VARIABLE ALÉATOIRE

Analyse - Chapitre 8

Table des matières

Dans ce chapitre, n, p et i désignent des entiers naturels.

I Variable aléatoire discrète et loi de probabilité

I 1 Variable aléatoire discrète

DEFINITION :

On considère une expérience aléatoire associée à un univers Ω **fini**.
$\Omega = \{e_1; e_2; e_3; ...; e_m\}$, $e_1; e_2; e_3; ...; e_m$ sont les **événements élémentaires** de Ω.

Une **variable aléatoire** X sur Ω est une **fonction** qui, à **chaque issue** e_i (i entier naturel compris entre 1 et m), de Ω, associe **un nombre réel**, de l'ensemble $\{x_1; x_2; x_3; ...; x_n\}$.

REMARQUE(S) :

- Une variable aléatoire est généralement notée par une lettre majuscule : X, Y, Z, ...
- On note $X = x_i$, avec $1 \leq i \leq n$, l'événement "X prend la valeur x_i".
- Comme Ω est fini, l'ensemble des valeurs prises par X (ses images) est également **fini**. On parle de **variable aléatoire discrète**.
- Comme plusieurs événements élémentaires peuvent être associés à un même nombre x_j (j entier naturel compris entre 1 et n), on a $n \leqslant m$.

Exemple : On lance un dé équilibré. Si le résultat obtenu est 1 ou 6, on gagne 2 euros. Si le résultat est 5 alors on gagne 1 euro. Pour les autres faces, on perd un euro. On définit la variable aléatoire X qui décrit les gains de ce jeu.
Ainsi, on a : $X(1) =$ .... ; $X(2) =$ .... ; $X(3) =$ .... ; $X(4) =$ .... ; $X(5) =$ .... ; $X(6) =$ .... .

I 2 Loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète

DEFINITION :

Soit X une variable aléatoire discrète prenant les valeurs : $\{x_1; x_2; x_3; ...; x_n\}$.
Lorsqu'à chaque x_i on associe la probabilité de l'événement $(X = x_i)$, on définit **la loi de probabilité** de X.
On représente généralement cette loi à l'aide d'un **tableau** :

x_i	x_1	x_2	...	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	...	p_n

PROPRIETE :

Dans le tableau qui donne la loi de probabilité d'une variable aléatoire, la **somme des probabilités** est égale à 1. C'est-à-dire :

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$$

Exemple (suite) :

La loi de probabilité de la v. a. est :

gain x_i	-1	1	2
$P(X = x_i)$			

I 3 Exemple

Dans une urne, on place 3 boules rouges et 1 boule verte. On tire successivement deux boules de cette urne. Le tirage d'une boule verte rapporte 1 euro et celui d'une boule rouge nous fait perdre 0,5 euro.
Partie A : Tirage AVEC remise - **Partie B :** Tirage SANS remise
Pour chaque partie, répondre aux questions suivantes :

1. Modéliser la situation par un arbre pondéré.
2. Donner toutes les issues possibles **et** leur probabilités associées.
3. Donner la loi de probabilité du gain algébrique.

II Espérance, variance et écart-type

Dans cette partie, on appelle X la VA prenant les valeurs $\{x_1; x_2; x_3; ...; x_n\}$ associées aux probabilités $\{p_1; p_2; p_3; ...; p_n\}$.

II 1 Espérance

II 1 a Définition

DEFINITION :

Définition : L'espérance mathématique de la loi de probabilité de X est le nombre **réel**, noté $E(X)$, défini par :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i\, x_i = p_1\, x_1 + p_2\, x_2 + p_3\, x_3 + ... + p_n\, x_n$$

REMARQUE(S) :

Le calcul de l'espérance mathématique est un calcul de **moyenne** des valeurs x_i, pondérées par les probabilités p_i.

REMARQUE(S) :

Remarque importante :
Si X est une v.a. égale à un **gain algébrique** (positif, ou négatif dans le cas d'une perte) dans une expérience aléatoire représentant un **jeu**, alors :

- Si $E(X) > 0$, alors le jeu est dit **favorable** au joueur (et **défavorable** à l'organisateur).
- Si $E(X) < 0$, alors le jeu est dit **défavorable** au joueur (et **favorable** à l'organisateur).
- Si $E(X) = 0$, alors le jeu est dit **équitable**.

L'espérance mathématique s'interprète alors comme **le gain algébrique moyen, espéré à chaque partie**.

II 1 b Linéarité de l'espérance

PROPRIETE :

Soit a et b deux réels et X une v.a. Alors : $E(aX+b) = aE(X)+b$.

DEMONSTRATION :

Si X prend les valeurs x_1, x_2, ..., x_n alors $aX+b$ prend les valeurs ax_1+b, ax_2+b, ..., ax_n+b.
Donc quelle que soit la valeur de i, la probabilité de $X = x_i$ est égale à la probabilité de $aX+b = ax_i+b$.
Si on pose $P(X = x_i) = p_i$, on a alors :

$$E(aX+b) = \sum_{i=1}^{n}(ax_i+b)\,P(aX+b = ax_i+b) = \sum_{i=1}^{n}(ax_i+b)p_i = \sum_{i=1}^{n}ax_ip_i + \sum_{i=1}^{n}bp_i = a\sum_{i=1}^{n}p_i\,x_i + b\sum_{i=1}^{n}p_i$$

$$\text{Or } \sum_{i=1}^{n}p_i\,x_i = E(X) \text{ et } \sum_{i=1}^{n}p_i = 1 \text{ donc } E(aX+b) = aE(X)+b.$$

II 2 Variance et écart-type

II 2 a Définitions

DEFINITION :

Définition :
La variance de la loi de probabilité de X est le **nombre réel positif** noté $V(X)$ défini par :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i(x_i - E(X))^2$$

DEFINITION :

L'écart-type de la loi de probabilité de X est le **nombre réel positif** noté $\sigma(X)$ défini par :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

II 2 b Propriétés de la variance

PROPRIETE : Propriété 1 (Formule de König-Huygens)

Soit X une VA.
Alors :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} p_i\, x_i\right)^2 = E(X^2) - E(X)^2$$

DEMONSTRATION :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i(x_i - E(X))^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i(x_i^2 - 2 \times x_i \times E(X) + E(X)^2) = \sum_{i=1}^{n} p_i\, x_i^2 - 2E(X) \sum_{i=1}^{n} p_i\, x_i + E(X)^2 \sum_{i=1}^{n} p_i$$

or $\sum_{i=1}^{n} p_i\, x_i^2 = E(X^2)$, $\sum_{i=1}^{n} p_i\, x_i = E(X)$ et $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ donc $V(X) = E(X^2) - 2E(X)^2 + E(X)^2 = E(X^2) - E(X)^2$

PROPRIETE : Propriété 2

Soit a et b deux réels et X une VA.

Alors : $V(aX + b) = a^2V(X)$ et l'**écart-type** $\sigma(aX + b) = |a|\sigma(X)$.

DEMONSTRATION :

$$V(aX + b) = \sum_{i=1}^{n} p_i(ax_i + b - E(aX + b))^2 \text{ donc } V(aX + b) = \sum_{i=1}^{n} p_i(ax_i + b - (aE(X) + b))^2$$

$$V(aX + b) = \sum_{i=1}^{n} p_i(ax_i - aE(X))^2 \text{ donc } V(aX + b) = \sum_{i=1}^{n} p_i\, a^2(x_i - E(X))^2$$

$$V(aX + b) = a^2 \sum_{i=1}^{n} p_i\, (x_i - E(X))^2 \text{ donc } V(aX + b) = a^2\, V(X)$$

$$\sigma(aX + b) = \sqrt{V(aX + b)} = \sqrt{a^2\, V(X)} = |a|\sigma(X)$$

III Utilisation de la calculatrice en mode statistique

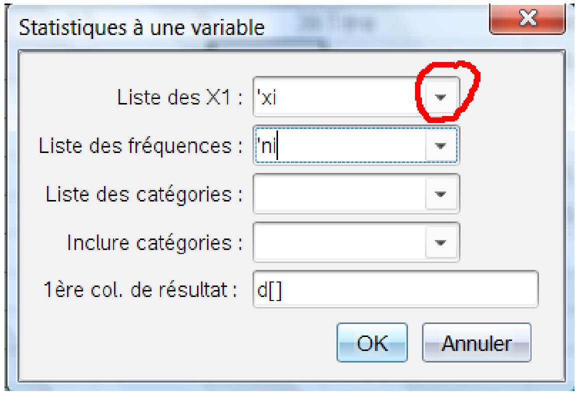
III 1 En mode tableur, le plus simple

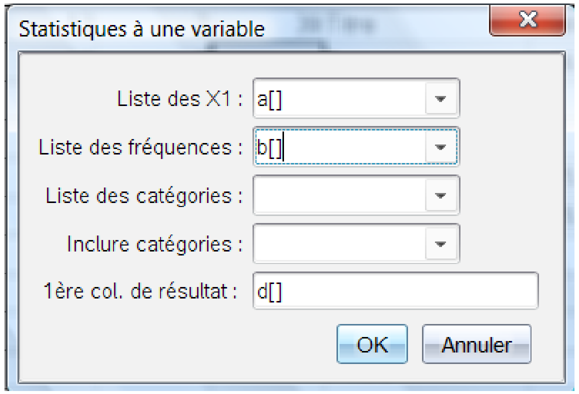
	A xi	B ni	C
◆			
1	13	2	
2	35	5	
3	65	6	
4	24	2	
5	45	7	
6	54	7	
7	12	2	
8	56	8	

On reproduit le tableau de la loi probabilité de la variable aléatoire : on met **les valeurs** prises par la variable aléatoire dans la colonne A et les **probabilités** associées, sur la ligne correspondante, en colonne B. On remarquera que sur cet exemple, ce ne sont pas les probabilités qui ont été entrées (nombres supérieurs à 1) mais une valeur entière proportionnelle à la probabilité correspondante, ce qui revient au même pour le calcul automatique de la moyenne et de la variance, et peut simplifier le travail de saisie.

Puis on demande les résultats d'un calcul statistique « standard » en faisant : **Menu 4,1,1**,
Nombre de listes : 1

Puis, **au choix** (les deux écrans ci-dessous) :
- soit un nom de variable a été attribué aux colonnes et en utilisant le menu déroulant de la flèche entourée en rouge ci-dessous, on sélectionne celui qui convient. **ÉCRAN A GAUCHE**.
- soit on utilise le « nom » de la colonne du tableur de base : $a[\ ]$, $b[\ ]$, ... Dans ce cas, les crochets stipulent qu'il s'agit de noms de colonnes. **ÉCRAN A DROITE**





On obtient alors :

D	E	
	=OneVar('xi,'ni): (	
Titre	Statistiques à un..	
$\bar{x}$	46.2564102564	Moyenne
Σx	1804.	Somme des valeurs pondérées par les effectifs
Σx^2	92928.	Somme des carrés des valeurs pondérées par les effectifs
~~$sx := s_{n-1}x$~~	~~15.7959321024~~	
$\sigma x := \sigma_n x$	15.5921050843	Ecart-type
n	39.	Effectif total
MinX	12.	Valeur minimale
Q_1X	35.	1er quartile
MedianX	54.	Médiane
Q_3X	56.	3ème quartile
MaxX	65.	Valeur maximale
$SSX := \Sigma(x-\bar{x})^2$	9481.43589744	Somme des carrés des écarts à la moyenne

Analyse de ces données dans le cas où **les valeurs exactes** des indicateurs (moyenne, variance) nous sont demandées :

1) Pour obtenir **la valeur exacte de la moyenne** (la calculatrice donne ici une valeur approchée !), vous prenez la valeur exacte de la somme des valeurs pondérées par les effectifs que vous divisez par l'effectif total, ici cela nous donne la fraction $\dfrac{1804}{39}$ qui est irréductible et est donc **la valeur EXACTE de cette moyenne**.

2) Pour obtenir **la valeur exacte de la variance** (la calculatrice donne ici une valeur approchée de sa racine carrée : l'écart-type), prendre la valeur exacte de la somme des carrés des valeurs pondérées par les effectifs que vous divisez par l'effectif total, puis soustraire à ce résultat le carré de la valeur exacte de la moyenne ici cela nous donne : $\dfrac{92928}{39} - \left(\dfrac{1804}{39}\right)^2 = \dfrac{369776}{1521}$ qui est irréductible et est donc **la valeur EXACTE de cette variance**.
Pour l'écart-type il suffit de prendre **la racine carrée** de la variance.

III 2 Dans une page de calcul

On peut également le faire dans une page de calcul :

mean() pour la moyenne et **stDevPop()** pour l'écart-type Les listes de nombres doivent être mis entre accolades :

J'ai repris les mêmes séries de nombres ici en utilisant :

- soit la liste écrite en détail (13,35,65,24,45,54,12,56,2,5,6,2,7,7,2,8)
- soit les noms des listes déjà donnés dans la page de tableur du même fichier (xi, ni). Les deux fonctionnent bien entendu !

Vous pouvez obtenir **au choix la valeur exacte ou approchée** en utilisant la touche "enter" ou les touches "ctrl enter".

mean({13,35,65,24,45,54,12,56},{2,5,6,2,7,7,2,8})	$\frac{1804}{39}$
mean({13,35,65,24,45,54,12,56},{2,5,6,2,7,7,2,8})	46.2564102564
stDevPop({13,35,65,24,45,54,12,56},{2,5,6,2,7,7,2,8})	$\frac{44\cdot\sqrt{191}}{39}$
stDevPop({13,35,65,24,45,54,12,56},{2,5,6,2,7,7,2,8})	15.5921050843
mean(xi,ni)	$\frac{1804}{39}$
mean(xi,ni)	46.2564102564
stDevPop(xi,ni)	$\frac{44\cdot\sqrt{191}}{39}$
stDevPop(xi,ni)	15.5921050843