Produit scalaire de deux vecteurs

1) Enoncer la définition de la **norme d'un vecteur** et **son expression analytique** dans un repère orthonormé.
2) Enoncer la **définition** du produit scalaire de deux vecteurs **colinéaires**. (E0)
3) Enoncer la **définition** du projeté orthogonal d'un point sur une droite.
4) Enoncer la **définition** du produit scalaire de deux vecteurs **quelconques (première expression E1)**.
5) Enoncer la **définition** de deux vecteurs **orthogonaux**.
6) Enoncer la **propriété** de deux vecteurs **orthogonaux**.
7) Enoncer **la seconde expression du produit scalaire (en fonction d'un angle)** de deux vecteurs (E2).
8) Enoncer les propriétés de symétrie et de linéarité du produit scalaire.
9) Enoncer **la troisième expression (norme) du produit scalaire** de deux vecteurs et celle qui l'accompagne (E3 et E3Bis).
10) Enoncer **la quatrième expression (expression analytique) du produit scalaire** de deux vecteurs dans un repère orthonormé (E4).

Réponses :

1) Définition de la **norme d'un vecteur** :
Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan et A et B deux points du plan tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.
La **norme** du vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ est la longueur du segment [AB] c'est-à-dire AB, on note $\|\vec{u}\| = \|\overrightarrow{AB}\| = AB$.
On rappelle que **dans un repère orthonormé**, si $\vec{u}(x;y)$ alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2}$.

2) Produit scalaire de **deux vecteurs colinéaires** : (E0)
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs colinéaires du plan ;
si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, de **même sens** alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$
si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, de **sens contraires/opposés** alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$

3) **Définition du projeté orthogonal d'un point :**
Soit B un point du plan et (d) une droite du plan.
Si B ∉ (d), le projeté orthogonal du point B sur une droite (d) est le point B' de (d) tel que les droites (d) et (BB') soient perpendiculaires.
Si B ∈ (d) alors son projeté orthogonal sur (d) est lui-même.

4) Produit scalaire de deux vecteurs **quelconques** : (E1)
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan et les points 0, A et B tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$
On a alors : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB'}$ où B' est le **projeté orthogonal** de B sur la droite (OA).

5) Dire que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** signifie que :
* l'un au moins est nul : $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$

ou * si aucun des deux vecteurs n'est nul, on a (OA) ⊥ (OB)

6) Propriété des vecteurs orthogonaux : $\boxed{\vec{u} \perp \vec{v} \text{ équivaut à } \vec{u} \cdot \vec{v} = 0}$

7) Autre expression du produit scalaire (E2)
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs **non nuls** ; on a : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$

8) **Symétrie** du produit scalaire : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs, on a : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
Linéarité du produit scalaire : Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs, a un réel : $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ et $(a\vec{u}) \cdot \vec{v} = a \times (\vec{u} \cdot \vec{v})$

9) Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan, on a $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$ (E3)
Et $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2)$ (E3 bis)

10) **Expression analytique** du produit scalaire **dans un repère orthonormé** (E4)
Soit $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé. Si $\vec{u}(x ; y)$, $\vec{v}(x' ; y')$ dans $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$