Trigonométrie

Géométrie - Chapitre 2

Table des matières

I Rappels et valeurs remarquables

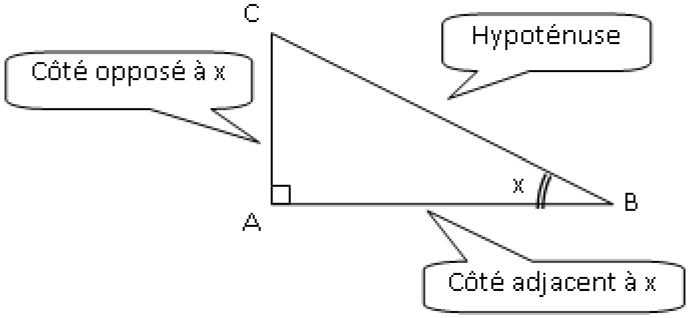
I 1 Rappels

Soit le triangle ABC rectangle en A.

$$\cos\hat{x} = \frac{AB}{BC} = \frac{\text{longueur du côté adjacent à } \hat{x}}{\text{longueur de l'hypoténuse}}$$

$$\sin\hat{x} = \frac{AC}{BC} = \frac{\text{longueur du côté opposé à } \hat{x}}{\text{longueur de l'hypoténuse}}$$

$$\tan\hat{x} = \frac{AC}{AB} = \frac{\text{longueur du côté opposé à } \hat{x}}{\text{longueur du côté adjacent à } \hat{x}}$$



I 2 Activités

Activité 1 : Dans un triangle équilatéral ABC, de longueur de côté a, soit H le pied de la hauteur issue de A.

1. Déterminer la mesure des angles $\widehat{ABH}$ et $\widehat{BAH}$.
2. Calculer la longueur AH.
3. En déduire la valeur exacte de $\cos 30°$, $\sin 30°$, $\cos 60°$ et $\sin 60°$.
4. Sachant que $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, déterminer les valeurs exactes de $\tan 30°$ et $\tan 60°$.

Activité 2 : Dans un carré $ABCD$, de longueur de côté a.

1. Déterminer la longueur AC.
2. Déterminer la mesure des angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{BCA}$.
3. En déduire la valeur exacte de $\cos 45°$, $\sin 45°$ puis $\tan 45°$.

Exercices de réinvestissement

I) Valeurs remarquables

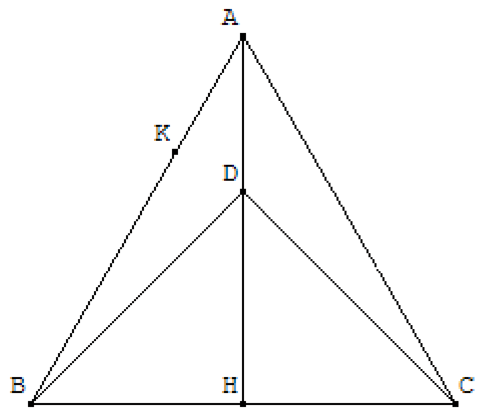
Exercice 1 :

1. Tracer un triangle BEH rectangle en E tel que $EH = 12$ cm et $\widehat{BHE} = 30°$.
2. Montrer que la longueur HB vaut $8\sqrt{3}$.
3. Tracer la hauteur issue de E, du triangle BEH . Elle coupe le segment $[BH]$ en P. Calculer la longueur PE.
4. Calculer la longueur PB.
5. Calculer l'aire du triangle BPE.

Exercice 2 :

Le triangle ABC est équilatéral et $AB = 2$ cm, le triangle BCD est isocèle rectangle en D.

1. Le point H étant le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC, justifier que le point D appartient à la droite (AH).
2. Que vaut l'angle $\widehat{ABD}$?
3. Déterminer les valeurs exactes de BC, AH et AD.
4. Soit K le pied de la hauteur issue de D dans le triangle ABD.
   (a) Montrer que $KD = \sqrt{2}\sin 15°$.
   (b) En déduire l'expression de l'aire du triangle ABD en fonction de $\sin 15°$.
5. (a) Calculer l'aire exacte des triangles ABH et BDH.
   (b) En déduire l'aire du triangle ABD.
6. Déduire des questions précédentes que $\sin 15° = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.



II) Relations trigonométriques

Exercice 1 : Existe-t-il un angle aigu $\widehat{A}$ tel que :

a) $\cos\widehat{A} = \dfrac{3}{4}$ et $\sin\widehat{A} = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$?

b) $\cos\widehat{A} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ et $\sin\widehat{A} = \dfrac{2}{5}$?

Exercice 2 : Calculer la valeur exacte de $\sin\widehat{C}$ et de $\tan\widehat{C}$ sachant que $\widehat{C}$ est un angle aigu tel que $\cos\widehat{C} = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

Exercice 3 :

1. On considère $\widehat{A}$ un angle aigu.

   En utilisant les formules trigonométriques, démontrer l'égalité suivante : $1 + \tan^2\widehat{A} = \dfrac{1}{\cos^2\widehat{A}}$.

2. Soit $\widehat{B}$ un angle aigu tel que $\tan\widehat{B} = \dfrac{1}{2}$.

   En utilisant la formule précédente, déterminer la valeur exacte de $\cos\widehat{B}$.

3. Déterminer ensuite la valeur exacte de $\sin\widehat{B}$.

Exercice 4 : On considère $\widehat{A}$ un angle aigu. En utilisant les formules trigonométriques, démontrer l'égalité suivante : $(\cos\widehat{A} + \sin\widehat{A})^2 = 1 + 2\sin\widehat{A}\cos\widehat{A}$.

Exercice 5 : On lit dans un manuel de trigonométrie que $\sin 15° = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

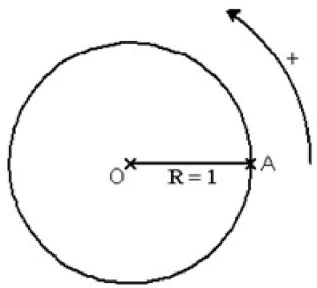
1. Vérifier que $\cos 15° = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$
2. En déduire que $\tan 15° = 2 - \sqrt{3}$.

II Repérage sur le cercle trigonométrique

II 1 Cercle trigonométrique

DEFINITION :

Une unité de mesure étant choisie, on appelle **cercle trigonométrique** tout cercle dont le **rayon** est égal à **une unité** et sur lequel on a choisi un sens de rotation **direct** (ou sens **trigonométrique** ou sens **positif**) qui correspond au sens inverse des aiguilles d'une montre.



REMARQUE(S) :

L'autre sens de rotation (sens des aiguilles d'une montre) est appelé sens **indirect** ou **négatif**.

II 2 Longueur d'un arc de cercle

Dans le cercle trigonométrique, le rayon étant égal à 1, le périmètre vaut 2π.
C'est la longueur totale de l'arc que forme le cercle.
Il y a **proportionnalité** entre la longueur d'un arc de cercle et l'angle au centre qui l'intercepte :

Angle au centre dans le cercle trigonométrique	$360°$ (un tour complet)	$180°$ (un demi-tour)	$90°$ (un quart de tour)	α
Longueur de l'arc intercepté	2π	π	$\frac{\pi}{2}$	l

Si l est la longueur de l'arc intercepté, et l'angle au centre, en degré, dans le cercle trigonométrique, alors on a la relation : $\boxed{l = \frac{\pi\alpha}{180}}$

II 3 Le radian

Les longueurs d'arcs de cercle du paragraphe précédent dépendent de π(environ 3,14).

Donc, sur cette graduation, la valeur 1 est située entre $\frac{\pi}{4}$ (environ 0,8) et $\frac{\pi}{2}$ (environ 1,6).

Cette longueur d'arc égale à 1 est interceptée par un **angle au centre particulier**, car dans ce cas, le rayon du cercle trigonométrique et la longueur de l'arc de cercle sont tous les deux égaux à 1 (unité).

C'est pourquoi, on choisit de donner à cet angle particulier la valeur de 1 dans une nouvelle unité. L'unité ne peut être le degré car cet angle se situe entre $45°$ et $90°$.

Cette nouvelle unité est **le radian** (du latin radius qui signifie rayon).

DEFINITION :

Soit C un cercle trigonométrique.

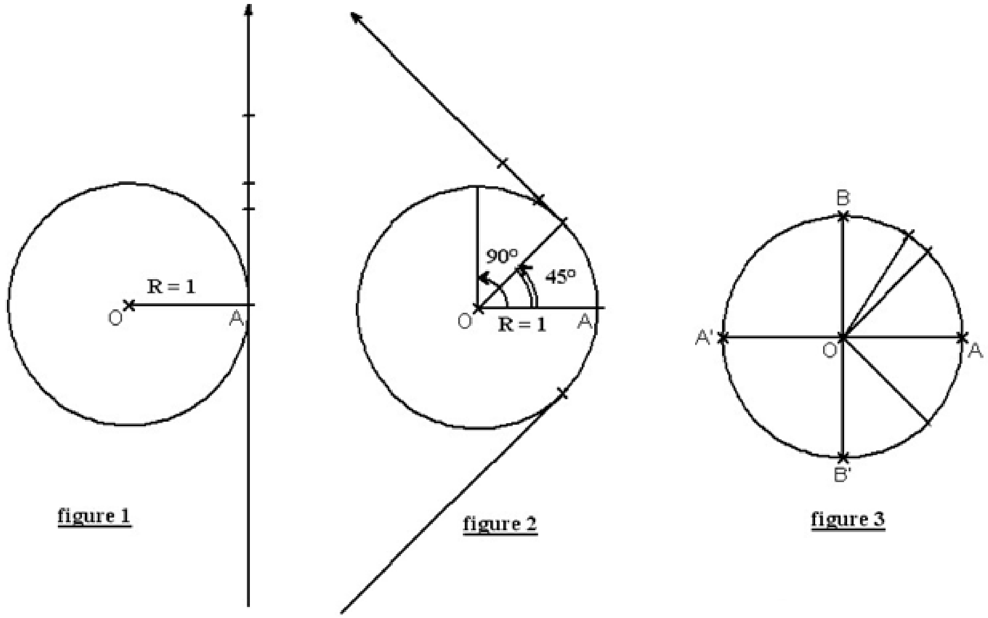
Le **radian** (de symbole : rad) est la mesure d'un angle au centre qui intercepte sur le cercle C un arc de longueur 1.

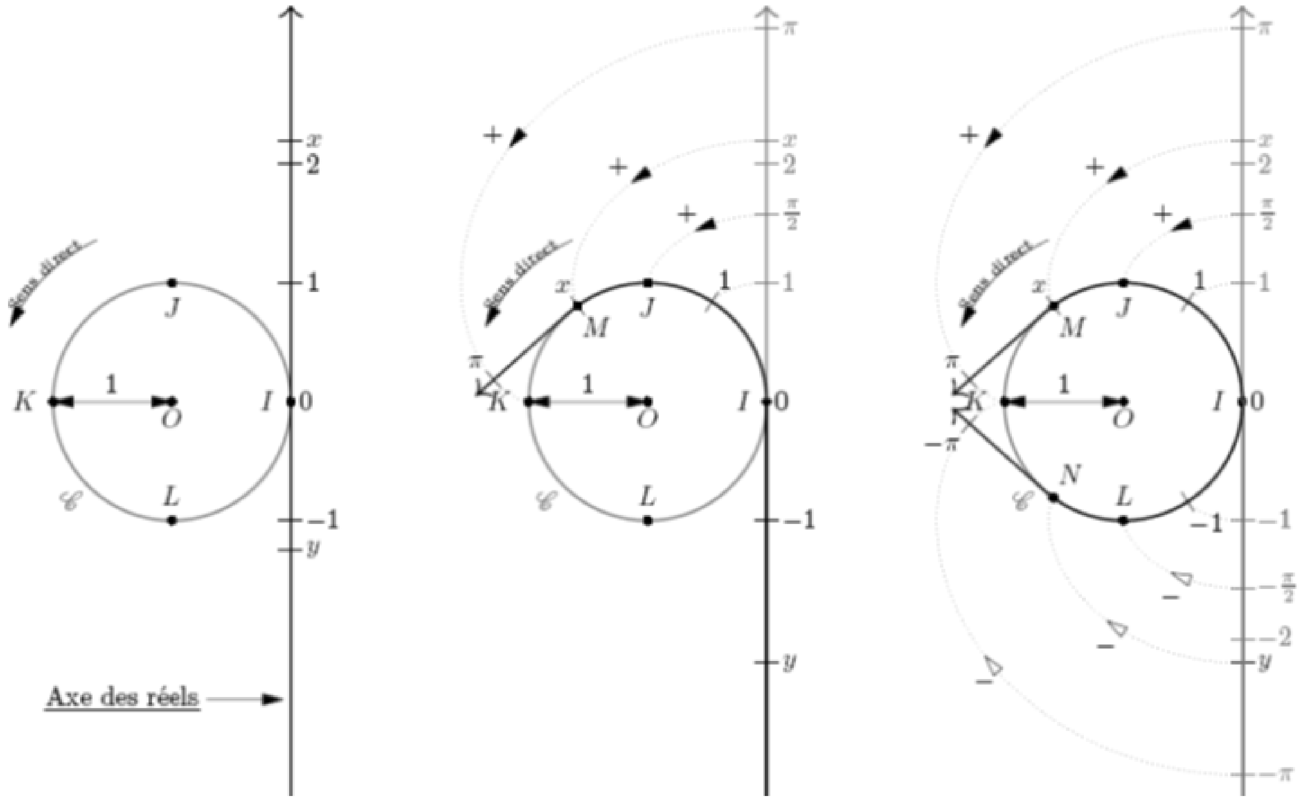
II 4 Repérage sur le cercle trigonométrique

On considère une droite D graduée avec les unités de longueurs d'arc (du paragraphe précédent), dépendantes de π.
Cette droite est placée de manière à être **tangente** au cercle trigonométrique en un point A qui est l'**origine** de cette droite graduée (figure 1).
On **enroule** cette droite graduée autour du cercle trigonométrique (figure 2).
On obtient ainsi autour du cercle trigonométrique une graduation qui donne les longueurs des arcs interceptés par les angles au centre correspondants (figure 3).
La demi-droite [AI), formée des points d'abscisses positives, s'enroule dans le sens direct, alors que l'autre demi-droite s'enroule dans le sens indirect.

PROPRIETE :

A tout réel x correspond un unique point P sur la droite D, et à chaque point P de D correspond un unique point M de C.
Donc à chaque réel x correspond un unique point M de C : on dit que x repère le point M ou que M est le point de C associé à x. On le note M(x).





REMARQUE(S) :

La droite D étant infinie, elle s'enroule en une infinité de tours autour du cercle C, en repassant à chaque tour par le point M. Chaque tour ayant une longueur égale à 2π, on peut associer au point M une infinité de réels : x , $x + 2\pi$, $x + 4\pi$, $x - 2\pi$, $x - 4\pi$ . . .
Donc si M est un point de C repéré par un réel x, alors les réels s'écrivant sous la forme $x + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, repèrent aussi M.

Exercices : 60 p 224

III Coordonnées d'un point du cercle trigonométrique

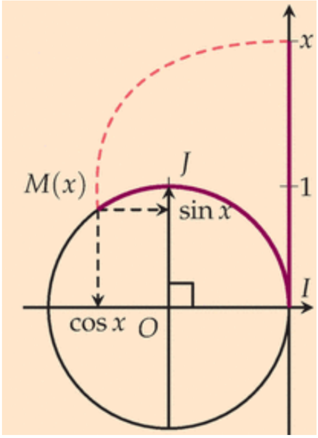
III 1 Cosinus, sinus

DEFINITION :

Soient $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère orthonormé direct et C le cercle trigonométrique associé.

Soient $x \in \mathbb{R}$ et M le point de C associé à x.
On appelle **cosinus** de x et **sinus** de x, notés $\cos x$ et $\sin x$, **l'abscisse et l'ordonnée** de M dans le repère $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

On note : M$(\cos x\,;\sin x)$ ou bien encore : $\overrightarrow{OM} = \cos x\,\vec{\imath} + \sin x\,\vec{\jmath}$.



III 2 Propriétés

PROPRIETE :

Pour tout nombre réel x et pour tout entier relatif k : $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$ $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$

$$\cos(x + k \times 2\pi) = \cos x \quad \text{et} \quad \sin(x + k \times 2\pi) = \sin x$$

DEMONSTRATION :

Immédiat : théorème de Pythagore (ou définition de la norme) dans un repère orthonormé, définition coordonnées des points du cercle trigonométrique et enroulement de la droite des réels.

Exemple : Calculer $\sin\dfrac{\pi}{3}$ sachant que $\cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$.

Correction : Comme pour tout x réel, $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$, on a $\left(\cos\dfrac{\pi}{3}\right)^2 + \left(\sin\dfrac{\pi}{3}\right)^2 = 1$

Ainsi, $\left(\sin\dfrac{\pi}{3}\right)^2 = 1 - \left(\cos\dfrac{\pi}{3}\right)^2$

soit $\left(\sin\dfrac{\pi}{3}\right)^2 = 1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$.

Donc $\sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **ou** $\sin\dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Or $\dfrac{\pi}{3} \in \,]0\,;\,\pi[$ donc $\sin\dfrac{\pi}{3} > 0$.

En conclusion, $\sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

REMARQUE(S) :

De la même façon, on calcule la valeur exacte de $\sin x$ quand on connaît $\cos x$.

Si la mesure principale de $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$, alors $\cos x \geq 0$ sinon $\cos x < 0$.

Notation : On note souvent $\cos^2 x$ et $\sin^2 x$ au lieu de $(\cos x)^2$ et $(\sin x)^2$.

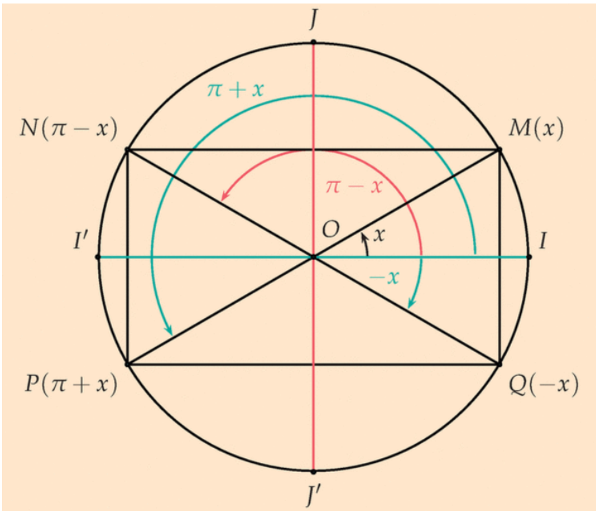
III 3 Angles associés

PROPRIETE :

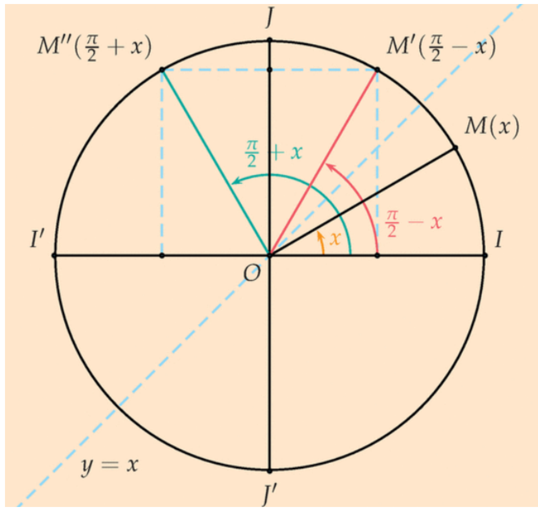
Pour tout nombre réel x :

$$\begin{cases}\cos(-x) = \cos x \\ \sin(-x) = -\sin x\end{cases} \qquad \begin{cases}\cos(\pi - x) = -\cos x \\ \sin(\pi - x) = \sin x\end{cases}$$

$$\begin{cases}\cos(\pi + x) = -\cos x \\ \sin(\pi + x) = -\sin x\end{cases}$$

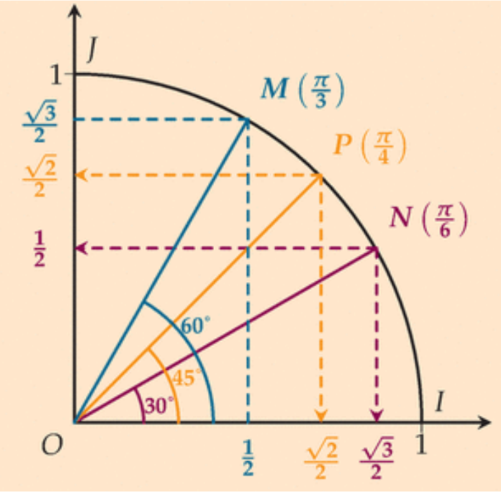


$$\begin{cases}\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \\ \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos x\end{cases} \qquad \begin{cases}\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x \\ \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = \cos x\end{cases}$$



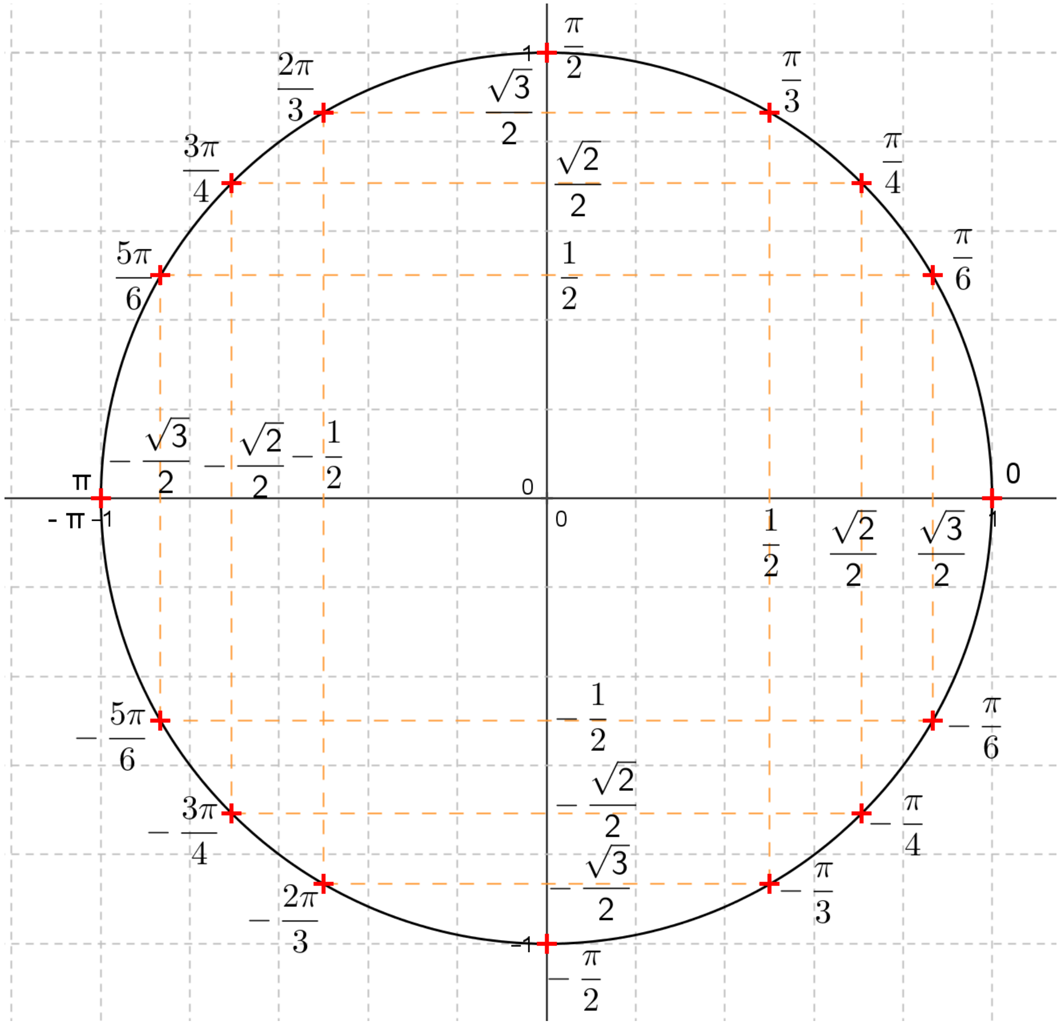
III 4 Valeurs particulières à connaître sur le premier quart de cercle

angle au centre (en degré)	0	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
x, arc de cercle intercepté	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1



IV Cercle trigonométrique à connaître

Sur l'intervalle $]-\pi;\pi]$ (intervalle de travail privilégié) :



Exercices : 62-64-68-80 p 225