) :

Attention, l'équation $f(x) = x$ peut admettre plusieurs solutions, ℓ est l'une d'entre elles.

Exercice 1

A) Soit la suite u définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + 2$.

1. Montrer que u est croissante et majorée par 3.
2. En déduire qu'elle converge.
3. Déterminer sa limite.



Exercice 2

Soit la suite u définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{3}{u_n + 1}$. On admet que u **converge** et que pour tout entier n, $u_n \in [0\,;3]$.

Déterminer la limite de la suite u.

III Le théorème des valeurs intermédiaires

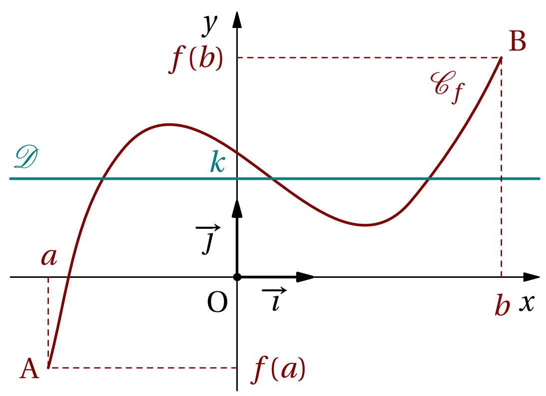
III 1 Le théorème des valeurs intermédiaires (TVI)

PROPRIETE : - Théorème des valeurs intermédiaires -

Si f est une fonction définie et **continue** sur un intervalle $[a\,;b]$.
Alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe **au moins un** réel c compris entre a et b tel que :

$$f(c) = k.$$

Autrement dit, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution dans $[a\,;b]$.



DEMONSTRATION :

Ex 119 p 224

Exercice 3

1) L'équation $\dfrac{x+6}{x^2+1} = 2$ admet-elle une solution (ou plusieurs) dans l'intervalle $[1\,;4]$?
2) Montrer que l'équation $\cos x = x$ a au moins une solution réelle.

III 2 Le corollaire du TVI pour les fonctions STRICTEMENT monotones

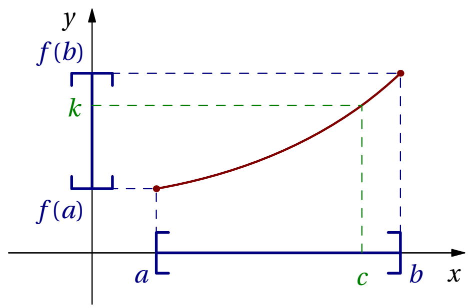
PROPRIETE : - Corollaire du TVI -

Si f est une fonction **continue et strictement monotone** sur $[a\,;b]$.

Alors, **pour tout** réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $\boldsymbol{f(x) = k}$ a une **solution unique** dans $[a\,;b]$.

DEMONSTRATION :

- L'existence d'une solution c découle du théorème des valeurs intermédiaires. On a alors $f(c) = k$.
- L'unicité de la solution c découle de la stricte monotonie de la fonction f.
  Dans le cas où f est strictement croissante sur l'intervalle $[a\,;b]$, on a :
  - Si $c > a$, alors, pour tout x tel que $a \leqslant x < c$, on a $f(x) < f(c)$; donc $f(x) < k$.
    Ainsi, l'équation $f(x) = k$ n'a pas de solution dans l'intervalle $[a\,;c[$.
  - Si $c < b$, alors, pour tout x tel que $c < x \leqslant b$, on a $f(c) < f(x)$; donc $k < f(x)$.
    Ainsi, l'équation $f(x) = k$ n'a pas de solution dans l'intervalle $]c\,;b]$.

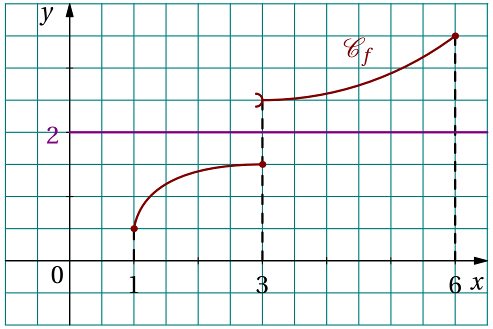


Finalement, le réel c est l'unique solution de l'équation $f(x) = k$ dans l'intervalle $[a\,;b]$.

REMARQUE(S) :

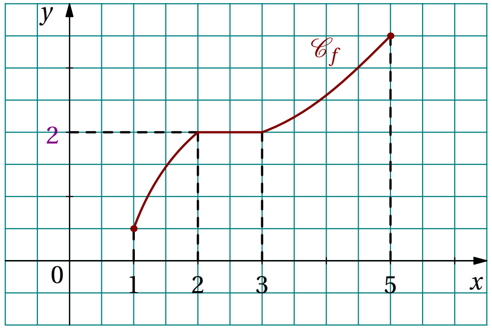
- L'**existence** est assurée par la **continuité** :

  $f(x) = 2$ n'a pas de solution.



- L'**unicité** est assurée par la **stricte monotonie** :

  $f(x) = 2$ admet une infinité de solutions.



- **Cas particulier souvent utile en exercice :**

Si f est continue et strictement monotone sur $[a\,;b]$ et si $f(a)f(b) < 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique dans $[a\,;b]$.

En effet : $f(a)f(b) < 0 \implies f(a) \neq 0$, $f(b) \neq 0$ et $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires.
Donc 0 est dans l'intervalle $[f(a)\,;f(b)]$, ou $[f(b)\,;f(a)]$, d'où le résultat.

- **Le théorème précédent s'étend au cas d'un intervalle ouvert ou semi-ouvert, borné ou non borné.**

Exercice 4

Démontrer que l'équation $\sqrt{x} = \dfrac{5}{x-2}$ admet une unique solution réelle α sur $]2\,;+\infty[$.
Encadrer α par deux entiers consécutifs.

IV Convexité

IV 1 Dérivée seconde d'une fonction

DEFINITION :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et f' sa dérivée.
Si f' est, elle aussi, dérivable sur I, on dit que f est **deux fois dérivable** sur I ;
et la dérivée de f' est appelée la **dérivée seconde** de f sur I et est notée f''.

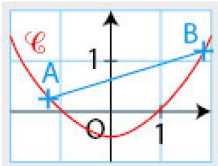
IV 2 Définition d'une fonction convexe / d'une fonction concave

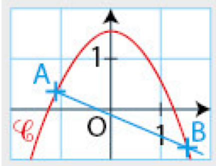
DEFINITION :

Soit f est une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et C sa courbe représentative dans un repère.

- Dire que f est **convexe** sur I signifie que sur I, sa courbe représentative C est entièrement située **en dessous** de chacune de ses **cordes**.

- Dire que f est **concave** sur I signifie que sur I, sa courbe représentative C est entièrement située **au-dessus** de chacune de ses **cordes**.





IV 3 Convexité des fonctions deux fois dérivables

PROPRIETE : (admises)

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur un intervalle I et C sa courbe représentative dans un repère.

Les propositions suivantes sont **équivalentes** :

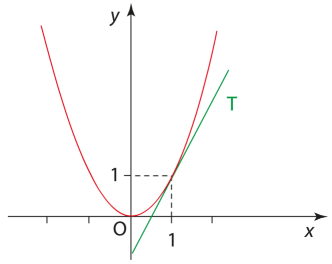
- f est **convexe** sur I.
- C est entièrement située **au dessus** de ses **tangentes**.
- f'' est **positive** sur I.
- f' est **croissante** sur I.

De même, les 4 suivantes sont également **équivalentes** :

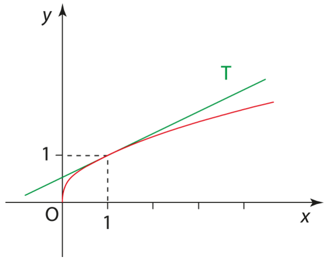
- f est **concave** sur I.
- C est entièrement située **en dessous** de ses **tangentes**.
- f'' est **négative** sur I.
- f' est **décroissante** sur I.

Exemples :

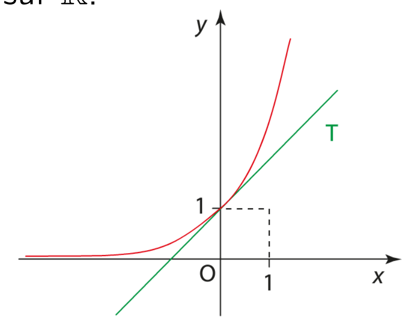
La **fonction carré** est **convexe** sur $\mathbb{R}$.



La fonction **racine carrée** est **concave** sur $\mathbb{R}^+$.



La fonction **exponentielle** est **convexe** sur $\mathbb{R}$.



DEMONSTRATION :

♡ **Bac** ♡ Si f'' est positive sur I alors C est entièrement située **au dessus** de ses **tangentes**.

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur un intervalle I et telle que f'' est positive sur I.
Soit a un réel de l'intervalle I.
Une équation de la tangente à la courbe de f en son point d'abscisse a est : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.
Soit g la fonction définie par $g(x) = f(x) - [f'(a)(x-a) + f(a)]$.
g est la somme de f et d'une fonction affine donc g est dérivable sur I.
Et $\forall x \in I$, $g'(x) = f'(x) - f'(a)$.

Or f'' est positive sur I donc f' est croissante sur I, ainsi :
• si $x < a$ alors $f'(x) \leqslant f'(a)$, càd $g'(x) \leqslant 0$, donc g décroit sur l'intervalle $I \cap]-\infty\,;a]$.
• si $x > a$ alors $f'(x) \geqslant f'(a)$, càd $g'(x) \geqslant 0$, donc g croit sur l'intervalle $I \cap [a\,;+\infty[$.
et g admet un minimum en a valant $g(a)$. Calculons $g(a)$.
$g(a) = f(a) - f'(a) \times 0 - f(a) = 0$.
On peut donc en déduire que g est positive sur I, donc que la courbe de f est située au dessus de sa tangente en a.
Comme la démonstration est valable pour tout a de l'intervalle I, la courbe représentative de f est située au dessus de toutes ses tangentes.

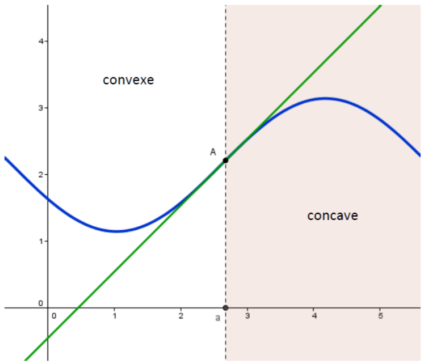
IV 4 Point d'inflexion

DEFINITION :

Soit f est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et C sa courbe représentative dans un repère.
Dire que $A(a\,;f(a))$ est un **point d'inflexion** de C signifie qu'en A, la **courbe** C **traverse sa tangente**.

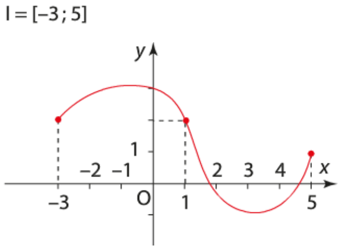
REMARQUE(S) :

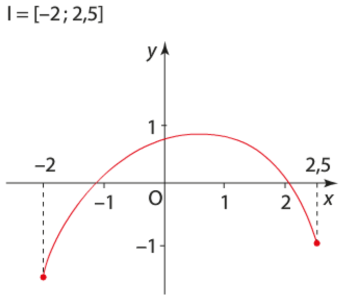
En conséquence, en l'abscisse a d'un point d'inflexion, la fonction f passe de concave à convexe, ou de convexe à concave.

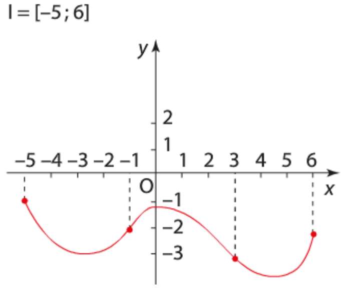


Exercice 5

Pour chacune des courbes suivantes, indiquer si la fonction associée est convexe, concave ou ni l'un ni l'autre, sur I. Dans ce dernier cas, indiquer la ou les points d'inflexion et les intervalles sur lesquels la fonction est concave/convexe.







IV 5 Point d'inflexion et dérivée seconde

PROPRIETE : (admise)

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit C sa courbe représentative dans un repère et $a \in I$.

Dire que $A(a\,;f(a))$ est un **point d'inflexion** de C revient à dire que f'' **s'annule en** a **en changeant de signe en** a.

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^5 - 5x^4$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative. Étudier les variations de et la convexité de f.

IV 6 Convexité et inégalités

Exercice 7

Objectif : démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x \geqslant x+1$.

On considère donc la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^x$. Soit $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

1. Montrer que f est convexe sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.
3. En déduire alors que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x \geqslant x+1$.