Chap 10 - Probabilités

Thème : Statistiques et Probabilités

Table des matières

I Vocabulaire

I 1 Expérience aléatoire, issue

Définition :
Une expérience **aléatoire** est une expérience pour laquelle plusieurs **issues** sont possibles, sans que l'on puisse prévoir celle qui se produira.
Les **issues** sont aussi appelées les **événements élémentaires** ou les **éventualités**.

I 2 Univers

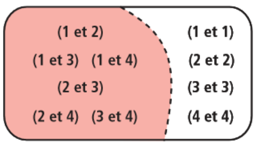
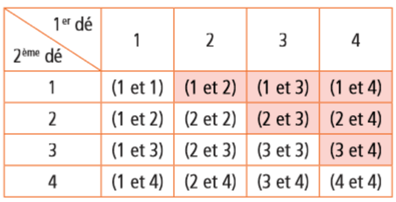
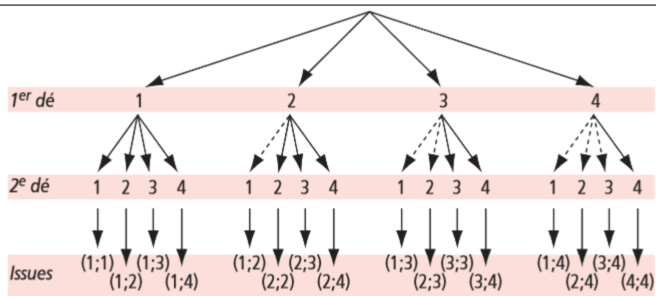
Définition :
L'ensemble de toutes les éventualités d'une expérience aléatoire est appelé **univers**. Il est généralement noté Ω.

I 3 Événement

Définition :
Tout **ensemble d'issues** est appelé **événement**.
On appelle événement toute **partie** de l'univers Ω.

I 4 Représentation par un schéma

Prenons l'exemple du lancer de deux dés de 4 faces (tétraédriques). On peut utiliser trois types de schémas pour mieux envisager la situation :

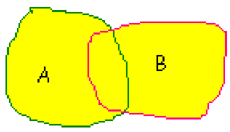
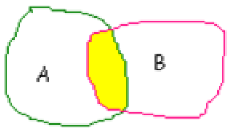
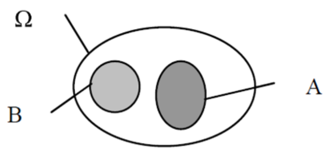
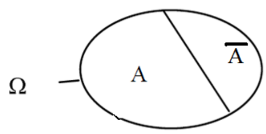
le schéma "patate" :	le tableau à double entrée :	L'arbre :
		

1er dé / 2ème dé	1	2	3	4
1	(1 et 1)	(1 et 2)	(1 et 3)	(1 et 4)
2	(1 et 2)	(2 et 2)	(2 et 3)	(2 et 4)
3	(1 et 3)	(2 et 3)	(3 et 3)	(3 et 4)
4	(1 et 4)	(2 et 4)	(3 et 4)	(4 et 4)

Remarque :
Certaines issues s'obtiennent de deux façons : (1 et 2) correspond à (dé1 : 1 et dé2 : 2) ou (dé1 : 2 et dé2 : 1).
Dans la première représentation on n'a pas distingué les deux dés et donc l'ordre d'apparition des faces nous est égal.
Pour le tableau, les cases foncées et pour l'arbre, les pointillés correspondent aux cas qu'il faudrait différencier si l'on distinguait les deux dés (par exemple, s'ils avaient des couleurs différentes).

I 5 Vocabulaire lié aux événements

On lance un dé classique. Les lettres majuscules A, B, ... désignent des événements.

Vocabulaire et notation	Signification	Exemple
Cardinal de A : card(A)	**Nombre d'éventualités** qui composent A	Si A est l'événement "obtenir un nombre pair". Cet événement est constitué de 3 issues : $A = \{2; 4; 6\}$ et donc card(A)=3.
Événement **élémentaire**	Événement réduit à **une seule** éventualité	L'événement B : "obtenir le nombre 3" ; $B = \{3\}$ est l'**écriture en extension** de l'événement B.
Événement **impossible**	Événement qui ne se réalise **jamais** (cet événement est donc l'**ensemble vide** : $\varnothing$)	L'événement C : "obtenir un nombre négatif" ; $C = \varnothing$
Événement **certain**	Événement qui se réalise **toujours** (cet événement est donc l'univers : Ω)	L'événement D : "obtenir un nombre entier compris entre 1 et 6" ; $D = \Omega$
E est la **réunion** de A et de B : $E = A \cup B$, on dit A **OU** B	E est constitué des éléments appartenant à A **ou** à B (ou aux deux ensembles car le OU est **inclusif**)  Réunion de A et B	Si $A = \{2; 4; 6\}$ et $B = \{3\}$ alors $E = A \cup B = \{2; 3; 4; 6\}$
F est l'**intersection** de A et de B : $F = A \cap B$	F est constitué des éléments appartenant à A **et** à B.  Intersection de A et B	Si $A = \{2; 4; 6\}$ et $B = \{3\}$ alors $F = A \cap B = \varnothing$. Si G : "obtenir un nombre au moins égal à 4" soit : $G = \{4; 5; 6\}$ alors $H = A \cap G = \{4; 6\}$.
Les événements sont **incompatibles** (ou **disjoints**)	Deux événements sont **incompatibles** (ou **disjoints**) s'ils ne peuvent se réaliser en même temps. Leur **intersection est vide**.	A et B, précédemment définis, sont **incompatibles** (ou **disjoints**) car $A \cap B = \varnothing$ 
Les événements sont **contraires** (ou **complémentaires**) L'**événement contraire** de A se note $\overline{A}$ et il est constitué de toutes les issues de l'univers ne réalisant pas A.	Deux événements sont **contraires** (ou **complémentaires**) s'ils remplissent deux conditions : • leur **intersection est vide**, • leur **réunion est égale à l'univers**.	Si A est l'événement "obtenir un nombre pair" alors $\overline{A}$ est "obtenir un nombre IMpair". 

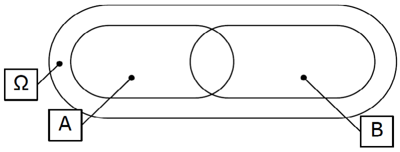
Exercice 1 :
On met quinze jetons numérotés de 1 à 15 dans un sac, et on tire au hasard un seul jeton.
On considère les événements suivants :
A : « le jeton tiré porte un nombre pair » ;
B : « le jeton tiré porte un nombre multiple de 3 ».

Écrire sous forme d'ensembles en extension les événements suivants :
A, $\overline{A}$, B, $\overline{B}$, $A \cap B$, $A \cup B$, $\overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cup \overline{B}$, $\overline{A \cap B}$, $\overline{A \cup B}$.

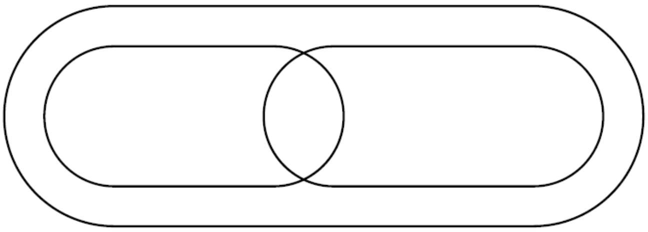
Exercice 2 :
On tire au hasard une carte parmi un jeu de 32 et on considère les événements suivants :
T : « Tirer un trèfle » ; K : « Tirer un carreau » ; C : « Tirer un cœur » ; P : « Tirer un pique » ; A : « Tirer une figure » ; R : « Tirer un roi » ; V : « Tirer un valet ».

1. Traduire par une phrase les événements :
   $R \cap K$:
   $C \cap A$:
   $P \cup R$:
   $C \cup P$:
2. Traduire, en utilisant des intersections ($\cap$) ou réunion ($\cup$) les événements :
   « La carte tirée est un carreau ou un pique » :
   « La carte tirée est le roi de pique » :
   « La carte tirée est une figure à cœur » :
3. Traduire par une phrase les événements :
   $\overline{A}$:
   $\overline{K}$:
   $\overline{R} \cap P$:
   $T \cap \overline{P}$:
   $\overline{V} \cap \overline{P}$:
   $A \cup \overline{P}$:
4. A l'aide des événements A, R, T, K, C et P, exprimer mathématiquement les événements suivants :
   « La carte tirée n'est pas un roi » :
   « La carte tirée n'est pas un pique » :
   « La carte tirée est un roi différent du roi de pique » :
   « La carte tirée n'est ni un pique ni un valet » :

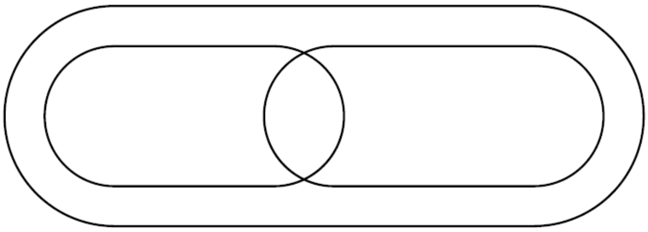
Exercice : On représente l'univers Ω et deux événements A et B :
Hachurer ci-dessous dans chaque cas la zone indiquée :



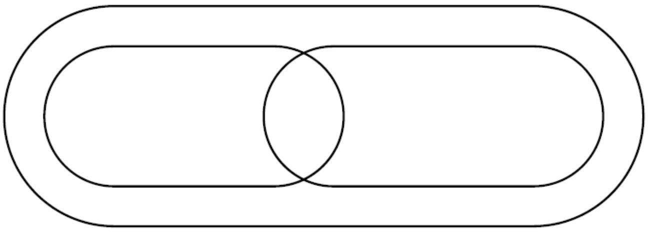
A



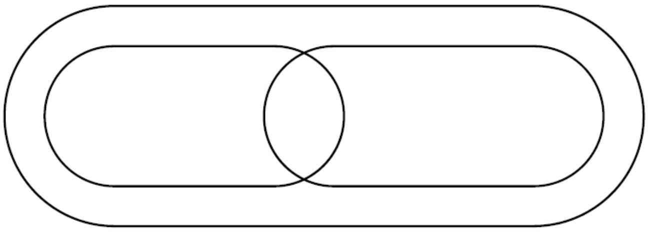
$\overline{A}$



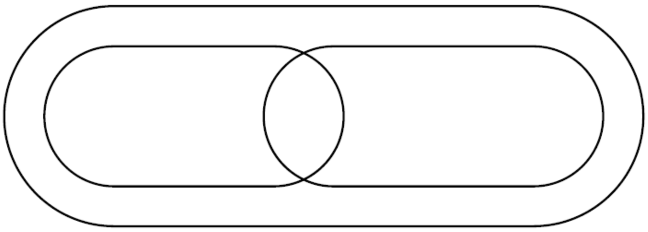
$A \cup B$



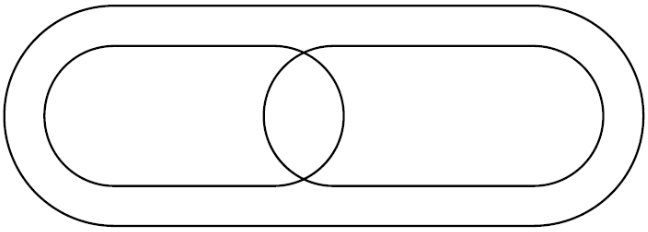
$A \cap B$



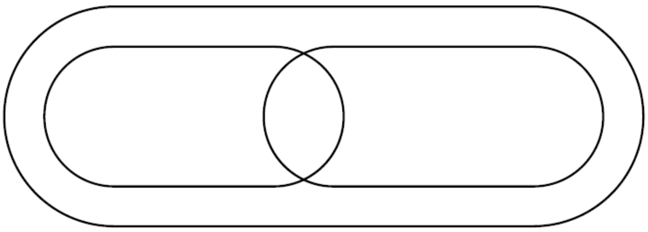
$A \cup \overline{B}$



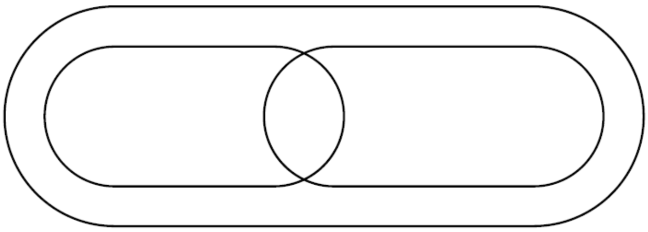
$A \cap \overline{B}$



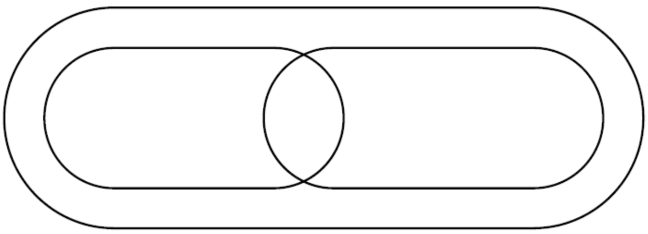
$\overline{A} \cup \overline{B}$



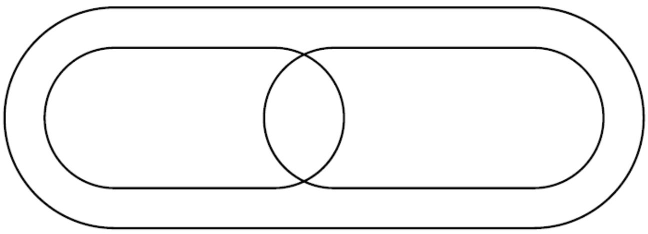
$\overline{A} \cap \overline{B}$



$\overline{A \cup B}$



$\overline{A \cap B}$



II Calcul de probabilités

II 1 Loi de probabilité

Définition :
Pour une expérience aléatoire donnée, ayant n issues, on peut définir une loi de probabilité.
C'est associer à chaque issue x_i de l'univers Ω, un nombre positif ou nul : sa probabilité p_i de telle façon que : $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$.
Et pour toute éventualité x_i, on a : $0 \leq p_i \leq 1$.

II 2 Probabilité d'un événement

Définition :
La **probabilité** d'un événement est la **somme** des probabilités des événements **élémentaires** qui le constitue.

II 3 Cas particulier important : l'équiprobabilité

Définition :
On dit qu'il y a **équiprobabilité** lorsque tous les **événements élémentaires** ont la **même probabilité**, dans ce cas, on a : $P(A) = \dfrac{\text{nombre d'éléments de } A}{\text{nombre d'éléments de } \Omega} = \dfrac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$.

Remarque : Dans un exercice, pour signifier qu'on est dans une situation d'équiprobabilité on a généralement dans l'énoncé un expression du type :

- on lance un dé **non pipé**, **non truqué**, parfaitement **équilibré**, ...
- dans une urne, il y a des boules **indiscernables** au toucher,
- on rencontre au **hasard** une personne parmi ...

II 4 Propriétés

Propriétés :
Soit A et B deux événements, on a les propriétés suivantes :

- $P(\varnothing) = 0$
- $P(\Omega) = 1$
- $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Remarque :
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ peut se simplifier dans le cas particulier où A et B sont incompatibles (ou disjoints) par : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ car $P(A \cap B) = 0$.

Exercice 1 :
Une expérience aléatoire conduit à l'observation de trois événements A, B et C.
On sait que : $\mathrm{P}(A) = 0{,}15$ $\mathrm{P}(B) = 0{,}3$ $\mathrm{P}(C) = 0{,}4$
$\mathrm{P}(A \cup B) = 0{,}42$ $\mathrm{P}(A \cap C) = 0{,}05$ B et C sont incompatibles.

Calculer la probabilité des événements suivants :
1. $\mathrm{P}(\overline{A}) =$
2. $\mathrm{P}(B \cup C) =$
3. $\mathrm{P}(A \cap B) =$
4. $\mathrm{P}(A \cap \overline{C}) =$
5. $\mathrm{P}(\overline{A} \cap \overline{B}) =$

Exercice 2 :
A et B sont deux événements.
Dans chaque cas, expliquer pourquoi les affirmations sont fausses.

1. $\mathrm{P}(A) = 0{,}7$; $\mathrm{P}(B) = 0{,}4$; A et B sont incompatibles.
2. $\mathrm{P}(A) = 0{,}7$; $\mathrm{P}(B) = 1{,}2$
3. $\mathrm{P}(A) = 0{,}7$; $\mathrm{P}(B) = -0{,}2$
4. $\mathrm{P}(A) = 0{,}3$; $\mathrm{P}(B) = 0{,}4$; $\mathrm{P}(A \cap B) = 0{,}5$
5. $\mathrm{P}(A) = 0{,}65$; $\mathrm{P}(A \cap B) = 0{,}43$; $\mathrm{P}(A \cap \overline{B}) = 0{,}21$

Exercice 3 :
On lance un dé à 6 faces, qui est truqué de telle façon que : $\mathrm{P}(1) = 0{,}05$ et $\mathrm{P}(2) = \mathrm{P}(3) = \mathrm{P}(4) = \mathrm{P}(5) = 0{,}15$
1. Calculer $\mathrm{P}(6)$.
2. Calculer la probabilité des évènements suivants :

A : « ne pas obtenir 1 »	$\mathrm{P}(A) =$
B : « obtenir un nombre impair »	$\mathrm{P}(B) =$
C : « obtenir un nombre supérieur ou égal à 3 »	$\mathrm{P}(C) =$

3. Traduire par une phrase chaque évènement puis calculer sa probabilité :

$\overline{B}$:	$\mathrm{P}(\overline{B}) =$
$A \cap B$:	$\mathrm{P}(A \cap B) =$
$A \cup B$:	$\mathrm{P}(A \cup B) =$
$\overline{A} \cap B$:	$\mathrm{P}(\overline{A} \cap B) =$
$\overline{A} \cap \overline{B}$:	$\mathrm{P}(\overline{A} \cap \overline{B}) =$

Exercice 4 :
Dans une urne, on place 3 boules rouges et 1 boule verte. Les boules sont indiscernables au toucher. On effectue un tirage successif de deux boules dans cette urne.

1. Tirage AVEC remise
   (a) Modéliser la situation par un arbre pondéré.
   (b) Donner toutes les issues possibles **et** leurs probabilités associées.
2. Tirage SANS remise
   (a) Modéliser la situation par un arbre pondéré.
   (b) Donner toutes les issues possibles **et** leurs probabilités associées.

Exercice 5 :
Un chasseur tire un faisan, posé sur une barque, au bord d'un étang.
La probabilité que le chasseur atteigne le faisan (événement noté F) est $0,4$ et celle qu'il cause une avarie au bateau (événement B) est $0,3$.
De plus, le faisan et la barque peuvent être tous les deux touchés avec une probabilité de $0,1$.

1. Compléter le tableau ci-dessous :

	F	$\overline{F}$	Total
B			
$\overline{B}$			
Total			

2. Écrire les événements suivants comme réunion ou intersection de B, $\overline{B}$, F ou $\overline{F}$. Puis déterminer leur probabilité.
   (a) La barque est abîmée et le faisan est indemne.
   (b) Le faisan est touché mais pas la barque.
   (c) Le faisan et la barque sont sains et saufs !
3. Donner la signification de $B \cup F$. Calculer sa probabilité.
4. Quelle est la probabilité que le faisan OU la barque n'ait aucun dommage ?

Préparation à l'évaluation

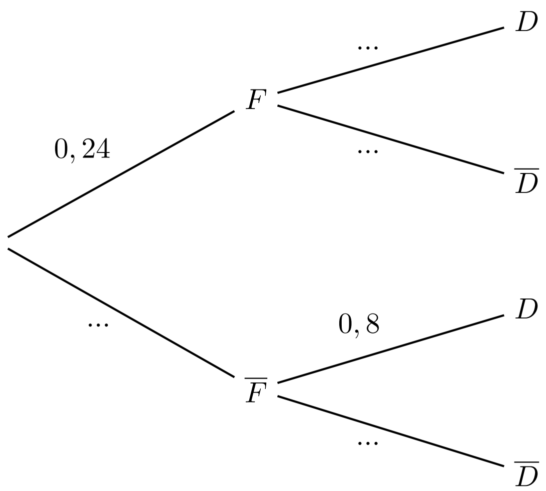
Exercice 1 :
Dans un restaurant, on propose une carte avec trois entrées, deux plats et trois desserts :

- Entrées : crudités (C), terrine (T), quiche (Q).
- Plats : escalope de veau (V), filet de bœuf (B).
- Desserts : fruits (F), glace (G), pâtisserie (P).

1. Construire un arbre qui permette de déterminer tous les menus possibles. Lister sur la droite de l'arbre (en "fin de branche") la liste de tous les menus possibles. On utilisera les lettres indiquées ci-dessus.
2. On choisit un menu au hasard. Déterminer les probabilités des menus suivants :
   - ♡ E1 : le menu comporte un fruit.
   - ♡ E2 : le menu comporte une escalope de veau.
   - ♡ E3 : le menu comporte un filet de boeuf et une glace.
   - ♡ E1 : le menu ne comporte ni terrine, ni pâtisserie.

Exercice 2 :
Au Luxembourg, une enquête révèle qu'en 2010, 24% de la population fume. La fumée dérange 80% des non-fumeurs et 58% des fumeurs.
On interroge au hasard un habitant du Luxembourg.
On note F l'événement "être fumeur" et D l'événement "la fumée dérange".

1. Construire l'arbre pondéré illustrant cette situation.



2. Décrire par une phrase l'événement F∩D. Calculer sa probabilité P(F∩D).
3. Calculer P(D).
4. Décrire par une phrase l'événement F∪D. Calculer sa probabilité P(F∪D).

Exercice 3 :
Dans une classe de 30 élèves, 20 étudient l'anglais et 15 l'espagnol. 8 étudient les deux langues. Pour un élève donné, on note A l'événement "l'élève étudie l'anglais" et E l'événement "l'élève étudie l'espagnol".

1. Que représente A∩E ?
2. Que représente A∪E ?
3. Combien d'élèves n'étudient ni l'anglais, ni l'espagnol ?
4. Quel est l'événement contraire de A ?

Exercice 4 :
Une urne contient 100 boules numérotées de 1 à 100. On prélève une boule au hasard.
On considère les événements suivants :

- A : "le numéro de la boule est pair".
- B : "le numéro de la boule est un multiple de 5".
- C : "le numéro de la boule est un multiple de 10".

1. Calculer les probabilités des événements A, B, C, A∩B, B∩C et A∩$\overline{C}$.
2. En déduire la probabilité des événements A∪B et A∪$\overline{C}$.
3. Que peut-on dire de l'événement A∪$\overline{C}$?