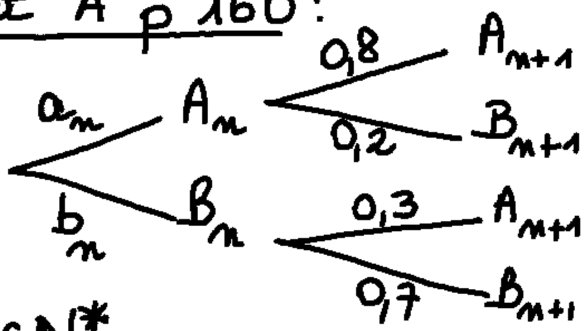
Sujet A p 160 :

1°) a)



et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{a_n + b_n = 1}$ (*)

CONSTITUENT

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+1} = P(A_{n+1})$ or A_n et B_n constituent une partition de l'univers, donc en application de la formule des Probabilités Totales, on a :

$$a_{n+1} = P(A_{n+1} \cap A_n) + P(A_{n+1} \cap B_n)$$
$$= P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(A_{n+1})$$
$$= a_n \times 0{,}8 + b_n \times 0{,}3$$
$$= 0{,}8\, a_n + 0{,}3(1 - a_n) \quad \{\text{car } b_n = 1 - a_n \text{ (*)}\}$$

$$\boxed{a_{n+1} = 0{,}5\, a_n + 0{,}3}$$

2°) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = a_n - 0{,}6$

Donc
$$u_{n+1} = a_{n+1} - 0{,}6$$
$$= 0{,}5\, a_n + 0{,}3 - 0{,}6$$
$$= 0{,}5\, a_n - 0{,}3$$
$$= 0{,}5\left(a_n - \frac{0{,}3}{0{,}5}\right)$$
$$= 0{,}5\,(a_n - 0{,}6)$$
$$\boxed{u_{n+1} = 0{,}5\, u_n}$$

Donc u est géométrique de raison $0{,}5$ et de 1er terme $u_1 = a_1 - 0{,}6 = a - 0{,}6$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*$,
$$\boxed{u_n = (a - 0{,}6)\, 0{,}5^{n-1}}$$

3°) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = a_n - 0{,}6 \iff a_n = u_n + 0{,}6$
$$\iff \boxed{a_n = (a - 0{,}6) \times 0{,}5^{n-1} + 0{,}6}$$

4°) Comme $0 < 0{,}5 < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} (0{,}5^{n-1}) = 0$ Donc $\boxed{\lim a_n = 0{,}6}$

Ne dépend PAS de a.

Sujet Cp 160-161 :

1) $\boxed{\text{FAUX}}$, u peut être convergente et non-monotone

CONTREX : $(-1)^n \times \frac{1}{n}$

2.) p est définie explicitement par $p_n = f(n)$ avec f fonction polynôme : $x \mapsto x^2 - 42x + 4$.

Donc p a même sens de variation que f.

or f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = 2x - 42 = 2(x - 21)$

• $x - 21 > 0 \iff x > 21$

Donc $f'(x) > 0 \iff x \in]21 ; +\infty[$

$< 0 \iff x \in]-\infty ; 21[$

$= 0 \iff x = 21$

$\boxed{\text{FAUX}}$

Donc f est strictement décroissante sur $]-\infty ; 21]$

et " croissante sur $[21 ; +\infty[$

Ainsi u est croissante A PARTIR du rang 21

3.) Algo. de SEUIL $\boxed{\text{VRAI}}$

4) $\forall n \in \mathbb{N}$, $n^2 \leq (n+1)^2 w_n \leq n^2 + n$

Donc

$$\boxed{\frac{n^2}{(n+1)^2} \leq w_n \leq \frac{n^2+n}{(n+1)^2}}$$

On montre ensuite que $\lim \frac{n^2}{(n+1)^2} = \lim \frac{n^2+n}{(n+1)^2} = 1$

(Factorisation par le terme dominant)

Et en application du théorème des gendarmes, on obtient que $\boxed{\lim w_n = 1}$ $\boxed{\text{VRAI}}$

5.) $\boxed{\text{FAUX}}$ $-1 < -\frac{1}{3} < 1$ Donc $\lim \left(-\frac{1}{3}\right)^n = 0$ Donc $\lim (u_n) = 0$ (A MONTRER ..)

Sujet D p 161 :

1.) $u_1 = \dfrac{2+3\times 3}{4+3} = \dfrac{11}{7}$ 2.) a.) $= \dfrac{2+3\times B2}{4+B2}$ ↙ : en B3

b.) Il semble que u converge et que sa limite soit 1
et $u \searrow$

3.) f est une fonction rationnelle définie sur $[0;4]$, elle est donc dérivable sur $[0;4]$

$\forall x \in [0;4]$, $f'(x) = \dfrac{3(4+x)-(2+3x)}{(4+x)^2} = \dfrac{10}{(4+x)^2}$

Comme $\forall x \in [0;4]$, $f'(x) > 0$, f est donc croissante sur $[0;4]$. $\boxed{P(n) : 1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 3}$

4.) Initialisation $u_0 = 3$, $u_1 = \dfrac{11}{7}$

Comme $1 \leq u_1 \leq u_0 \leq 3$ la proposition $P(0)$ est VRAIE.

Hérédité Supposons $P(n)$ et démontrons $P(n+1)$

On a donc $1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 3$ et comme f est croissante on obtient : $f(1) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n) \leq f(3)$

Or $f(1) = 1$; $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$; $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(3) = \dfrac{11}{7}$

Donc $1 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq \dfrac{11}{7}$ et comme $\dfrac{11}{7} \leq 3$

On a bien $1 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq 3$ $(P(n+1))$

Conclus° .... Rédact° habituelle ...

5.) • Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_{n+1} \leq u_n}$, u est décroissante

• Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{1 \leq u_n}$, u est minorée

Donc $\boxed{u \text{ CONVERGE}}$

On pourra montrer ⊕ tard que sa limite est 1 (Chap - A4 - Continuité)

Sujet E p 161 :

1.) a.) $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{u_n + 3v_n}{4} - \dfrac{2u_n + v_n}{3}$

$$= \frac{1}{4}u_n + \frac{3}{4}v_n - \frac{2}{3}u_n - \frac{1}{3}v_n$$

$$= \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{3}\right)u_n + \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{3}\right)v_n.$$

$$= \frac{3-8}{12}u_n + \frac{9-4}{12}v_n$$

$$= -\frac{5}{12}u_n + \frac{5}{12}v_n$$

$$= \frac{5}{12}(v_n - u_n)$$

b.) $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = v_n - u_n$ Donc $\boxed{w_{n+1} = \frac{5}{12}w_n}$

Donc (w_n) est géométrique de raison $\underbrace{\frac{5}{12}}$ et de 1er terme $w_0 = v_0 - u_0 = 10 - 2 = 8$. Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = 8 \times \left(\frac{5}{12}\right)^n}$

2.) a.) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2u_n + v_n}{3} - u_n.$

$$= \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}v_n - u_n.$$

$$= -\frac{1}{3}u_n + \frac{1}{3}v_n$$

$$= \frac{1}{3}(v_n - u_n)$$

$$= \frac{1}{3}w_n$$

$= \frac{1}{3} \times 8 \times \left(\frac{5}{12}\right)^n$ qui est un produit de facteurs tous strictement positifs donc qui est strictement positif. Donc <u>u est croissante</u>

De même, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + 3v_n}{4} - v_n$

$$= \frac{1}{4} u_n + \frac{3}{4} v_n - v_n$$

$$= -\frac{1}{4} (v_n - u_n)$$

$$= -\frac{1}{4} w_n$$

$$= -\frac{1}{4} \times 8 \times \left(\frac{5}{12}\right)^n$$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n < 0$ Donc <u>v est décroissante</u>

2.) b.) OSQ u est croissante Donc u est <u>minorée par son 1er terme</u> $u_0 = 2$ Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 2}$

De même v est <u>décroissante</u> Donc <u>majorée par son 1er terme</u> $v_0 = 10$ DONC $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \leqslant 10}$

<u>Montrons par récurrence</u> : $\mathcal{P}(n)$: $\boxed{u_n \leqslant 10 \text{ et } v_n \geqslant 2}$

<u>Initialisation</u> : $u_0 = 2$ et $v_0 = 10$ Donc $\mathcal{P}(0)$ est vérifiée

<u>Hérédité</u> : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$

- Par HR, on a $u_n \leqslant 10$ Donc $\frac{2}{3} u_n + \frac{1}{3} v_n \leqslant \frac{2}{3} \times 10 + \frac{1}{3} v_n$

  soit $u_{n+1} \leqslant \frac{20}{3} + \frac{1}{3} v_n$

  Or OSQ $v_n \leqslant 10$ Donc $\frac{1}{3} v_n \leqslant \frac{10}{3}$

  Ainsi $u_{n+1} \leqslant \frac{20}{3} + \frac{10}{3}$, soit $\boxed{u_{n+1} \leqslant 10}$

- De même, on a $v_n \geqslant 2$ Donc $\frac{1}{4} u_n + \frac{3}{4} v_n \geqslant \frac{1}{4} u_n + \frac{3}{4} \times 2$

  soit $v_{n+1} \geqslant \frac{1}{4} u_n + \frac{3}{2}$

  or $u_n \geqslant 2$ Donc $\frac{1}{4} u_n \geqslant \frac{2}{4}$ $\geqslant \frac{1}{2}$ Donc $\boxed{v_{n+1} \geqslant 2}$

Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est établi.

<u>CONCLUSION</u> : .... comme d'hab .....

c.) OSQ u est croissante et majorée par 10 DONC u converge
De meme v est décroissante et minorée par 2 DONC v converge

3.) $\lim (v_n - u_n) = \lim w_n = \lim \left[8 \times \left(\frac{5}{12}\right)^n\right] = 0$ car
$\frac{5}{12} \in]-1;1[$. Donc $\boxed{\lim u_n = \lim v_n}$

4.) a.) $\forall n \in \mathbb{N}$, $t_n = 3u_n + 4v_n$ Donc

$$t_{n+1} = 3u_{n+1} + 4v_{n+1}$$
$$= 3\left(\frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}v_n\right) + 4\left(\frac{1}{4}u_n + \frac{3}{4}v_n\right)$$
$$= 2u_n + v_n + u_n + 3v_n$$
$$= 3u_n + 4v_n.$$

$\boxed{t_{n+1} = t_n}$ Donc <u>t est CONSTANTE</u>.

b.) $t_0 = 3u_0 + 4v_0 = 3\times 2 + 4\times 10 = 46$
Donc $\boxed{\lim t_n = 46}$

Or $\lim t_n = \lim (3u_n + 4v_n)$
$$= 3\lim u_n + 4\lim v_n.$$
$$= 7\lim u_n \quad (\text{car } \lim u_n = \lim v_n)$$
Donc $\boxed{\lim u_n = \lim v_n = \frac{46}{7}}$