Suites

Analyse - Chapitre 7

Table des matières

I Généralités sur les suites 2
I 1 Notion de suite . . . 2
I 2 Modes de génération d'une suite . . . 3

II Représentation graphique d'une suite à la main et à la calculatrice 5

III Sens de variation d'une suite 6
III 1 Définitions . . . 6
III 2 Comment étudier le sens de variation d'une suite ? . . . 7

IV Suites arithmétiques 10
IV 1 Définition . . . 10
IV 2 Formule explicite . . . 11
IV 3 Méthode pour montrer qu'une suite est arithmétique . . . 12
IV 4 Méthode pour montrer qu'une suite n'est pas arithmétique (méthode du contrex) . . . 13
IV 5 Sens de variation d'une suite arithmétique . . . 14
IV 6 Calcul de la somme des n premiers entiers naturels non nuls : $1 + 2 + 3 + \ldots + n$ . . . 15

V Suites géométriques 16
V 1 Définition . . . 16
V 2 Formule explicite . . . 17
V 3 Méthode pour montrer qu'une suite est géométrique . . . 18
V 4 Méthode pour montrer qu'une suite n'est pas géométrique . . . 18
V 5 Sens de variation de q^n . . . 19
V 6 Calcul de la somme $1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n$ . . . 20

Activité :

	Exemples de suite de nombres	Termes suivants
1	1 4 7 10 13 16 19	
2	1 3 9 27 81 243 729	
3	0 2 4 6 8 10 12	
4	1 3 5 7 9 11 13	
5	1 4 9 16 25 36 49	
6	1 1 2 3 5 8 13	
7	1 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{7}$	

I Généralités sur les suites

I 1 Notion de suite

DEFINITION : Suite

Une **suite** numérique u est une **fonction** définie sur l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels (ou sur l'ensemble $\mathbb{N}$ privé de ses premiers éléments : 0, 1, ..., n_0, $n_0 \in \mathbb{N}$).
L'image par u d'un entier naturel n est un réel noté u_n et se lit « u indice n ».
On dit que u_n est le **terme général** de la suite u.

REMARQUE(S) :

- Une suite numérique est une **liste** infinie de nombres réels "numérotés" à l'aide d'entiers naturels.
- Si n est un entier naturel quelconque alors le **terme initial** de la suite est u_0.
- Si n est un entier naturel **non nul** alors le **terme initial** de la suite est u_1.
- La suite u est également notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou plus simplement (u_n).
  Attention à ne pas confondre le terme général u_n et la suite (u_n) !
- Le terme qui suit u_n est u_{n+1}.
- Le terme qui précède u_n est u_{n-1}.

Pour la suite de ce chapitre, on considèrera, sauf mention contraire, les suites définies sur $\mathbb{N}$.

I 2 Modes de génération d'une suite

I 2 a Suites définies à partir d'une formule explicite : $u_n = f(n)$

DEFINITION : Suite définie explicitement

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie de **façon explicite** lorsqu'il existe une fonction f définie sur $\mathbb{N}$ telle que :

pour tout entier naturel n, on a $u_n = f(n)$

REMARQUE(S) :

En pratique, lorsque l'on connaît le terme général u_n d'une suite en fonction de n, on a sa **forme explicite**.

Exemples : Dans l'activité précédente,

- le 1er exemple est une suite que l'on peut définir **explicitement** sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 1 + 3n$,
- de même, le 2ème exemple est une suite que l'on peut définir **explicitement** sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 3^n$,
- de même, le 3ème exemple est une suite que l'on peut définir **explicitement** sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 2n$,
- de même, le 4ème exemple est une suite que l'on peut définir **explicitement** sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 1 + 2n$,
- de même, le 5ème exemple est une suite que l'on peut définir **explicitement** sur $\mathbb{N}$ par $u_n = (n + 1)^2$,
- et le 7ème exemple est une suite que l'on peut définir **explicitement** sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{1}{n+1}$.

Avantage de ce mode de génération :
1) L'étude est proche de celle d'une fonction « classique ». (Attention à la représentation graphique en points « discrets », **NON RELIES** !)
2) On peut calculer directement (et donc facilement) n'importe quel terme de la suite sans connaître les précédents (u_{100}, $u_{90\,345}$...)

I 2 b Suites définies par une relation de récurrence : $u_{n+1} = g(u_n)$.

DEFINITION :

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie **par récurrence** lorsque le premier terme u_0 est donné et qu'il existe une fonction g telle que : pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = g(u_n)$.

Exemples : Dans l'activité précédente,

- le 1er exemple est une suite pouvant être définie **par récurrence** par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 3$,
- de même, le 2ème exemple est une suite pouvant être définie **par récurrence** par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n$,
- de même, le 3ème exemple est une suite pouvant être définie **par récurrence** par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 2$,
- de même, le 4ème exemple est une suite pouvant être définie **par récurrence** par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 2$,
- et le 6ème exemple est une suite pouvant être définie **par récurrence** par $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_n + u_{n+1}$.

Inconvénients de ce mode de génération :
Pour calculer un terme, il faut connaître le précédent et par suite, il faut donc connaître tous les termes précédents.
Par exemple, dans l'exemple précédent, pour calculer u_{100} il faut avoir u_{99} et donc u_{98} etc ...

REMARQUE(S) :

Il existe aussi des suites dont les termes ne suivent pas une logique particulière : la suite des décimales de π, par exemple ou la suite des nombres premiers, ... Elles ne se classent donc dans aucun des deux modes de génération précédents.

L'un des objectifs de ce chapitre va être de concevoir des méthodes permettant de passer d'une relation de récurrence (peu pratique) à la forme explicite (beaucoup plus pratique pour les calculs), quand cela est possible.

II Représentation graphique d'une suite à la main et à la calculatrice

DEFINITION : Représentation graphique d'une suite

Dans un repère, la représentation graphique d'une suite u est un nuage de points de coordonnées $(n\ ; u_n)$, où n est un entier naturel.

REMARQUE(S) :

Une suite u définie explicitement par $u_n = f(n)$ est représentée par un nuage de points constitué des points d'abscisses entières de la courbe représentative de la fonction f.
Une suite définie par récurrence peut être représentée graphiquement à l'aide d'une méthode géométrique particulière
(cf. ex 125 p 166).

III Sens de variation d'une suite

III 1 Définitions

DEFINITION :

Soit u une suite définie sur $\mathbb{N}$.
- Dire qu'une suite (u_n) est **strictement croissante** signifie que pour tout entier n, $u_n < u_{n+1}$ (ou encore $u_{n+1} - u_n > 0$).
- Dire qu'une suite (u_n) est **strictement décroissante** signifie que pour tout entier n, $u_n > u_{n+1}$ (ou encore $u_{n+1} - u_n < 0$).
- Dire qu'une suite (u_n) est **constante** signifie que pour tout entier n, $u_n = u_{n+1}$ (ou encore $u_{n+1} - u_n = 0$).

REMARQUE(S) :

- On définit de même une suite **croissante ou décroissante** en utilisant les inégalités au sens large ($u_n \leqslant u_{n+1}$ ou $u_n \geqslant u_{n+1}$).

- Une suite **croissante ou décroissante** est dite **monotone**.

- **Attention :** La suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = (-1)^n$ n'est **ni croissante, ni décroissante, ni constante** !
Il existe donc des suites **non monotones** !

III 2 Comment étudier le sens de variation d'une suite ?

III 2 a 1ère méthode : étude du signe de la différence de deux termes consécutifs $u_{n+1} - u_n$

PROPRIETE :

Soit u une suite définie sur $\mathbb{N}$.
Si **pour tout entier naturel** n, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ alors la suite u est **croissante**.
Si **pour tout entier naturel** n, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ alors la suite u est **décroissante**.

REMARQUE(S) :

Il faut étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$ **POUR TOUT ENTIER** n (càd sans remplacer n par un entier de notre choix) !

Attention, ce n'est pas parce que $u_1 - u_0 \geqslant 0$ et que $u_2 - u_1 \geqslant 0$ que l'on peut conclure que cela va rester vrai pour tout entier n et que u est croissante ! !

Exemple : $u_n = 2^n - n$ avec $n > 0$;

III 2 b 2ème méthode : étude du sens de variation d'une fonction (suite définie explicitement)

PROPRIETE :

Soit u une suite définie sur $\mathbb{N}$ de manière explicite par $u_n = f(n)$ avec f une fonction définie sur $\mathbb{R}^+$.
Si la **fonction** f est **croissante** sur $\mathbb{R}^+$ alors la **suite** (u_n) **croissante**.
Si la **fonction** f est **décroissante** sur $\mathbb{R}^+$ alors la **suite** (u_n) **décroissante**.

DEMONSTRATION :

Pour tout entier naturel n, $n < n+1$ et si f est croissante sur $\mathbb{R}$ alors $f(n) \leqslant f(n+1)$, soit $u_n \leqslant u_{n+1}$.

REMARQUE(S) :

Conséquences :

1) les suites de terme général : $an+b$ $(a>0)$, n^2, n^3 sont **strictement croissantes**.
2) et les suites de terme général : $an+b$ $(a<0)$, et pour $n \neq 0$, $\dfrac{1}{n}$, $\dfrac{1}{n^2}$ et $\dfrac{1}{n^3}$ sont **strictement décroissantes**.

III 2 c 3ème méthode : étude du rapport de deux termes consécutifs $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, comparaison à 1

PROPRIETE :

Soit u une suite définie sur $\mathbb{N}$ à termes **strictement positifs**.

Si, **pour tout entier naturel** n, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$, alors la suite u est **croissante**.

Si, **pour tout entier naturel** n, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$, alors la suite u est **décroissante**.

Si, **pour tout entier naturel** n, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, alors la suite u est **constante**.

DEMONSTRATION :

Sachant que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1 \Leftrightarrow u_n \leqslant u_{n+1}$.

Exemple : $v_n = \frac{n}{2^n}$ pour tout $n > 0$.

Point méthode :
Attention, la 3ème méthode exige quelques précautions : elle ne fonctionne que lorsque tous les termes u_n sont **strictement positifs** (Ordre dans $\mathbb{R}$!).

Comment savoir quelle méthode utilisée ?
Dans une première approche, la présence de rapports, ou de produits, dans le terme général de la suite va induire la méthode $\frac{v_{n+1}}{v_n}$; tandis que la présence de sommes ou de différences se prêtent mieux à la méthode « $u_{n+1} - u_n$ ».

IV Suites arithmétiques

IV 1 Définition

DEFINITION :

Soit u une suite définie sur $\mathbb{N}$.
On dit qu'une suite (u_n) est **arithmétique** lorsqu'il existe un réel r tel que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + r$.
Le nombre r est appelé **la raison** de la suite arithmétique.

Exemples :

1) La suite des **entiers naturels** est une suite arithmétique de premier terme 0 et de raison 1 (on ajoute 1 pour passer au terme suivant).

2) La suite des **nombres entiers pairs** est une suite arithmétique de premier terme 0 et de raison 2, de terme général $u_n = 2n$. (celle des nombres entiers **impairs** : $u_n = 2n + 1$ sur $\mathbb{N}$)

3) Soit la suite arithmétique de premier terme $u_0 = -1$ et de raison 3. Calculer les premiers termes. Observation de la représentation graphique.

IV 2 Formule explicite

PROPRIETE :

Soit u une suite arithmétique de raison r définie sur $\mathbb{N}$.
On a alors pour tous entiers naturels n et p : $u_n = u_p + (n-p)r$.

En particulier, si u est définie au rang 0, on a : $u_n = u_0 + nr$.
Si u est définie au rang 1, on a : $u_n = u_1 + (n-1)r$.

DEMONSTRATION :

On additionne membre à membre les n égalités ci-dessous :
$u_1 = u_0 + r$
$u_2 = u_1 + r$
$u_3 = u_2 + r$
$u_4 = u_3 + r$
$\dots$
$u_n = u_{n-1} + r$

Exercice 1 : Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r.
Exprimer le terme général u_n en fonction de n et dans les cas suivants :
a) $u_0 = -15$ et $r = -2$
b) $u_5 = 9$ et $u_{10} = 55$

Exercice 2 : Soit (u_n) une suite arithmétique de raison 3.
Peut-on calculer u_6 ? Et si $u_0 = -1$?
Exprimer u_n en fonction de n, puis u_{10} en fonction de u_4 .

IV 3 Méthode pour montrer qu'une suite est arithmétique

Méthode :
Pour montrer qu'une suite u est **arithmétique**, on calcule, **pour tout entier naturel** n, la **différence** $(u_{n+1} - u_n)$ et on montre que cette différence est égale à un nombre réel constant.
La suite est alors **arithmétique** de **raison**, ce réel.

REMARQUE(S) :

Ce n'est pas parce que $u_1 - u_0 = u_2 - u_1$ que l'on peut conclure que cela va rester vrai POUR TOUT ENTIER n et que u est arithmétique. Il faut effectuer le calcul avec la variable n.

Exemple : Montrer que la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 2 - 3n$ est arithmétique et préciser sa raison et son premier terme.

REMARQUE(S) :

Une suite **affine** ($u_n = an + b$, a et b réels) est une suite **arithmétique** (de **raison** a).
En effet, pour tout entier n, on a : $u_n = an + b$, d'où $u_{n+1} = a(n+1) + b$ et par différence, on obtient :
$u_{n+1} - u_n = a(n+1) + b - (an + b) = a$.
La différence de deux termes consécutifs est la constante a ;
la suite de terme général $an + b$ est une suite arithmétique de raison a.

IV 4 Méthode pour montrer qu'une suite n'est pas arithmétique (méthode du contrex)

Méthode :
Pour montrer qu'une suite u **n'est pas** arithmétique, on utilise un contre-exemple :
On calcule les trois premiers termes de la suite (ou trois termes consécutifs quelconques), et on montre que leur différence n'est pas constante.

Exemple : Montrer que la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n^2$ n'est pas arithmétique.

IV 5 Sens de variation d'une suite arithmétique

PROPRIETE :

Les suites arithmétiques sont des suites affines. Autrement dit : (u_n) est une suite arithmétique signifie qu'il existe a et b réels tels que $u_n = an + b$ pour tout entier n.
Ce théorème découle immédiatement du précédent avec $a = r$ et $b = u_0$.

PROPRIETE : Conséquences

Si $r = a$ est strictement positif, la suite arithmétique de terme général $an + b$ est strictement croissante.
Si $r = a$ est strictement négatif, elle est strictement décroissante.
Si $r = a = 0$, elle est constante.

IV 6 Calcul de la somme des n premiers entiers naturels non nuls : $1 + 2 + 3 + \ldots + n$

PROPRIETE : Somme des n premiers entiers naturels non nuls

La somme des n premiers entiers naturels non nuls est $\boxed{1+2+3+4+\ldots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}}$

DEMONSTRATION :

1	+ 2	+ 3	+ 4	+ ...	+ n
n	+ (n-1)	+ (n-2)	+ (n-3)	+ ...	+ 1
(n+1)	+(n+1)	+(n+1)	+(n+1)	+...	+(n+1)

soit $n(n+1)$ car il y a n termes ! Donc

$$\boxed{1+2+3+4+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}}$$

Exercices :

1) Calculer $1 + 2 + \ldots + 56$. 2) Calculer $u_5 + u_6 + \ldots + u_{18}$ où (u_n) est une suite arithmétique de raison -2 et $u_5 = -7$.

V Suites géométriques

V 1 Définition

DEFINITION :

On dit qu'une suite (u_n) est une suite **géométrique** lorsqu'il existe un réel q tel que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n \times q$.
Le nombre q est appelé **raison** de la suite géométrique.

Exemples :
1) La suite (a^n), avec $n \in \mathbb{N}^*$, des **puissances** d'un nombre a est une sg de raison et de premier terme a.
2) La suite (u_n) avec $u_n = n6^n$ n'est pas une sg.
3) La suite $(1; -2; 4; -8; 16; -32; 64; \ldots)$ est une sg de 1er terme 1 et de raison -2.
4) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) définie pour tout n entier naturel, par $u_n = -3 \times 2^n$ et $v_n = \dfrac{2^{3n}}{3^{2n}}$ sont des suites géométriques.

V 2 Formule explicite

PROPRIETE :

Soit u une suite géométrique de raison q, définie sur $\mathbb{N}$.
On a alors pour tous entiers naturels n et p : $u_n = u_p \times q^{n-p}$.

En particulier si u est définie au rang 0, on a : $u_n = u_0 \times q^n$.
Si u est définie au rang 1, on a : $u_n = u_1 \times q^{n-1}$.

DEMONSTRATION :

On multiplie les égalités ci-dessous
$u_1 = u_0 \times q$
$u_2 = u_1 \times q$
$u_3 = u_2 \times q$
$u_4 = u_3 \times q$
$\dots$
$u_n = u_{n-1} \times q$
On obtient :
$u_n = u_0 \times q^n$ et plus généralement : $u_n = u_i \times q^{n-i}$

Exemples : Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q.
Exprimer le terme général u_n en fonction de n et dans les cas suivants :

a) $u_0 = -2$ et $q = -\dfrac{1}{2}$

b) $u_5 = 18$ et $u_{10} = 4374$

V 3 Méthode pour montrer qu'une suite est géométrique

Méthode :
Pour montrer qu'une suite u est géométrique, on exprime, **pour tout entier naturel** n, u_{n+1} en fonction de u_n en montrant qu'il existe un réel q tel que $u_{n+1} = u_n \times q$.
La suite est alors dite géométrique de raison ce réel q.

REMARQUE(S) :

1) Attention, la méthode qui consisterait à essayer de montrer que le rapport $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ est constant n'est pas judicieuse car il faudrait au préalable montrer que u_n ne s'annule pas et ce quel que soit n (long et contraignant !)
2) Ce n'est pas parce que $\dfrac{u_1}{u_0} = \dfrac{u_2}{u_1}$ que l'on peut conclure que cela va rester vrai POUR TOUT ENTIER n et que u est géométrique.

V 4 Méthode pour montrer qu'une suite n'est pas géométrique

Méthode :
Pour montrer qu'une suite n'est pas géométrique on utilise un **contre-exemple**.
On calcule trois termes consécutifs de la suite par exemple les trois premiers et on montre que leur quotient n'est pas constant.

V 5 Sens de variation de q^n

PROPRIETE : Sens de variation de q^n

Pour tout entier naturel n, $q^{n+1} - q^n = q^n(q-1)$ donc :
• Si $q < 0$ alors (q^n) est **non monotone** (les valeurs de la suite sont alternativement positive puis négative car le signe de q^n dépend de la parité de n).
• Si $0 < q < 1$ alors (q^n) est strictement décroissante (car $q - 1 < 0$, avec $q^n > 0$)
• Si $q = 0$ ou $q = 1$ alors (q^n) est constante (toujours égale à 0 ou à 1 selon le cas)
• Si $q > 1$ alors (q^n) est strictement croissante (car $q - 1 > 0$, avec $q^n > 0$)

Conséquence pour une suite géométrique :
Si u est géométrique définie sur $\mathbb{N}$, de premier terme u_0 et de raison q. $u_{n+1} - u_n = u_0 \times q^{n+1} - u_0 \times q^n = u_0 \ (q^{n+1} - q^n) = u_0 \ q^n(q-1)$

Donc le sens de variation d'une suite géométrique va également dépendre du signe de son premier terme !

V 6 Calcul de la somme $1 + q + q^2 + q^3 + ... + q^n$

PROPRIETE :

Soit q un réel différent de 1. Alors on a : $1 + q + q^2 + q^3 + ... + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

DEMONSTRATION :

$S = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n$
$qS = q + q^2 + \ldots + q^n + q^{n+1}$ en multipliant par q
donc $S - qS = 1 - q^{n+1}$
donc $S(1 - q) = (1 - q^{n+1})$ ou $S = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ si $q \neq 1$

REMARQUE(S) :

Si $q = 1$ alors $S = 1 + 1 + 1 + \ldots + 1$ ($n + 1$ fois) donc $S = n + 1$ lorsque $q = 1$

Exemples :

1) Calculer $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \ldots + \dfrac{1}{256}$
2) Calculer $u_5 + u_6 + \ldots + u_{18}$ où (u_n) est une suite géométrique de raison -2 et $u_5 = -96$.