Limites de fonctions et compléments à la dérivation

Analyse - Chapitre 3

Table des matières

I Limite d'une fonction à l'infini

I 1 Limite finie à l'infini

I 1 a Définition

DEFINITION :

• Soit l un réel et f une fonction définie sur intervalle $I =]A\,;+\infty[$, avec A un réel, ou $I = \mathbb{R}$.
On dit que $f(x)$ tend vers l quand x tend vers $+\infty$ si tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand. On note : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$.

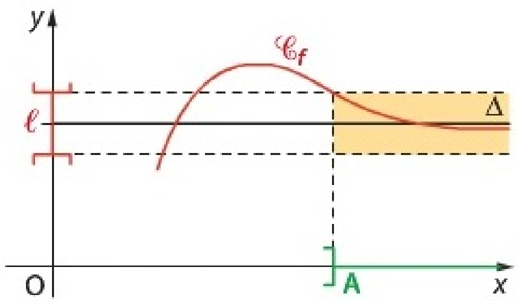
• Soit l un réel et f une fonction définie sur intervalle $I =]-\infty\,;A[$, avec A un réel, ou $I = \mathbb{R}$.
On dit que $f(x)$ tend vers l quand x tend vers $-\infty$ si tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez petit. On note : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l$.

REMARQUE(S) :

• $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$ si et seulement si $\forall \epsilon \in \mathbb{R}^{*+}$, $\exists A \in \mathbb{R}$ tq $\forall x > A$, $f(x) \in]l-\epsilon; l+\epsilon[$.
• $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l$ si et seulement si $\forall \epsilon \in \mathbb{R}^{*+}$, $\exists A \in \mathbb{R}$ tq $\forall x < A$, $f(x) \in]l-\epsilon; l+\epsilon[$.

I 1 b Interprétation graphique et asymptote horizontale

Quel que soit l'intervalle ouvert contenant l, et aussi petit soit-il, il existe un nombre A tel que la courbe C_f restreinte à l'intervalle $]A;+\infty[$ soit située dans la partie colorée ci-dessous :



DEFINITION :

Soit f une fonction et l un réel.
Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$, alors on dit que la droite d'équation $y = l$ est une **asymptote horizontale** à la courbe de f en $+\infty$.
(*Même définition en* $-\infty$)

REMARQUE(S) :

Dans ce cas, la position de la courbe représentative de f par rapport à son asymptote est donnée par le signe de $f(x) - l$.

Dans la suite du chapitre, on admettra que les fonctions utilisées dans les définitions et propriétés sont définies au moins sur un intervalle en adéquation avec la limite étudiée.

I 1 c Fonctions de référence

PROPRIETE :

- Les fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{x}$, $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$, $x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$, $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $x \mapsto \dfrac{1}{|x|}$ ont pour limite 0 en $+\infty$.
- Les fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{x}$, $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$, $x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$, $x \mapsto \dfrac{1}{|x|}$ ont pour limite 0 en $-\infty$.

DEMONSTRATION :

Pour $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$: Soit I un intervalle ouvert contenant 0. Posons alors $I =]\lambda\,;\mu[$ avec $\lambda < 0$ et $\mu > 0$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^2} \in]\lambda\,;\mu[&\Leftrightarrow \lambda < \frac{1}{x^2} < \mu \\
&\Leftrightarrow 0 < \frac{1}{x^2} < \mu \text{ (car } \lambda < 0) \\
&\Leftrightarrow x^2 > \frac{1}{\mu} \text{ (car la fonction inverse est strictement décroissante sur } \mathbb{R}_+^*.) \\
&\Leftrightarrow x < -\frac{1}{\sqrt{\mu}} \text{ ou } x > \frac{1}{\sqrt{\mu}}.
\end{aligned}$$

Donc pour x assez grand, mais aussi pour x assez petit, I contient tous les $\dfrac{1}{x^2}$, donc $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0}$.

I 2 Limite infinie à l'infini

I 2 a Définition

DEFINITION :

Soit f une fonction.

On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ si tout intervalle de la forme $]A\,;+\infty[$ contient **toutes** les valeurs de $f(x)$ pour x **assez grand**.

On note : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty}$ On définit de même $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

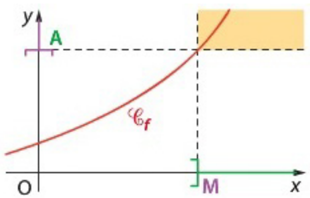
REMARQUE(S) :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ si et seulement si $\forall A\in\mathbb{R}$, $\exists M\in\mathbb{R}$ tel que $\forall x>M,\ f(x)>A$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ si et seulement si $\forall A\in\mathbb{R}$, $\exists M\in\mathbb{R}$ tel que $\forall x<M,\ f(x)>A$. (faire écrire les autres)

I 2 b Interprétation graphique

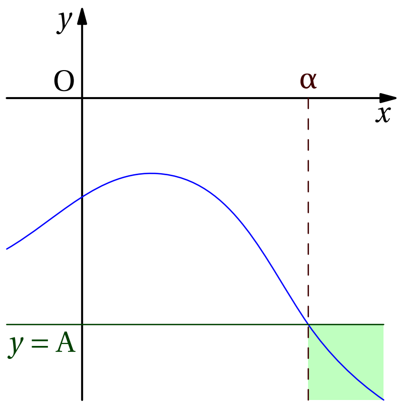
La courbe C_f restreinte à l'intervalle $]M;+\infty[$ est dans la partie colorée ci-dessous :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty}$$



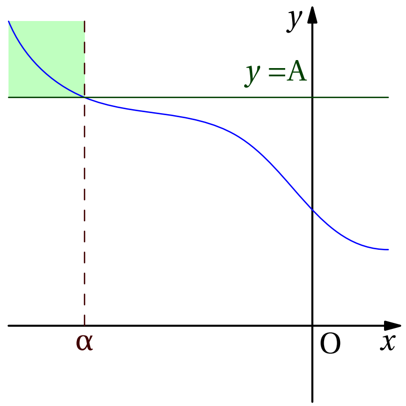
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

$$x > \alpha \implies f(x) < A$$



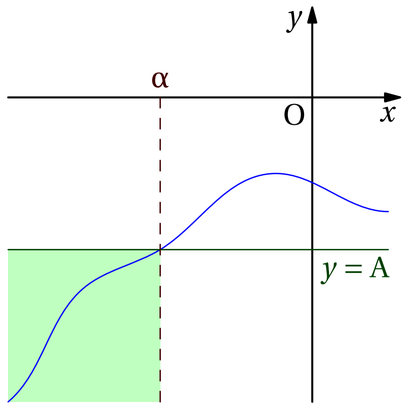
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

$$x < \alpha \implies f(x) > A$$



$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

$$x < \alpha \implies f(x) < A$$



Exercice 1

Démontrer à l'aide de la définition que $\lim\limits_{x \to -\infty} (2x - x^2) = -\infty$.

REMARQUE(S) :

Une fonction n'admet pas nécessairement de limite en $\pm\infty$; par exemple les fonctions trigonométriques : cosinus, sinus

I 2 c Fonctions de référence

PROPRIETE :

- Les fonctions $x \mapsto x$, $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$), $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto |x|$ ont pour limite $+\infty$ en $+\infty$.
- Les fonctions $x \mapsto x$, $x \mapsto x^3$, $x \mapsto x^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$, n impair) ont pour limite $-\infty$ en $-\infty$.
- Les fonctions $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$, n pair), $x \mapsto |x|$ ont pour limite $+\infty$ en $-\infty$.

DEMONSTRATION :

Pour $x \mapsto x^2$ en $-\infty$: Soit $I =]A\,;+\infty[$ avec A un réel strictement positif. $x^2 > A \Leftrightarrow x > \sqrt{A}$ ou $x < -\sqrt{A}$.
Donc pour $x < -\sqrt{A}$, $x^2 \in I$: I contient tous les x^2 pour x assez petit, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$.

II Limite infinie en un réel

II 1 Définition

DEFINITION :

Soient f une fonction et a un réel.
On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers a si tout intervalle de la forme $]B\,;+\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez proche de a.
On note $\boxed{\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty}$

$\forall B \in \mathbb{R}$, $\exists \epsilon > 0$ tel que $\forall x \in]a-\epsilon\,; a+\epsilon[$, $f(x) > B$

On définit de même $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.

REMARQUE(S) :

- **Continuité :** Lorsque f est définie en a, on admettra que : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ (car f est continue en a).
- Si f est restreinte à l'intervalle $]a\,;+\infty[$ (limite à droite de a) : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ si et seulement si $\forall B \in \mathbb{R}$, $\exists \epsilon \in \mathbb{R}^{*+}$ tq $\forall x \in]a; a+\epsilon[$, $f(x) > B$.

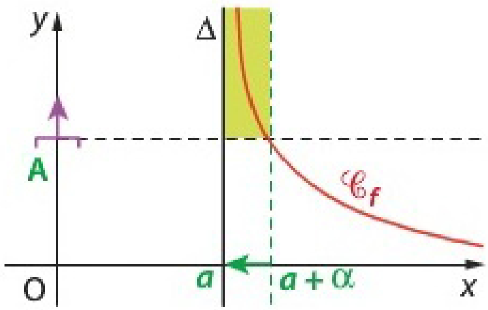
II 2 Interprétation graphique et asymptote verticale

DEFINITION :

Soient f une fonction et a un réel.
Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$, on dit que la droite d'équation $x = a$ est **asymptote verticale** à la courbe de f.

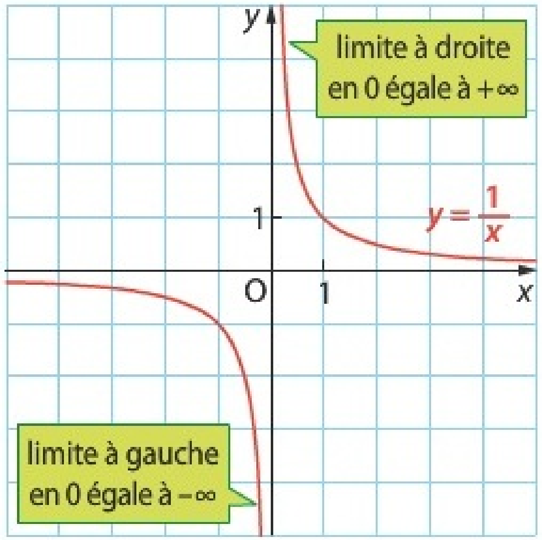
REMARQUE(S) :

Ce résultat reste valable si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = -\infty$, ou si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = +\infty$.
La courbe C_f restreinte à l'intervalle $]l\,;l+\epsilon[$ est dans la partie colorée ci-dessous :



II 3 Limite à gauche, limite à droite

Étudions la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ lorsque x prend des valeurs de plus en plus proches de 0. On remarque qu'on ne peut pas conclure directement sur la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0 sans distinguer deux cas : x positif ou x négatif.



Cas où $x > 0$:

Quel que soit le nombre $B > 0$, $\dfrac{1}{x} > B \Leftrightarrow x < \dfrac{1}{B}$ (car la fonction inverse est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$).

Autrement dit, quel que soit $B > 0$, si $x < \dfrac{1}{B}$, l'intervalle $]B\,;+\infty[$ contient les nombres $f(x)$.

On dit que **la limite à droite en 0** de la fonction f est $+\infty$ et on le note $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$.

Cas où $x < 0$:

On prouve de manière analogue que lorsque x tend vers 0 en prenant des valeurs strictement inférieures à 0, alors $\dfrac{1}{x}$ tend vers $-\infty$.

On dit que **la limite à gauche en 0** de la fonction f est $-\infty$ et on le note $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = -\infty$.

II 4 Fonctions de référence

PROPRIETE :

- Les fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$, $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $x \mapsto \dfrac{1}{|x|}$ ont pour limite $+\infty$ en 0.
- Les fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ et $x \mapsto \dfrac{1}{x^3}$ ont pour limite $-\infty$ quand x tend vers 0 par valeurs inférieures (« à gauche ») et $+\infty$ quand x tend vers 0 par valeurs supérieures (« à droite »)

Faire écrire ces résultats avec la notation $\lim$.

DEMONSTRATION :

Pour $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ en 0 : Soit $]B;+\infty[$ avec B un réel.

Si $B \leqslant 0$, alors le résultat est immédiat car pour tout réel x non nul, $\dfrac{1}{x^2} \geqslant 0$.

Supposons maintenant que B est strictement positif.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^2} \in]B;+\infty[&\Leftrightarrow \frac{1}{x^2} > B \\
&\Leftrightarrow x^2 < \frac{1}{B} \text{ (la fonction inverse étant strictement décroissante sur } \mathbb{R}_+^*.) \\
&\Leftrightarrow |x| < \frac{1}{\sqrt{B}} \text{ (la fonction racine carrée étant strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^*. \\
&\Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{B}} < x < \frac{1}{\sqrt{B}}
\end{aligned}$$

Donc il existe bien un intervalle I ouvert autour de 0 tq $\forall x \in I$, $f(x) > B$

Ainsi pour x assez proche de 0, $\dfrac{1}{x^2} \in I$ donc $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$.

III Opérations sur les limites

III 1 Somme, produit, quotient

Tableau des règles opératoires :
Les tableaux du chapitre « *Limites de suites* » sont à reprendre, en remplaçant les suites u et v par les fonctions f et g définies au voisinage d'un réel a ou de $+\infty$ ou $-\infty$.

III 2 Exemple général

Exercice 2

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{-5}{x+2}$ et C_f sa courbe représentative.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. Préciser les asymptotes éventuelles à C_f.
3. Étudier les variations de f puis dresser son tableau de variations.
4. Tracer dans un repère orthonormé la courbe de la fonction f ainsi que ses asymptotes.

III 3 Quelques calculs de limites

Exercice 3

Déterminer les limites suivantes et en donner une interprétation graphique :

1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \left(\dfrac{1}{x}+2\right)(x^2-1)$? 2) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x+1}{x+2}$? 3) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2x^2}{x^2-4}$? 4) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$?

III 4 Limite d'une fonction composée

$$x \xmapsto{g} g(x) \xmapsto{f} f\left[g(x)\right] = f \circ g(x)$$

DEFINITION :

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et g une fonction définie sur un intervalle J telle que, pour tout $x \in J$, $g(x) \in I$.
On appelle fonction composée $f \circ g$ la fonction définie sur J telle que pour tout x de J, on a :

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

PROPRIETE :

On reprend les notations de la définition précédente.
Soient a, b et L des réels ou éventuellement $+\infty$ ou $-\infty$. Si $\lim\limits_{x \to a} g(x) = b$ et $\lim\limits_{x \to b} f(x) = L$, alors $\lim\limits_{x \to a}(f \circ g)(x) = L$

Exercice 4

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$?
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 - 3x}$?

Exercice 5

Soit $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{4x-5}{x-1}}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

IV Limites et comparaison

IV 1 Théorème de comparaison

PROPRIETE : - Théorème de comparaison -

Soient f et g deux fonctions définies sur $I =]A\,;+\infty[$ (ou $I = \mathbb{R}$) avec A un réel.

- Si pour tout x de I, $f(x) \geqslant g(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
- Si pour tout x de I, $f(x) \leqslant g(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

REMARQUE(S) :

- Ce théorème reste valable en $-\infty$ ou en un réel a.
- Ce théorème reste valable également si l'inégalité n'est vérifiée qu'au voisinage de $+\infty$ (respectivement de $-\infty$ ou de a).

DEMONSTRATION :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ donc tout intervalle de la forme $]A\,;+\infty[$ ($A \in \mathbb{R}$) contient toutes les valeurs de $g(x)$ pour x assez grand dans I.
Or pour tout $x \in I$, $f(x) \geqslant g(x)$.
Ainsi, l'intervalle $]A\,;+\infty[$ contient aussi toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand dans I. C'est-à-dire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
- Le deuxième point se démontre de manière analogue.

Exercice 6

Déterminer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de $x \mapsto \cos x - x$.

IV 2 Théorème des gendarmes

PROPRIETE : - Théorème des gendarmes (admis) -

Soient f, g et h trois fonctions définies sur $I =]A\,;+\infty[$ (ou $I = \mathbb{R}$), avec A un réel.
Soit l un réel.
Si pour tout x de I, $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$, et si g et h ont la même limite l en $+\infty$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$.

REMARQUE(S) :

- Ce théorème reste valable en $-\infty$ ou en un réel a.
- Ce théorème reste valable également si l'encadrement n'est vérifié qu'au voisinage de $+\infty$ (respectivement de $-\infty$ ou de a).

Exercice 7

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$.

1. Montrer que f a une limite en $+\infty$ et interpréter graphiquement cette limite. (*Attention, division par* $x > 0$)
2. Déterminer de même la limite de f en $-\infty$. (*Attention, division par* $x < 0$)
3. Déterminer la limite de f en 0. (*Utiliser le taux de variation de la fonction* $\sin$ *en* 0)

Exercice 8

Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2 + 3\cos x}{x}$. Déterminer sa limite en $+\infty$.

V Limites de la fonction exp

V 1 Limites en infini

PROPRIETE :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$.

DEMONSTRATION :

♡ Bac ♡

1. Prouvons que pour tout x, $\mathrm{e}^x \geqslant x$.

   La fonction $\varphi\colon x \mapsto \mathrm{e}^x - x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\varphi'(x) = \mathrm{e}^x - 1$
   $\mathrm{e}^x - 1 \geqslant 0 \iff \mathrm{e}^x \geqslant 1 \iff \mathrm{e}^x \geqslant \mathrm{e}^0 \iff x \geqslant 0$.
   Donc $\varphi'(x) \geqslant 0$ sur $[0\,;+\infty[$ et $\varphi'(x) \leqslant 0$ sur $]-\infty, ; 0]$. D'après le tableau de variation de φ et le fait que $\varphi(0) = 1$, $\varphi(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
φ'		$-$	0	$+$	
φ		$\searrow$	1	$\nearrow$	

   Ainsi, pour tout réel x, $\mathrm{e}^x \geqslant x$. D'après un théorème de comparaison, on a :
   $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$.

2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{\mathrm{e}^{-x}}$. $\lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \mathrm{e}^X = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty$.
   Par passage à l'inverse, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{\mathrm{e}^{-x}} = 0$. Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$.

V 2 Des limites importantes

PROPRIETE :

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

DEMONSTRATION :

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{x+0} - e^0}{x - 0}$.

On reconnait la limite, quand x tend vers 0, du taux de variation de la fonction exponentielle entre 0 et $0 + x$; or la fonction exp est dérivable en 0, donc $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \exp'(0) = 1$.

PROPRIETE : Croissance comparée entre la fonction exponentielle et les puissance de x, en $+\infty$

$\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty}$ (1) et plus généralement, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty}$ (2), avec n entier naturel supérieur ou égal à 1 .

On a aussi $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{\sqrt{x}} = +\infty}$ (3)

DEMONSTRATION :

1) ♡ **Bac** ♡

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = e^x - x$.

Or, pour tout réel x, $e^x > x$ (vu au-dessus), donc $f'(x) > 0$. La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $f(0) = 1$.

Ainsi, pour tout réel x strictement positif, $f(x) > 1 > 0$, d'où $e^x > \frac{x^2}{2}$, soit $\frac{e^x}{x} > \frac{x}{2}$ (car $x > 0$).

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{2} = +\infty$ donc d'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

2) ♡ **Bac** ♡

Pour n supérieur ou égal à 2, pour tout réel x non nul, $\frac{\mathrm{e}^x}{x^n} = \frac{\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{n}}\right)^n}{x^n} = \frac{\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{n}}\right)^n}{\left(n \times \frac{x}{n}\right)^n} = \left(\frac{1}{n} \times \frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}\right)^n$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{n} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$ donc par composition $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}} = +\infty$ et comme $\frac{1}{n} > 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{n} \times \frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}\right) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{n} \times \frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}\right)^n = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{\mathrm{e}^x}{x^n}\right) = +\infty$

3) Admis

PROPRIETE : Croissance comparée entre la fonction exponentielle et les puissance de x, en $-\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$ (1) et plus généralement $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$ (2)

DEMONSTRATION :

1) Posons $X = -x$. Ainsi, $xe^x = -Xe^{-X} = -\dfrac{X}{e^X}$.

On a vu précédemment que $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{e^X}{X} = +\infty$, d'où, par passage à l'inverse, $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{X}{e^X} = 0$.

Ainsi, $\lim\limits_{x\to-\infty} X = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \left(-\dfrac{X}{e^X}\right) = 0$. Donc par limite de fonction composée, $\lim\limits_{x\to-\infty} (xe^x) = 0$.

2) Admis

Exercice 9

Dans les deux cas suivants, déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.

- $f : x \mapsto \mathrm{e}^{3-x}$ sur $\mathbb{R}$
- $f : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{2x}+2}{\mathrm{e}^x-1}$ sur $\mathbb{R}^*$.

VI Compléments à la dérivation

VI 1 Dérivée d'une fonction composée

$$x \overset{g}{\longmapsto} g(x) \overset{f}{\longmapsto} f\left[g(x)\right] = f \circ g(x)$$

PROPRIETE : (admise)

Si g est une fonction dérivable sur un intervalle I, et f une fonction dérivable sur un intervalle J tel que, pour tout réel x de I, $g(x)$ appartient à J,
alors la fonction composée $f \circ g \colon x \longmapsto f[g(x)]$ est **dérivable** sur I et, pour tout x de I :

$$\boldsymbol{(f \circ g)'(x) = g'(x) \times f'\left(g(x)\right)} \quad \text{ou encore} \quad (f \circ g)' = g' \times f' \circ g\ .$$

Les 3 paragraphes suivants sont des conséquences de cette propriété.

VI 2 Dérivée de la fonction $x \longmapsto \sqrt{u(x)}$

PROPRIETE :

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I, et telle que pour tout x de I, $\boldsymbol{u(x) > 0}$.

Alors la fonction $\sqrt{u}$ est dérivable sur I et : $\boxed{\left(\sqrt{\boldsymbol{u}}\right)' = \dfrac{\boldsymbol{u'}}{\boldsymbol{2\sqrt{u}}}}$.

Exercice 10

Étudier la dérivabilité de $\boldsymbol{f : x \mapsto \sqrt{x^2 + 2}}$.

VI 3 Dérivée de la fonction $x \longmapsto (u(x))^n$, $n \in \mathbb{Z}^*$

PROPRIETE :

Soit n un entier non nul.
Si u est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I, et si lorsque n est strictement négatif, u ne s'annule pas sur I, alors la fonction u^n est dérivable sur I et $\boxed{\boldsymbol{(u^n)' = nu'u^{n-1}}}$.

VI 4 Dérivée de la fonction $x \longmapsto e^{u(x)}$

PROPRIETE :

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.
Alors la fonction $\boldsymbol{e^u : x \mapsto \mathrm{e}^{u(x)}}$ est dérivable sur I et $\boxed{\boldsymbol{(\mathrm{e}^u)' = u'\,\mathrm{e}^u}}$.

Exercice 11

Étudier la dérivabilité de la fonction $h : x \mapsto \mathrm{e}^{-3x^2}$.

REMARQUE(S) :

Sens de variation de e^u

Comme $(e^u)' = u' e^u$ et $e^u > 0$, les dérivées u' et $u' e^u$ sont de même signe.
Ainsi, si u est dérivable, alors les fonctions u et e^u ont **le même sens de variation**.