Chap 6 - Repérage

Thème : Géométrie

Table des matières

I Repères

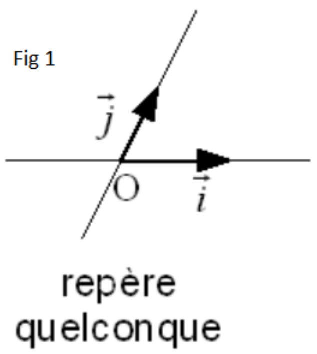
I 1 Repères et coordonnées d'un point

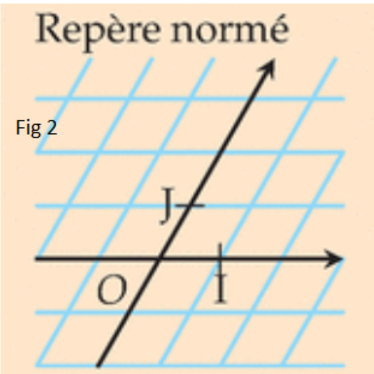
Définition :
Un repère cartésien du plan est un triplet $(O; I; J)$ de points **non alignés**.
O est l'**origine** du repère,
la droite de repère (OI) est l'**axe des abscisses**
la droite de repère (OJ) est l'**axe des ordonnées**.

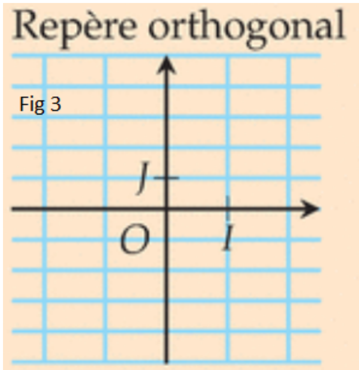
Remarques :
1) Les repères sont souvent notés avec la notation vectorielle. En posant : $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{j}$, on obtient le repère $(O\,;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$.

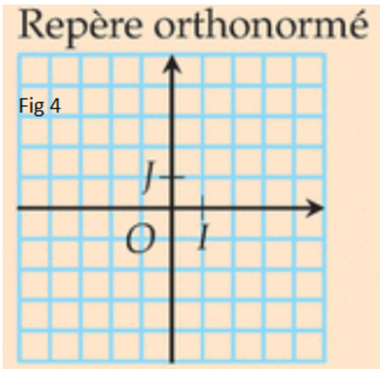
2) Dire que les points O, I et J ne sont pas alignés signifie que les vecteurs $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ ne sont pas colinéaires (et ne sont pas nuls ...)

Il existe différentes sortes de repères du plan :









- Si le triangle OIJ est quelconque alors le repère est **quelconque** (fig 1),
- Si le triangle OIJ est **isocèle** en O, alors le repère est **normé** (fig 2). Les **unités** de chaque axe sont **égales** $OI = OJ$.
- Si le triangle OIJ est **rectangle** en O, le repère est **orthogonal** (fig 3). Les axes sont **perpendiculaires**.
- et Si le triangle OIJ est **isocèle et rectangle** en O, le repère est **orthonormé** (ou orthonormal) (fig 4) . Les axes sont **perpendiculaires** et les **unités** de chaque axe sont **égales** : $OI = OJ$.

Définition :
On munit le plan d'un repère $(O\,;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$.

Chaque point M du plan est repéré par un couple de nombres $(x; y)$ ou encore $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ appelé coordonnées du point.

x est l'**abscisse** du point et y est son **ordonnée**. On peut alors écrire : $\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j}$

I 2 Coordonnées du milieu M d'un segment $[AB]$

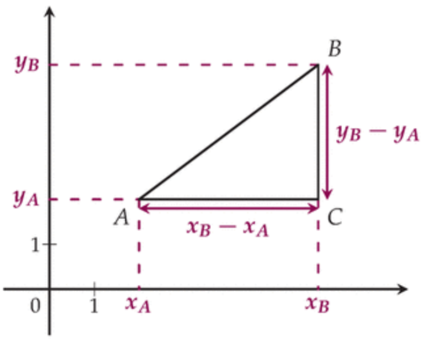
Propriété :
Dans le repère $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,)$, on considère les points $A(x_A;y_A)$, et $B(x_B;y_B)$.

Les coordonnées du milieu I du segment $[AB]$ sont : $\left(\dfrac{x_A+x_B}{2};\dfrac{y_A+y_B}{2}\right)=\begin{pmatrix}\dfrac{x_A+x_B}{2}\\ \dfrac{y_A+y_B}{2}\end{pmatrix}$.

I 3 Distance entre deux points, longueur d'un segment

Propriété :
Dans le repère <u>**orthonormé**</u> $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,)$, on considère les points $A(x_A;y_A)$, et $B(x_B;y_B)$.

La distance de A à B est : $d(A;B)=AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$.



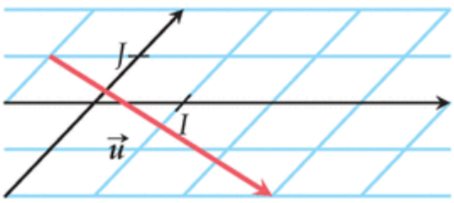
II Vecteurs et repères

II 1 Coordonnées d'un vecteur

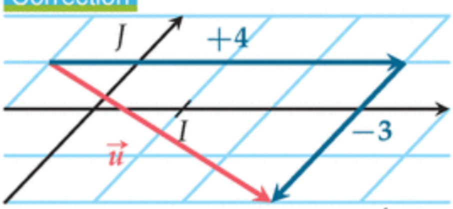
Définition :
Dans le repère $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,)$, soit $\vec{u}$ un vecteur et $M(x;y)$ un point tel que $\overrightarrow{OM}=\vec{u}$.
Les coordonnées de $\vec{u}$ sont alors celles du point M, c'est-à-dire : $\vec{u}\,(x;y)$.

Méthode : Lecture des coordonnées d'un vecteur

Lire les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ sur la figure ci-dessous.



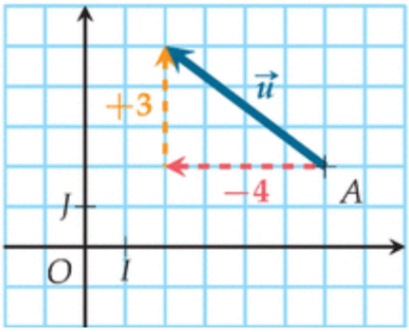
Correction



Les coordonnées de $\vec{u}$ sont $\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$.

Méthode : Construire un vecteur à partir de ses coordonnées

Dans un repère orthonormé, construire le représentant d'origine $A(6;2)$ du vecteur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$.



II 2 Vecteurs égaux

Propriété (admise) :
Dire que deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont **égaux** signifie que leurs coordonnées sont **égales**, dans un même repère $(O\,;\overrightarrow{i}\,,\overrightarrow{j})$.

Propriété :
Dans le repère $(O\,;\overrightarrow{i}\,,\overrightarrow{j})$, on considère les points $A(x_A;y_A)$, et $B(x_B;y_B)$.

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont : $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.

II 3 Opérations sur les vecteurs et coordonnées

II 3 a Addition

Propriété :

Dans le repère $(O;I;J)$, soit les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

Les coordonnées du vecteur somme : $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ sont : $\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$.

II 3 b Soustraction

Propriété :

Dans le repère $(O;I;J)$, soit les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

Les coordonnées du vecteur différence : $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$ sont : $\begin{pmatrix} x - x' \\ y - y' \end{pmatrix}$.

II 3 c Multiplication par un réel

Propriété :

Dans le repère $(O\,;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$, soit le vecteur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et k un nombre réel.

Les coordonnées du vecteur : $k\overrightarrow{u}$ sont : $\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$.

Exercice 1 :
Dans le repère $(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$, on considère les trois points $A(2;1)$, $B(3;-4)$ et $C(-1;-3)$. Et soit le point M défini par :

$$\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$$

Représentation et conjecture :

1 Placer les points A, B et C dans le repère et construire le point M.

2 Conjecturer alors, les coordonnées du point M.

Preuve :

3 Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

4 Calculer les coordonnées du vecteur $2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

5 Posons $(x;y)$ les coordonnées de M. Calculer en fonction de x et de y les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AM}$.

6 Déduire de l'égalité $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$, les coordonnées $(x;y)$ de M.

Exercice 2 :
Dans le repère $(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$, on considère les trois points $A(1;2)$, $B(-2;0)$ et $C(-2;3)$.
Déterminer les coordonnées du point M défini par la relation vectorielle :

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$$

II 4 Vecteurs colinéaires

Propriété :

Dans le repère $(O;I;J)$, soit les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires ssi leurs coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont proportionnelles, ssi $xy' - x'y = 0$.

Exercice 1 :
Dans le repère $(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$, on considère les trois points $A(-4;-3)$, $B(8;1)$, $C(4;4)$ et $D(-2;2)$.
Que dire des positions relatives de (AB) et (CD) ?

Exercice 2 :
Dans le repère $(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$, on considère les trois points $A(-2;3)$, $B(2;1)$ et $C(4;0)$.
Que dire de ces points ?