# Fonctions trigonométriques

Analyse - Chapitre 6

## Table des matières

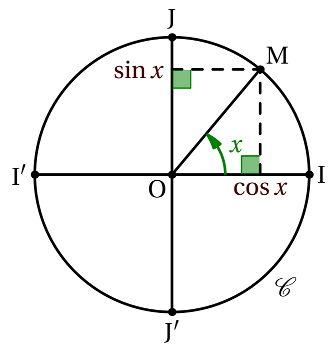
# I Fonctions sinus et cosinus

## I 1 Définition (rappels)

**DEFINITION :**

Soit $x$ un nombre réel et $M$ l'unique point du cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ associé à $x$.
On appelle **cosinus** et **sinus** de $x$ (noté $\cos x$ et $\sin x$) les coordonnées de $M$ dans le repère orthonormé $\left(O\,;I\,;J\right)$ :

$$\overrightarrow{OM} = (\cos x)\,\overrightarrow{OI} + (\sin x)\,\overrightarrow{OJ}$$




La **fonction** qui à tout réel $x$ associe l'**abscisse** du point $M$ est appelée fonction **cosinus**.

La **fonction** qui à tout réel $x$ associe l'**ordonnée** du point $M$ est appelée fonction **sinus**.

**REMARQUE(S) :**

On a pour tout réel $x$ : $\boldsymbol{\cos^2 x + \sin^2 x = 1}$ $\left(OM^2 = 1 = \left\|\overrightarrow{OM}\right\|^2 = \cos^2 x + \sin^2 x\right)$,

et $\boldsymbol{-1 \leqslant \cos x \leqslant 1}$ et $\boldsymbol{-1 \leqslant \sin x \leqslant 1}$ .

## I 2 Propriétés

### I 2 a Périodicité

**PROPRIETE : Périodicité**

Les fonctions **cosinus** et **sinus** vérifient pour tout réel $x$, les relations suivantes :

$$\cos(x + \mathbf{2\pi}) = \cos x \quad \text{et} \quad \sin(x + \mathbf{2\pi}) = \sin x$$

On dit que $\mathbf{2\pi}$ est une **période** de la fonction cosinus et de la fonction sinus, ou encore que **les fonctions sinus et cosinus sont périodiques, de période** $2\pi$.

**DEMONSTRATION :**

Le périmètre du cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ étant $2\pi$, quel que soit l'entier relatif $k$, les réels $x + 2k\pi$ ont le même point associé $M$ sur le cercle $\mathcal{C}$.

Cette propriété permet de restreindre l'intervalle d'étude des fonctions cosinus et sinus à n'importe quel intervalle de longueur $2\pi$.

### I 2 b Parité

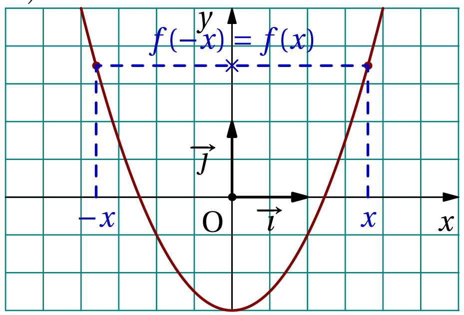
**PROPRIETE : Parité d'une fonction**

Soit une fonction $f$ définie sur un ensemble $\mathcal{D}$ , tel que pour tout $x \in \mathcal{D}$, alors $-x \in \mathcal{D}$ (**ensemble de définition centré sur 0**).

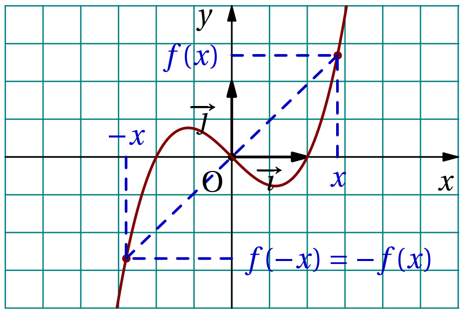
- Si pour tout $x \in \mathcal{D}$, $f(-x) = f(x)$ , alors $f$ est **paire** ;
- Si pour tout $x \in \mathcal{D}$, $f(-x) = -f(x)$ , alors $f$ est **impaire**.

*Interprétation graphique :*

Dans un repère orthogonal, la courbe représentative d'une fonction **paire** est symétrique par rapport à **l'axe des ordonnées** (**symétrie axiale**) :




Dans un repère, la courbe représentative d'une fonction **impaire** est symétrique par rapport à **l'origine** (**symétrie centrale**) :




**PROPRIETE : Parité de cosinus et Imparité de sinus**

Comme $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$,
la fonction **cosinus** est **paire** sur $\mathbb{R}$ et la fonction **sinus** est **impaire** sur $\mathbb{R}$.

Pour la représentation graphique, grâce aux propriétés, nous pouvons restreindre à :

- $[0\,;\pi]$ l'intervalle d'étude de $x \mapsto \cos x$ , puis utiliser la **symétrie d'axe** $(Oy)$ ;
- $[0\,;\pi]$ l'intervalle d'étude de $x \mapsto \sin x$ , puis utiliser la **symétrie de centre** $O$.

Dans les deux cas, nous obtenons les courbes représentatives sur un intervalle de longueur $2\pi$ : l'intervalle $[-\pi\,;\pi]$.

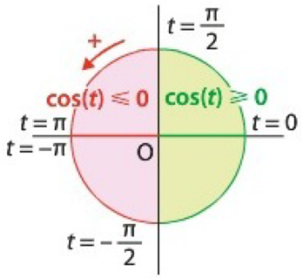
# II Étude de la fonction sinus

## II 1 Dérivée

**PROPRIETE : admise**

La fonction **sinus** est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel $x$ : $\mathbf{\sin'(x) = \cos(x)}$ .

## II 2 Sens de variations

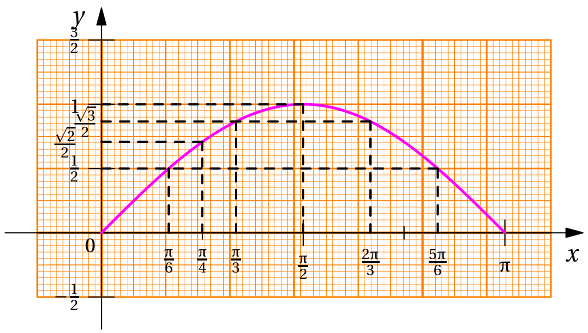


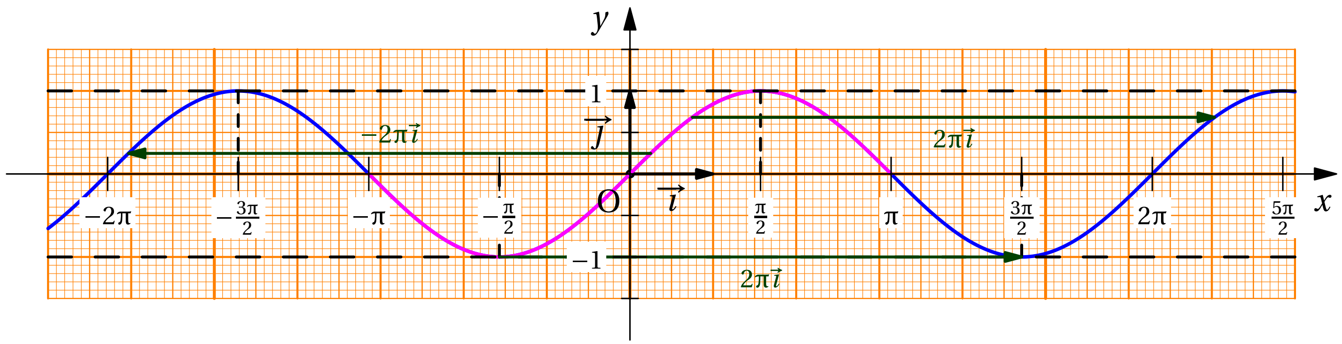

| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|
| $\sin' x = \cos x$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $\sin$ | $0$ ↗ | $1$ | ↘ $0$ |

Puis on utilise la **symétrie centrale** de la courbe représentative de la fonction **sinus** par rapport à O. Et on obtient les variations sur une période $]-\pi\,;\pi]$.

| $x$ | $-\pi$ | $-\frac{\pi}{2}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|
| $\sin$ | $0$ ↘ | $-1$ ↗ | $1$ ↘ | $0$ |

## II 3 Courbe représentative



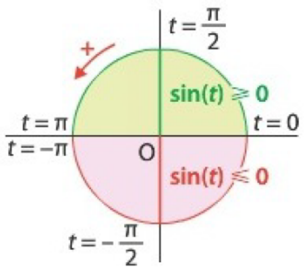
# III Étude de la fonction cosinus

## III 1 Dérivée

**PROPRIETE : admise**

La fonction **cosinus** est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel $x$ : $\mathbf{\cos'(x) = -\sin(x)}$

## III 2 Sens de variations




| $x$ | $0$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|
| $\cos' x = -\sin x$ | $0$ | $-$ | $0$ |
| $\cos$ | $1$ | $\searrow$ | $-1$ |

Puis on utilise la **symétrie axiale** de la courbe représentative de la fonction **cosinus** par rapport à l'axe des ordonnées. Et on obtient les variations sur une période $]-\pi\,;\pi]$.

| $x$ | $-\pi$ | | $0$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\cos$ | $-1$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $-1$ |

## III 3 Courbe représentative