Fonction exponentielle

Analyse - Chapitre 8

Table des matières

I La fonction exponentielle

I 1 Lemme (résultat préalable à la démonstration d'une propriété)

Activité 1 : On admet qu'il existe une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $f(0) = 1$ et $f'(x) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. **On note** g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) \times f(-x)$.

1. Calculer $g(0)$.
2. Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout x réel, $g'(x) = 0$.
3. Que peut-on en déduire pour la fonction g ?
4. Déduire des questions précédentes l'expression de $g(x)$ pour tout x réel.
5. En déduire, en utilisant la définition de la fonction g, que pour tout x réel, $f(x) \neq 0$.

Lemme : Si f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$, alors f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

I 2 Définition de la fonction exponentielle

Activité 2 : On admet qu'il existe une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $f(0) = 1$ et $f'(x) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. L'**existence** d'une telle fonction est **admise**. On démontre donc l'**unicité**, avec un **raisonnement par l'absurde**.

On suppose qu'il existe une deuxième fonction g vérifiant $g(0) = 1$ et $g'(x) = g(x)$ pour tout x réel.

On définit ensuite sur $\mathbb{R}$ une fonction h par $h(x) = \dfrac{g(x)}{f(x)}$.

1. Justifier que h est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Justifier que h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa fonction dérivée.
3. En déduire l'expression de $h(x)$ pour tout x réel.
4. Qu'en conclure alors pour les fonctions f et g ?

PROPRIETE :

Il **existe** une **unique** fonction f, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.

DEFINITION :

Cette fonction, unique, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$ est notée **exp** et appelée **fonction exponentielle**.

Reformulation des caractéristiques de $\exp$:

1. La fonction $\exp$ est donc définie et dérivable sur $\mathbb{R}$
2. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp'(x) = \exp(x)$
3. $\exp(0) = 1$
4. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp x \neq 0$.

Conséquence de la démonstration du lemme : On a montré que, pour tout x réel, $f(-x) \times f(x) = 1$.

En conséquence, pour tout x réel, $\boxed{\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}}$.

Exemple : Déterminer la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 2$.

II Propriétés de la fonction exponentielle

II 1 Relation fonctionnelle

PROPRIETE :

Pour tous nombres réels a et b, on a $\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$

DEMONSTRATION :

Soit b réel quelconque, on sait que le nombre $\exp(b)$ est non nul (on a montré que exp ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$).

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{\exp(x+b)}{\exp(b)} = \dfrac{1}{\exp(b)} \times \exp(x+b)$.

La fonction $x \mapsto \exp(x+b)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et a pour dérivée $x \mapsto 1 \times \exp'(x+b)$.

Donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $g'(x) = \dfrac{1}{\exp(b)} \times \exp'(x+b) = \dfrac{1}{\exp(b)} \times \exp(x+b) = g(x)$.

De plus, $g(0) = \dfrac{\exp(b)}{\exp(b)} = 1$. g est telle que $g' = g$ et $g(0) = 1$: c'est donc **la fonction exponentielle (unicité).**

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) = \dfrac{\exp(x+b)}{\exp(b)}$, d'où $\exp(x+b) = \exp(x) \times \exp(b)$. Et pour $x = a$, $\boxed{\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)}$.

II 2 Signe de la fonction exponentielle

PROPRIETE :

La fonction exponentielle est **strictement positive** sur $\mathbb{R}$.

DEMONSTRATION :

$x = \dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{2}$, donc $\exp(x) = \exp\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{2}\right) = \exp\left(\dfrac{x}{2}\right) \times \exp\left(\dfrac{x}{2}\right) = \left[\exp\left(\dfrac{x}{2}\right)\right]^2$.
Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) \geqslant 0$ et comme $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) \neq 0$, on peut en conclure que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) > 0$.

II 3 Propriétés algébriques de la fonction exponentielle

PROPRIETE :

Pour tous réels a et b, $\exp(a - b) = \dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}$

DEMONSTRATION :

$\exp(a - b) \times \exp(b) = \exp(a - b + b) = \exp(a)$.

PROPRIETE : Généralisation de la propriété

Pour tous réels a_1,a_2,...a_n, $n \in \mathbb{N}^*$, $\exp(a_1 + a_2 + ... + a_n) = \exp(a_1) \times \exp(a_2) \times ... \times \exp(a_n)$

PROPRIETE :

Pour tout réel x et pour tout entier **relatif** n, $\exp(nx) = (\exp(x))^n$

DEMONSTRATION :

- Pour $n > 0$, on applique la propriété précédente dans le cas particulier où $a_1 = a_2 = ... = a_n = x$.

- Pour $n = 0$, l'égalité est vérifiée car $\exp(0) = 1$ et $(\exp(x))^0 = 1$.

- Pour $n < 0$, on pose $n' = -n$: $\exp(na) = \exp(-n'a) = \dfrac{1}{\exp(n'a)} = \dfrac{1}{[\exp(a)]^{n'}} = [\exp(a)]^{-n'} = [(\exp(a)]^{n}$.

II 4 Nouvelle notation

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\exp(n) = \exp(n \times 1) = (\exp(1))^n$.
Posons $\mathrm{e} = \exp(1)$; on a alors, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\exp(n) = \mathrm{e}^n$.
Par convention, nous étendrons cette égalité à $\mathbb{R}$ et poserons $\boxed{\boldsymbol{\exp(x)} = \mathrm{e}^x}$.
Cette convention est légitime puisque les propriétés algébriques de la fonction exponentielle se traduisent comme les règles de calcul sur les exposants.

PROPRIETE :

Pour tous réels a et b, et pour tout entier relatif n :
• $e^0 = 1$ • $\mathrm{e}^a\,\mathrm{e}^b = \mathrm{e}^{a+b}$ • $\dfrac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b} = \mathrm{e}^{a-b}$ • $\dfrac{1}{\mathrm{e}^b} = e^{-b}$ • $(\mathrm{e}^a)^n = \mathrm{e}^{na}$.

A la **calculatrice** : $\mathrm{e} \approx 2,718281828....$ **Constante d'Euler, nombre irrationnel**.

Exercice 1 : Simplifier les expressions suivantes, pour tout réel x.
• $A = \mathrm{e}^{x+2} \times \mathrm{e}^{-x+2}$; • $B = \dfrac{\mathrm{e}^{-2x+1}}{\mathrm{e}^{-x+1}}$; • $C = \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x + 1} + \dfrac{\mathrm{e}^{-x} - 1}{\mathrm{e}^{-x} + 1}$; • $D = \sqrt{(\mathrm{e}^{-2x} + 1)^2}$.

Exercice 2 : Vrai/faux ? Justifier.

1. Pour tout x réel, $\mathrm{e}^{x^2} = (\mathrm{e}^x)^2$.
2. Pour tout x réel, $\mathrm{e}^{-2x} = \dfrac{1}{(\mathrm{e}^x)^2}$.
3. Pour tout x réel, $(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})^2 = \mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{-2x}$.

III Étude de la fonction exponentielle

III 1 Sens de variations de la fonction exponentielle

PROPRIETE :

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

DEMONSTRATION :

La fonction exponentielle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x réel, $\exp'(x) = \exp(x)$. On sait aussi que, pour tout x réel, $\exp(x) > 0$ (sa dérivée est strictement positive sur $\mathbb{R}$) donc la fonction exponentielle est bien strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

PROPRIETE : Conséquence (bijection de cette fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}^{*+}$) :

Pour tous les nombres réels a et b : $\exp(a) = \exp(b) \Longleftrightarrow a = b$ et $\exp(a) < \exp(b) \Longleftrightarrow a < b$

DEMONSTRATION :

Raisonnement par l'absurde et disjonction de cas

1. Si $a = b$, alors $\mathrm{e}^a = \mathrm{e}^b$.
   Réciproquement : on suppose que $\mathrm{e}^a = \mathrm{e}^b$. Si $a \neq b$, alors $a < b$ ou $b < a$.
   Si $a < b$, alors par la stricte croissance de l'exponentielle, $\mathrm{e}^a < \mathrm{e}^b$, ce qui contredit l'hypothèse : $\mathrm{e}^a = \mathrm{e}^b$.
   On raisonne de même si $b < a$. Ainsi, il est impossible que $a \neq b$, donc $a = b$.
2. Découle directement du fait que la fonction exponentielle est strictement croissante.

Exercice :

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation et l'inéquation : $\mathbf{e^{-x+7} = e^{x+3}}$ et $\mathbf{e^{2x} \leqslant 1}$.

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\mathbf{e^{2x} + 2\,e^{x} < 3}$.

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations $\mathbf{e^{3x+2} = -2}$ et $\mathbf{e^{2x} = \dfrac{1}{e}}$.

III 2 Limites de la fonction exponentielle

PROPRIETE :

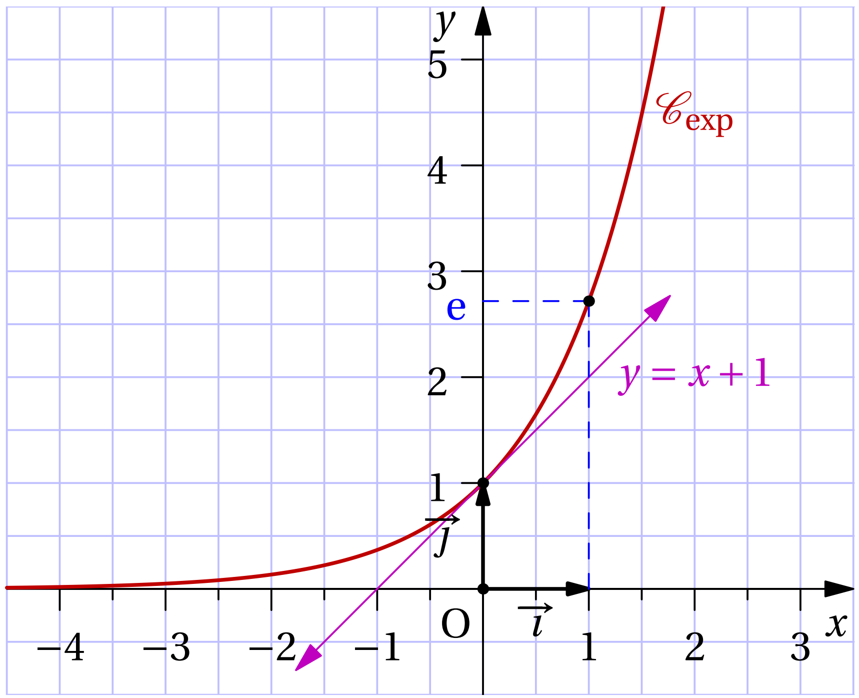
Résultats non exigibles en première

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$.

III 3 Courbe représentative de la fonction exponentielle

Le tableau de variation détaillé et la courbe représentative de la fonction exponentielle :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$\exp'(x)$		$+$	1	$+$	e	$+$	
$\exp$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$



Comme $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$, l'axe des abscisses est **asymptote horizontale** à la courbe représentative de la fonction exponentielle au voisinage de $-\infty$.

IV Compléments sur la fonction exponentielle

IV 1 Les fonctions $x \mapsto \mathrm{e}^{ax+b}$

IV 1 a Dérivée de $x \mapsto \mathrm{e}^{ax+b}$

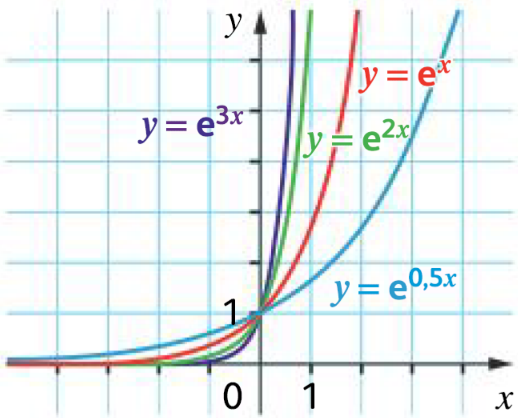
PROPRIETE :

Soit a et b deux réels. La fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{ax+b}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x réel, $f'(x) = a\,\mathrm{e}^{ax+b}$.

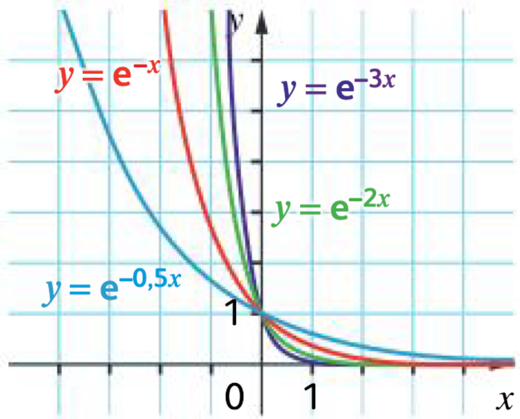
Démonstration immédiate avec la propriété donnant la dérivée de $f(ax+b)$.

Exemple : Étudier le sens de variation des fonctions $f : x \mapsto -3\,\mathrm{e}^{2x-5} + 2$, $g : x \mapsto \mathrm{e}^{x} + x$ et $h : x \mapsto \mathrm{e}^{-2x+6} + 4$

IV 1 b Cas particulier des fonctions $x \mapsto \mathrm{e}^{kx}$, $k \in \mathbb{R}^*$



Croissance exponentielle



Décroissance exponentielle

Plus la **valeur absolue** de k est grande et plus la croissance/décroissance (selon que $k > 0$ ou $k < 0$) de cette fonction est forte.

IV 2 Lien avec les suites géométriques

PROPRIETE :

Pour tout réel a, la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \mathrm{e}^{na}$ est une suite géométrique de raison e^a et de premier terme $u_0 = 1$.

DEMONSTRATION :

Pour tout n entier naturel, $u_{n+1} = \mathrm{e}^{(n+1)a} = \mathrm{e}^{na+a} = \mathrm{e}^{na} \times \mathrm{e}^a = \mathrm{e}^a \times u_n$ donc u est bien géométrique de raison e^a et son premier terme est $u_0 = \mathrm{e}^0 = 1$.

Exemple : Soit la suite u définie pour tout nombre entier n par $u_n = \mathrm{e}^{5n}$.

1. Démontrer que u est géométrique, préciser raison et premier terme.
2. Calculer la somme $S = \sum_{i=0}^{4} u_i$.