Probabilités conditionnelles et indépendance

Probabilité - Chapitre 5

Table des matières

I Probabilités conditionnelles

Activité : On s'intéresse aux 500 derniers véhicules neufs vendus dans une région selon le type d'énergie utilisée.
90 véhicules fonctionnent à l'éthanol et parmi ces véhicules, 40% sont électriques.
Parmi les véhicules ne fonctionnant pas à l'éthanol, 10% sont électriques.

On notera H l'événement "le véhicule choisi fonctionne à l'éthanol"

et E l'événement "le véhicule choisi est électrique".

1. Représenter la situation avec un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité que le véhicule tiré au hasard soit électrique et fonctionne à l'éthanol.
3. Calculer la probabilité que le véhicule tiré au hasard soit électrique.

I 1 Définition : probabilité de B sachant A

DEFINITION :

Soient A et B deux événements d'un même univers tel que $P(A) \neq 0$.
La probabilité conditionnelle de l'événement B **sachant que** l'événement A est réalisé se note $P_A(B)$ et on a :

$$P_A(B) = \frac{P\left(A \cap B\right)}{P(A)}$$

Exemple : Dans l'activité, parmi les véhicules fonctionnant à l'éthanol, 40% sont électriques. Il s'agit donc de $P_H(E)$.

PROPRIETE :

Soit A, B, B_1 et B_2 des événements d'un même univers tels que $P(A) \neq 0$.

1. $P_\Omega(A) = P(A)$.
2. $P_A(A) = 1$.
3. $P_A(\overline{B}) = 1 - P_A(B)$.
4. Si A et B sont **incompatibles** (leur intersection est vide) alors $P_A(B) = 0$.
5. RAPPEL : $P_A(B_1 \cup B_2) = P_A(B_1) + P_A(B_2) - P_A(B_1 \cap B_2)$.

Cas particulier : Si B_1 et B_2 sont **incompatibles** (intersection vide) alors $P_A(B_1 \cup B_2) = P_A(B_1) + P_A(B_2)$

Démonstration immédiate à partir de la définition.

I 2 Probabilité de A ET B, de l'intersection $A \cap B$

La relation définissant la probabilité conditionnelle peut s'écrire $P\,(A \cap B) = P_A(B) \times P(A)$

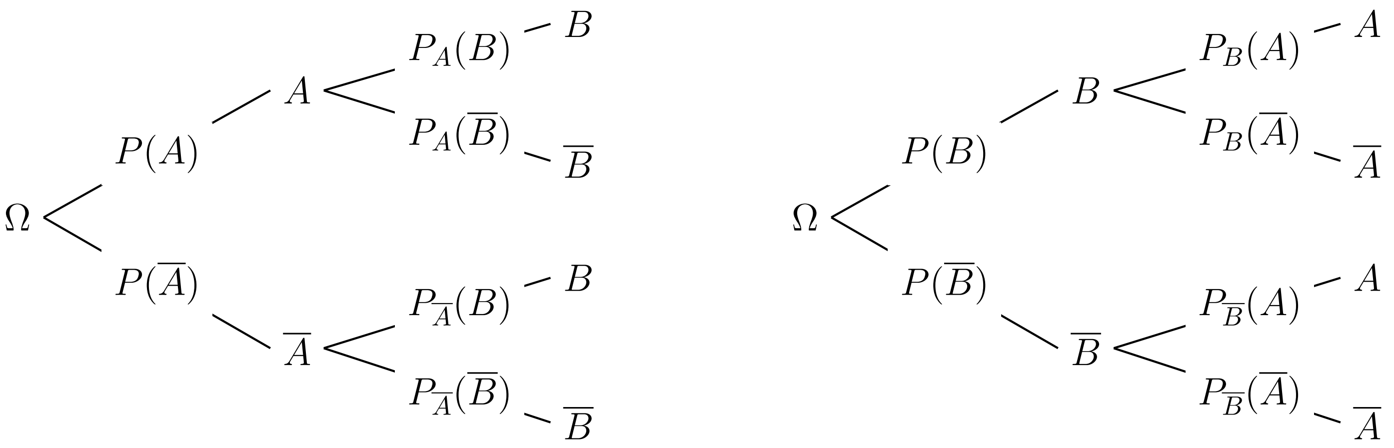
PROPRIETE : ***formule des probabilités composées***

Soient A et B deux événements d'un même univers tels que $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$. Alors :

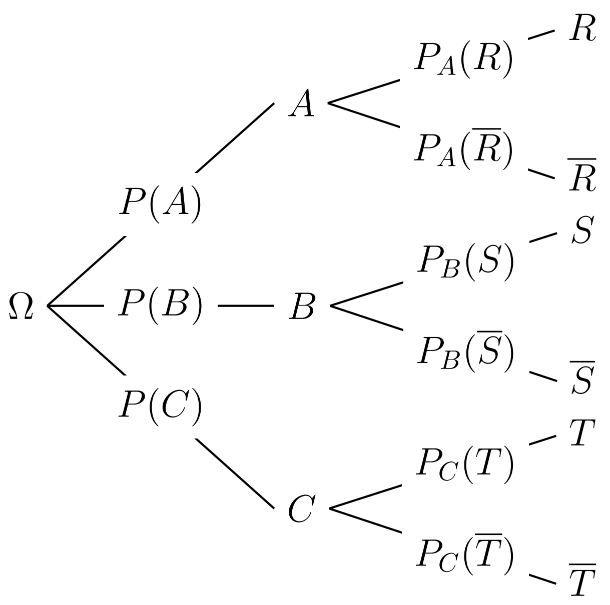
$$P\,(A \cap B) = P_A(B) \times P(A) = P_B(A) \times P(B)$$

Exemple :
Dans l'activité, l'événement la voiture est électrique et fonctionne à l'éthanol se note $H \cap E$.
Et on a : $P(H \cap E) = P(H) \times P_H(E) = \dfrac{90}{500} \times 0,4 = 0,072$.

Visualisation :



II Arbre pondéré et conditionnement



Issues	Probabilités de chaque issue
$A \cap R$	$P(A \cap R) = P(A) \times P_A(R)$
$A \cap \overline{R}$	$P(A \cap \overline{R}) = P(A) \times P_A(\overline{R})$
$B \cap S$	$P(B \cap S) = P(B) \times P_B(S)$
$B \cap \overline{S}$	$P(B \cap \overline{S}) = P(B) \times P_B(\overline{S})$
$C \cap T$	$P(C \cap T) = P(C) \times P_C(T)$
$C \cap \overline{T}$	$P(C \cap \overline{T}) = P(C) \times P_C(\overline{T})$

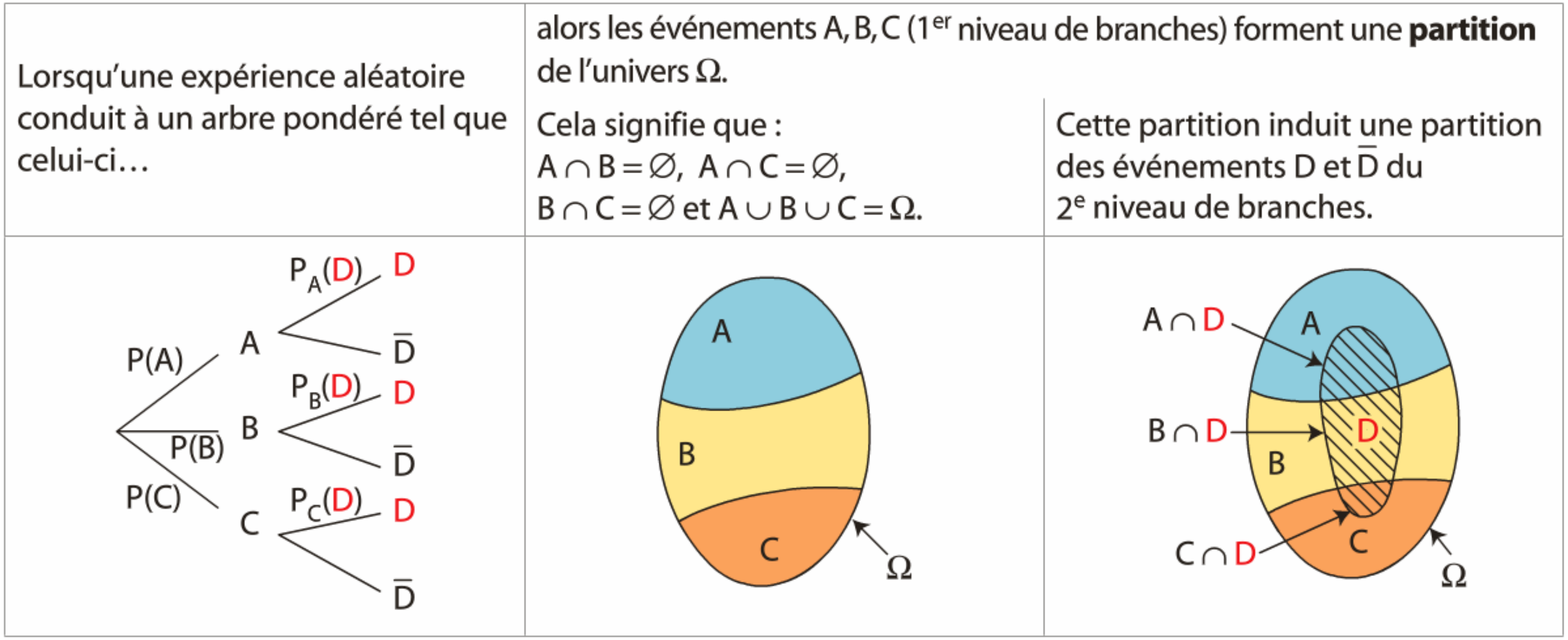
Règles :

- La **racine** de l'arbre est l'**univers** Ω.
- Le **poids** d'une **branche primaire** (ou branche de 1er niveau) est la **probabilité de l'événement** qui se trouve à son **extrémité**. Ex : $P(A)$.
- Le **poids** d'une **branche secondaire** (ou branche de 2è niveau) est la **probabilité conditionnelle** de l'événement qui se trouve à son **extrémité sachant que l'événement qui se trouve à son origine est réalisé**. Ex : $P_A(R)$
- La **somme** des probabilités inscrites sur les branches **issues d'un même nœud** est égale à 1.
  Ex : $P_C(T) + P_C(\overline{T}) = 1$
- Un **chemin complet** qui conduit à un sommet final, représente l'**intersection** des événements qui le composent. Par exemple, le chemin dont l'extrémité est R représente l'événement $A \cap R$.
  La probabilité d'un **chemin** est le **produit** des probabilités figurant sur ses branches.
  Ex : $P(A \cap R) = P(A) \times P_A(R)$.

III Probabilités totales

III 1 Partition d'un ensemble

Exemple : Une classe de première est partagée en 3 groupes de LV1 : anglais A, allemand B, espagnol C. Dans cette classe, une partie des élèves font l'option latin,D.



Ainsi $D=(A\cap D)\cup(B\cap D)\cup(C\cap D)$ et les événements $(A\cap D)$, $(B\cap D)$ et $(C\cap D)$ sont **deux à deux incompatibles** (leur intersection est vide) donc : $\boxed{P(D)=P(A\cap D)+P(B\cap D)+P(C\cap D)}$

DEFINITION : Partition

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ un ensemble d'événements de probabilités **non nulles**, **deux à deux incompatibles** et tels que leur **réunion** est Ω.

A_1, A_2, ..., A_n forment alors une **partition** de l'univers Ω.

Autrement dit, tout événement **élémentaire** de Ω appartient à l'un des événements A_i **et à un seul**.
C'est-à-dire :

1. Pour tous entiers i et j tels que $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant n$ et $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \varnothing$.
2. $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega$.

REMARQUE(S) :

- Un événement A de probabilité non nulle et son **événement contraire** $\overline{A}$ forment une partition de Ω.
- Si $A_1, A_2, \cdots, A_n$ forment une partition de Ω alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) = 1$

III 2 Formule des probabilités totales

PROPRIETE :

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
Si $\{A_1,\, A_2,\, \dots,\, A_n\}$ est une partition de Ω alors pour tout événement B de Ω,

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \cdots + P(A_n \cap B)$$

Exemple : Dans l'activité de début de chapitre, les événements H et $\overline{H}$ forment une partition de l'univers.
Ainsi pour calculer la probabilité de choisir au hasard un véhicule électrique, on utilise la formule des probabilités totales :

$$P(E) = P(H \cap E) + P(\overline{H} \cap E) = P(H) \times P_H(E) + P(\overline{H}) \times P_{\overline{H}}(E)$$

Prolongement (inversion des conditions) :
Calculer la probabilité qu'un véhicule électrique pris au hasard, fonctionne à l'éthanol.

Exercice :
Un quart de la population a été vacciné contre une maladie contagieuse.
Survient une épidémie. On constate que, parmi les malades, on trouve en moyenne un vacciné pour quatre non vaccinés, et parmi les vaccinés un malade sur douze.

Selon vous, le vaccin est-il efficace ?

IV Indépendance de deux événements

IV 1 Définition

DEFINITION :

Soit A et B deux événements.
On dit que A et B sont indépendants ssi $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

IV 2 Propriétés

PROPRIETE :

Si A et B sont deux événements de probabilités **non nulles**. Il est alors équivalent d'écrire :
$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ (1) $P_B(A) = P(A)$ (2) $P_A(B) = P(B)$ (3)

DEMONSTRATION :

$$P_A(B) = P(B) \Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

IV 3 Événements contraires et indépendance

PROPRIETE :

Si A et B sont indépendants alors $\overline{A}$ et B le sont également.

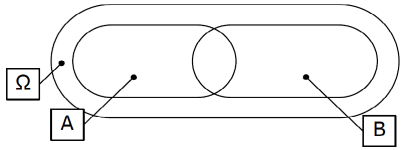
DEMONSTRATION :

(exigible Bac)
$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A})$ donc $P(B) - P(B \cap A) = P(B \cap \overline{A})$
et si A et B sont indépendants : $P(B) - P(B) \times P(A) = P(B \cap \overline{A})$
soit $P(B)[1 - P(A)] = P(B \cap \overline{A})$
ou encore $P(B) \times P(\overline{A}) = P(B \cap \overline{A})$
donc B et $\overline{A}$ sont indépendants !

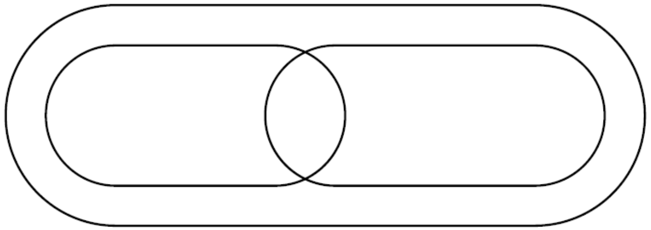
REMARQUE(S) :

Si A et B sont indépendants alors $\overline{A}$ et $\overline{B}$ aussi et donc A et $\overline{B}$ également !

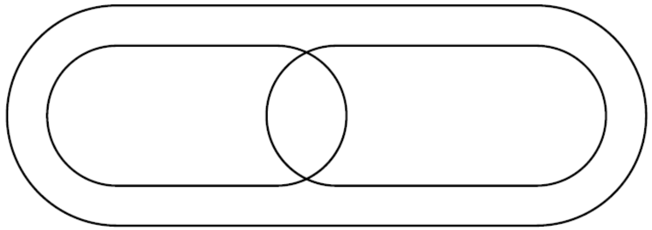
On représente l'univers Ω et deux événements A et B :
Hachurer ci-dessous dans chaque cas la zone indiquée :



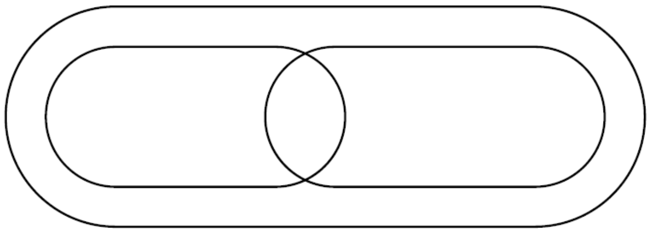
A



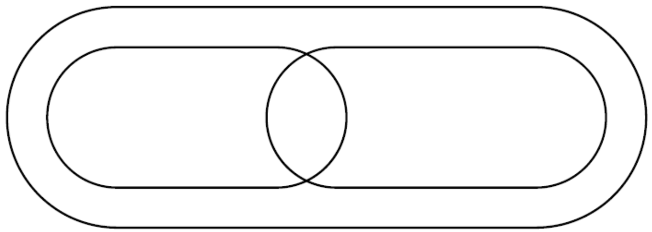
$\overline{A}$



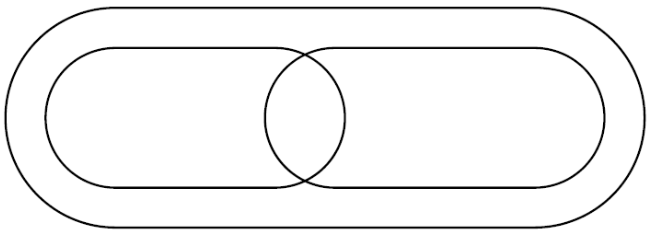
$A \cup B$



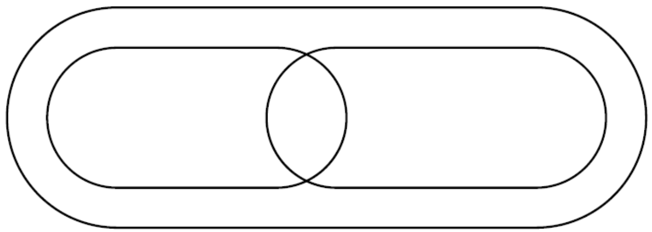
$A \cap B$



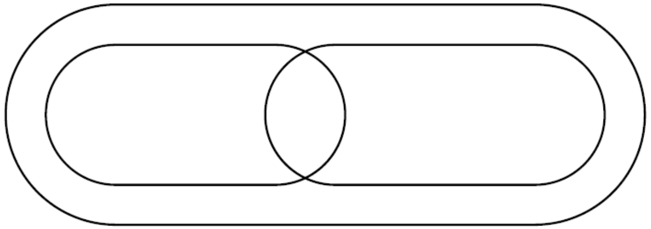
$A \cup \overline{B}$



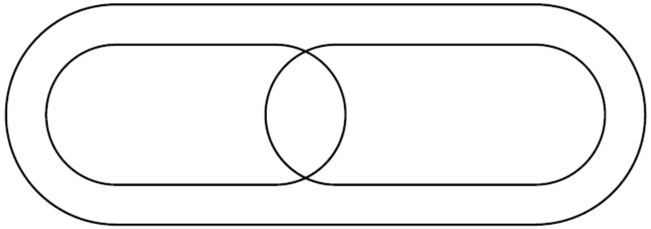
$A \cap \overline{B}$



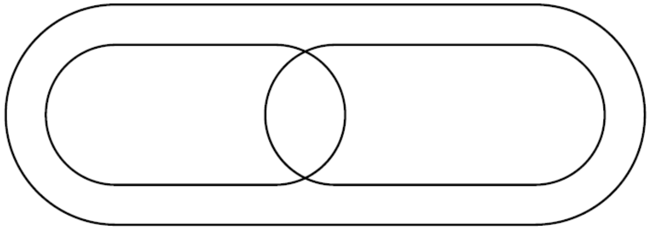
$\overline{A} \cup \overline{B}$



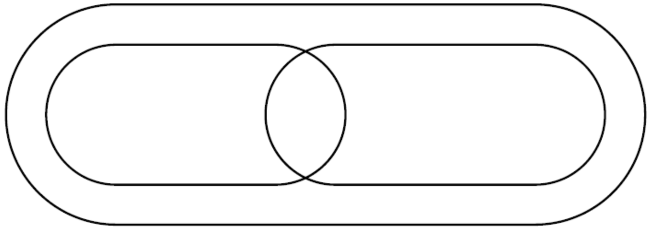
$\overline{A} \cap \overline{B}$



$\overline{A \cup B}$



$\overline{A \cap B}$



Récapitulatif du vocabulaire utilisé dans les ensembles et les probabilités :

Notation	Vocabulaire des ensembles	Vocabulaire des probabilités
Ω	**ensemble** Ω	**univers** des possibilités
$a \in \Omega$	a est **un élément** de Ω	a est une **éventualité** de Ω
$A \subset \Omega$	A est une **partie** de Ω	A est un **événement** de Ω
$A = \emptyset$	A est **l'ensemble vide**	A est l'**événement impossible**
$A = \Omega$	A est égal à Ω	A est l'**événement certain**
$\overline{A}$	$\overline{A}$ est le **complémentaire** de A dans Ω	$\overline{A}$ est l'**événement contraire** de A
$A \cap B = \emptyset$	A et B sont **disjoints**	A et B sont **incompatibles**
$\overline{B} = A$ signifie que $A \cap B = \emptyset$ **ET** $A \cup B = \Omega$	A et B sont **complémentaires**	A et B sont des **événements contraires**