# Dérivation

Analyse - Chapitre 4

## Table des matières

# I Nombre dérivé d'une fonction en un réel

Dans cette partie, $f$ désigne une fonction définie au moins sur un intervalle $I$, et $a$ et $b$ sont deux réels de $I$ tels que $a \neq b$.

## I 1 Taux de variation

**DEFINITION :**

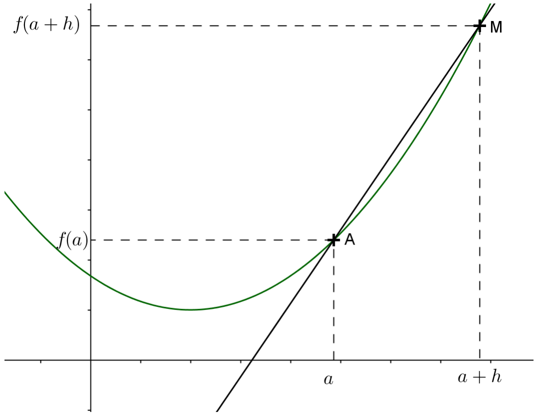
Le **taux de variation** de la fonction $f$ entre $a$ et $b$ est le quotient $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ($a \neq b$ toujours).

En posant $b = a+h$, avec $h$ un réel **non nul**, ce quotient s'écrit alors aussi : $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

## I 2 Interprétation graphique de ce taux de variation

Les points $A$ et $M$ sont les points de la courbe représentative de la fonction $f$ de coordonnées : $A(a\,;f(a))$ et $M(a+h\,;f(a+h))$.

Le coefficient directeur de la (droite) sécante $(AM)$ est égal à : $\dfrac{y_M-y_A}{x_M-x_A} = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.




**PROPRIETE :**

Le **taux de variation** de la fonction $f$ entre $a$ et $b=a+h$ est égal au **coefficient directeur** (ou pente) de la **sécante** $(AM)$.
$A$ et $M$ appartenant à la courbe représentative de $f$ et ayant pour coordonnées respectives : $A(a\,;f(a))$ et $M(a+h\,;f(a+h))$.

## I 3 Nombre dérivé

## DEFINITION :

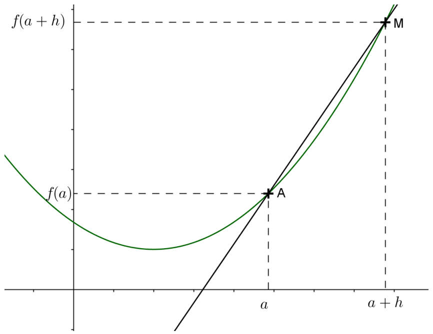
Supposons que pour les valeurs de $h$ de plus en plus proches de zéro ($h \neq 0$), les nombres $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ deviennent de plus en plus proches d'un réel constant noté $l$.
Alors on dit que la fonction $f$ est **dérivable** en $a$ et que $l$ est le **nombre dérivé** de $f$ en $a$.
Ce **nombre dérivé** est noté $f'(a)$.

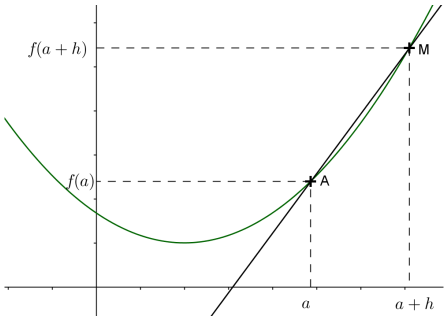
## REMARQUE(S) :

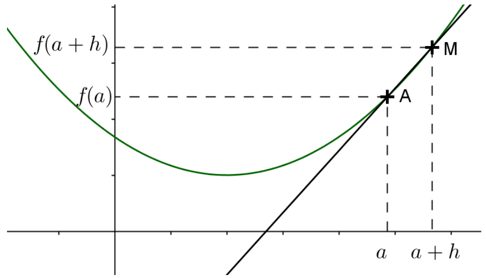
On peut noter $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

## I 4 Interprétation graphique du nombre dérivé

On suppose maintenant que $f$ est dérivable en un réel $a$ de l'intervalle $I$. Faire tendre $h$ vers 0 revient graphiquement à rapprocher le point $M$ du point $A$.




**DEFINITION :**

La droite qui passe par le point $A(a\ ; f(a))$ et dont le coefficient directeur est le réel $f'(a)$ est la **tangente** à la courbe représentative de la fonction $f$ au point d'abscisse $a$.

Autrement dit, quand il existe, $f'(a)$ est le **coefficient directeur** de **la tangente** à la courbe représentative de $f$ au point $A$ d'abscisse $a$.

**PROPRIETE :**

L'**équation de la tangente** à la courbe représentative de la fonction $f$ au point d'abscisse $a$ est : $y = f'(a)(x-a)+f(a)$.

**DEMONSTRATION :**

Appelons $(T)$ la tangente à la courbe représentative de la fonction $f$ au point d'abscisse $a$.
Nous savons qu'un vecteur directeur de $(T)$ est $\overrightarrow{u}(1\ ;f'(a))$.

$M(x\ ;y) \in (T) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}(x-a\ ;y-f(a))$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires.
$M(x\ ;y) \in (T) \Leftrightarrow (x-a)f'(a)-(y-f(a))=0$
$M(x\ ;y) \in (T) \Leftrightarrow (x-a)f'(a)-y+f(a)=0$
$M(x\ ;y) \in (T) \Leftrightarrow y=(x-a)f'(a)+f(a)$

# II Dérivées des fonctions usuelles

## II 1 Fonction dérivée

**DEFINITION :**

Soit $f$ une fonction définie au moins sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$.
La fonction $f$ est **dérivable sur** $I$ si et seulement si pour tout réel $a \in I$, $f$ est dérivable en $a$.
La fonction définie sur $I$ qui, à tout réel $x$ de $I$ associe le **nombre dérivé** de $f$ en $x$ est appelée la **fonction dérivée** de $f$.
Cette **fonction dérivée** est notée $f'$.

## II 2 Dérivée d'une fonction constante

Soit $k$ un réel quelconque. Soit $f$ une fonction constante définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = k$. Montrons que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminons sa fonction dérivée.

• Tout d'abord, on calcule le **taux de variation** de la fonction $f$ entre $x$ et $x + h$ : Pour tout $x$ réel et $h \neq 0$, on a : $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \dfrac{k-k}{h} = 0$.

• Puis on détermine **la limite** de ce taux lorsque $h$ tend vers 0 :
Lorsque h tend vers 0, le taux de variation de la fonction $f$ tend vers 0 (et ce, quelle que soit la valeur de $x$ réel) ;
Or 0 est un nombre réel fixe (constant) donc $f$ est dérivable en tout nombre réel $x$, donc $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 0$.

**PROPRIETE :**

Soit $f$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto k$, $k \in \mathbb{R}$. Alors $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 0$.

**Graphiquement**, ces résultats sont cohérents avec nos observations.
En effet, une fonction constante est représentée par une droite parallèle à l'axe des abscisses, dont le coefficient directeur (ou pente) est nul.

## II 3 Dérivée d'une fonction affine

Soit $m$ et $p$ deux réels quelconques. Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$. Montrons que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminons sa fonction dérivée.

• Tout d'abord, on calcule le **taux de variation** de la fonction $f$ entre $x$ et $x + h$ :
Pour tout $x$ réel et $h \neq 0$, on a :

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{[m(x+h)+p]-[m(x)+p]}{h} = \frac{[mx+mh+p]-[mx+p]}{h} = \frac{mx+mh+p-mx-p}{h}$$

Soit : $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \dfrac{mh}{h} = m$.

• Puis, on détermine **la limite** de ce taux lorsque $h$ tend vers 0 :
Lorsque h tend vers 0, le taux de variation de la fonction $f$ tend vers $m$ (et ce, quelle que soit la valeur de $x$ réel) ;
Or $m$ est un nombre réel fixe (constant) donc $f$ est dérivable en tout nombre réel $x$, donc $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = m$.

**PROPRIETE :**

Soit $f$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto mx + p$, avec $(m; p) \in \mathbb{R}^2$. Alors $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = m$.

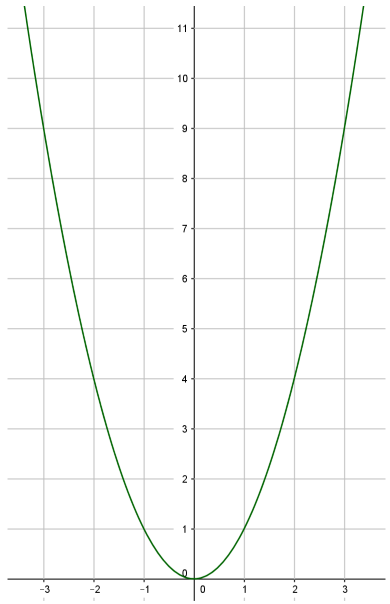
**Graphiquement**, ces résultats sont cohérents avec nos observations.
En effet, une fonction affine définie par $f : x \mapsto mx + p$ est représentée par une droite dont le coefficient directeur (ou pente) est $m$.

## II 4 Dérivée de la fonction carré

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. Montrons que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminons sa fonction dérivée.

• Tout d'abord, on calcule le **taux de variation** de la fonction $f$ entre $x$ et $x+h$ :
Pour tout $x$ réel et $h \neq 0$, on a : $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \dfrac{(x+h)^2-x^2}{h} = \dfrac{x^2+2hx+h^2-x^2}{h} = \dfrac{2hx+h^2}{h} = \dfrac{h(2x+h)}{h} = 2x+h$

• Puis on détermine **la limite** de ce taux lorsque $h$ tend vers 0 :
Lorsque h tend vers 0, le taux de variation de la fonction $f$ tend vers $2x$ (et ce, quelle que soit la valeur de $x$ réel) ;
Or pour chaque valeur de $x$ réel, fixée, $2x$ est un nombre réel, ne dépendant que de $x$
donc $2x$ est un nombre constant pour chaque valeur de $x$, donc $f$ est dérivable en chaque nombre réel $x$, donc $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2x$.




**PROPRIETE :**

Soit $f$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto x^2$. Alors $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2x$.

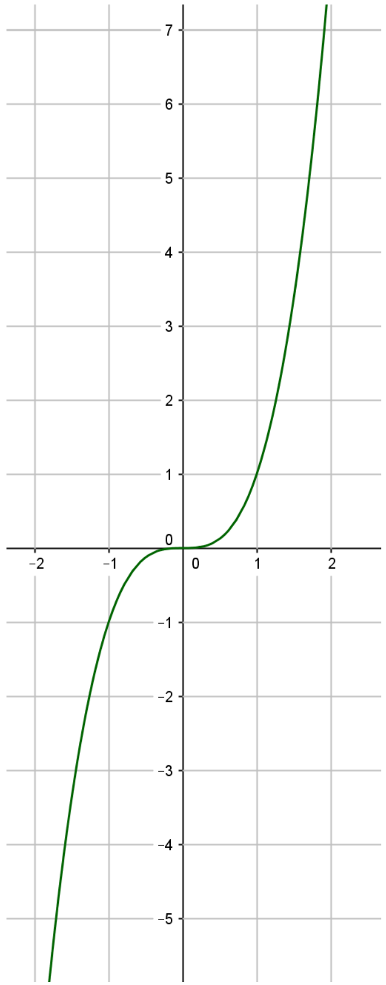
**Graphiquement**, cela signifie que **la pente**, ou coefficient directeur, de la tangente à la parabole représentative de la fonction carrée :
en 0, vaut 0 : la tangente en ce point d'abscisse 0 est donc horizontale.
en 1, vaut 2 : la tangente au point d'abscisse 1 a donc une pente de 2.
en 2, vaut 4 : la tangente au point d'abscisse 2 a donc une pente de 4, on remarque que cette pente a doublé.
en -1, vaut -2 : la tangente est "descendante" et symétrique par rapport à celle au point d'abscisse 1.

## II 5 Dérivée de la fonction cube

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$. Montrons que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminons sa fonction dérivée.

- Tout d'abord, on calcule le **taux de variation** de la fonction $f$ entre $x$ et $x + h$ :

Pour tout $x$ réel et $h \neq 0$, on a : $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \dfrac{(x+h)^3 - x^3}{h}$




**Pré-requis nécessaire à ce calcul :** $\forall a \in \mathbb{R}$ et $\forall b \in \mathbb{R}$, on a $\boxed{(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$.

En effet,

$(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b)$

$(a+b)^3 = (a^2 + 2ab + b^2)(a+b)$

$(a+b)^3 = a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Donc, pour tout $x$ réel et $h \neq 0$, on a :

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} = \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} = \frac{h(3x^2 + 3xh + h^2)}{h}$$

Soit : $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = 3x^2 + 3xh + h^2$

- Puis on détermine **la limite** de ce taux lorsque $h$ tend vers 0 :

Lorsque h tend vers 0, le taux de variation de la fonction $f$ tend vers $3x^2$ (et ce, quelle que soit la valeur de $x$ réel) ;

Or pour chaque valeur de $x$ réel, fixée, $3x^2$ est un nombre réel, ne dépendant que de $x$

donc $3x^2$ est un nombre constant pour chaque valeur de $x$, donc $f$ est dérivable en chaque nombre réel $x$,

donc $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2$.

**PROPRIETE :**

Soit $f$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto x^3$. Alors $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2$.

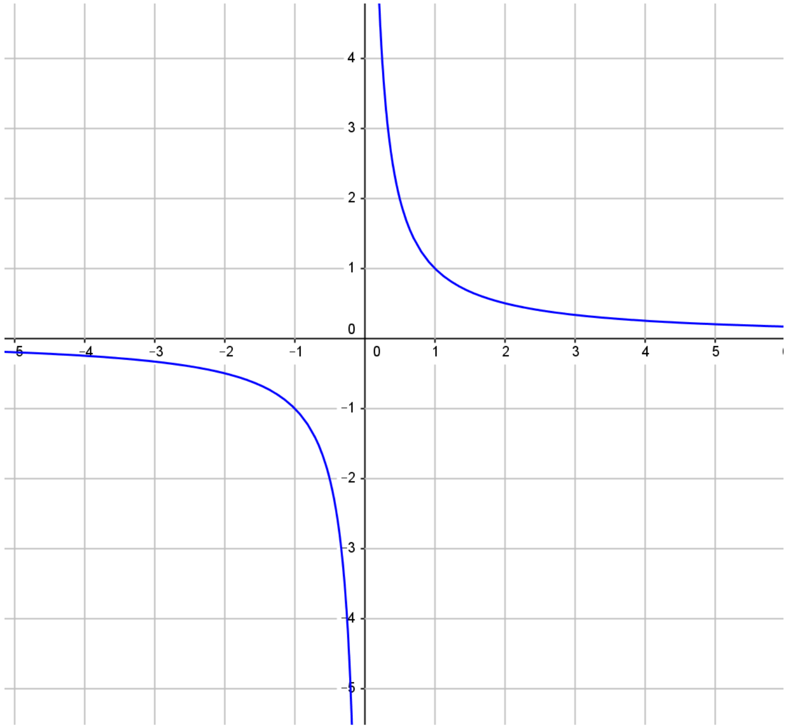
## II 6 Dérivée de la fonction inverse

Soit $f$ la fonction inverse définie par $f(x)=\dfrac{1}{x}$. On sait que $f$ est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.
Pour étudier la dérivabilité de $f$ sur son ensemble de définition $\mathbb{R}^*$, on est amené à le faire successivement sur les intervalles $]-\infty\,;0[$ et $]0\,;+\infty[$.

• $\forall x \in \,]0\,;+\infty[$ et $\forall h \neq 0$ tel que $x+h>0$, le taux de variation de $f$ entre $x$ et $x+h$ est :

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\dfrac{1}{x+h}-\dfrac{1}{x}}{h}=\frac{\dfrac{x-(x+h)}{x(x+h)}}{h}=\frac{1}{h}\left[\frac{x-x-h}{x(x+h)}\right]=\frac{1}{h}\times\frac{-h}{x(x+h)}=\frac{-1}{x(x+h)}$$

• Lorsque $h$ tend vers 0, ce taux de variation tend vers $\dfrac{-1}{x^2}$, nombre réel car $x\in\,]0\,;+\infty[$.
Donc $f$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et sur $]0\,;+\infty[$, $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$.
On démontre de même que $f$ est également dérivable sur $]-\infty\,;0[$.
Donc $\forall x$ réel non nul, $f$ est dérivable et $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$.




**PROPRIETE :**

Soit $f$ la fonction inverse définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

Alors $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*_+$ et sur $\mathbb{R}^*_-$ ; et $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$.

## II 7 Dérivées des fonctions de la forme $x \mapsto x^n$

**PROPRIETE : (admise)**

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^n$. $f$ est alors dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x$ réel, $f'(x) = nx^{n-1}$.

**REMARQUE(S) :**

1. On remarquera la cohérence de cette propriété avec celles concernant la fonction constante, la fonction identité (cas particulier de fonction affine avec $m = 1$ et $p = 0$), la fonction carré et la fonction cube.
2. On remarque également que cette propriété reste vraie sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$ pour $n = -1$.
   En effet, nous avons démontré précédemment que la dérivée de la fonction inverse $x \mapsto \dfrac{1}{x} = x^{-1}$ est la fonction $x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$.
   Or lorsque $n = -1$ : $nx^{n-1} = -1x^{-2} = -\dfrac{1}{x^2}$.
3. Plus largement, on admettra que cette propriété reste vraie $\forall n \in \mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}$ à condition de restreindre l'ensemble de définition de $f$ à $\mathbb{R}^*$.
   $f$ sera alors dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$ .

**Exercice :** Démontrer que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$ et déterminer sa dérivée.

$\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = \dfrac{1}{x^2} = x^{-2}$ et donc d'après la propriété, $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$

et $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = -2x^{-3} = -\dfrac{2}{x^3}$.

## II 8 Dérivée de la fonction racine carrée

Soit $f$ la fonction définie par $f(x)=\sqrt{x}$. Nous avons vu au chapitre 3 que $f$ est définie sur $[0\,;+\infty[$. Étudions la dérivabilité de $f$ sur $[0\,;+\infty[$.

$\forall x\in[0\,;+\infty[$, le taux de variation de $f$ entre $x$ et $x+h$, avec $h\neq 0$ et tel que $x+h\in[0\,;+\infty[$ est :

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\times\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\frac{(x+h)-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$

• Considérons tout d'abord le cas particulier $x=0$ : $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=\dfrac{1}{\sqrt{h}}$

Lorsque $h$ tend vers 0, $\sqrt{h}$ tend 0 et le quotient $\dfrac{f(h)-f(0)}{h}$ tend vers un quotient dont le dénominateur est nul, ce qui n'a pas de sens.

Or $f$ est dérivable en 0 ssi $\dfrac{f(h)-f(0)}{h}$ tend vers un nombre réel. Donc $f$ **n'est pas dérivable en zéro.**

• Étudions maintenant le cas $x\neq 0$ :

Lorsque $h$ tend vers 0, $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\dfrac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$ tend vers $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, nombre réel car $x\in\,]0\,;+\infty[$.

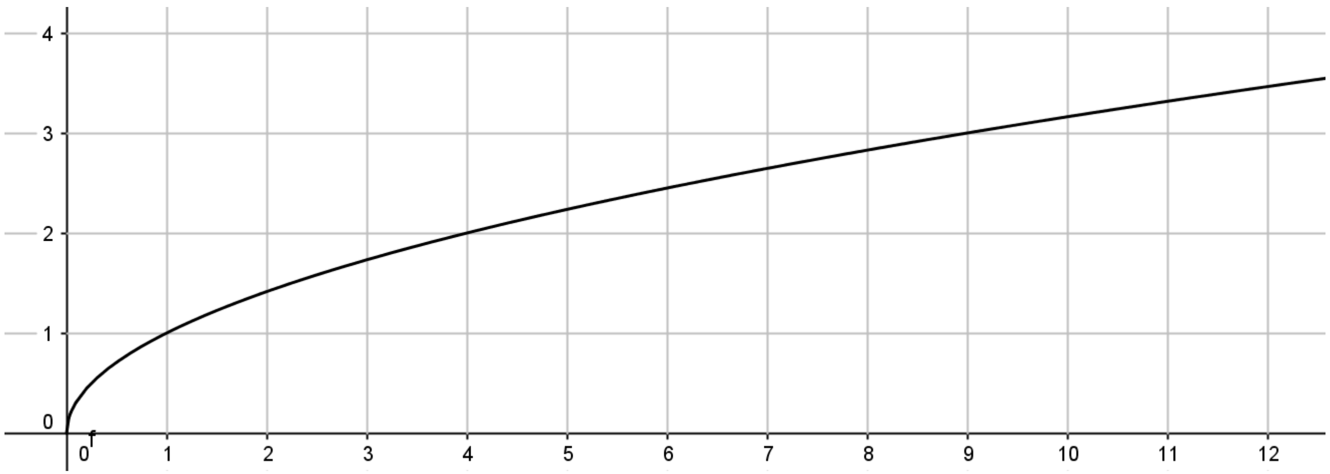
Donc $f$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et sur cet intervalle on a $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

**REMARQUE(S) :**

1. Lorsque $h$ tend vers 0, $\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}$ tend vers l'inverse d'un nombre positif aussi proche de 0 que l'on veut, donc il tend vers $+\infty$ et $+\infty$ n'est pas un nombre donc $f$ n'est pas dérivable en zéro. La courbe représentative de $f$ admet au point d'abscisse 0, une tangente verticale (pente infinie).
2. (Hors Programme) $\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$ et la formule vue pour $x^n$ s'applique pour $n=\dfrac{1}{2}$.

**PROPRIETE :**

Soit $f$ la fonction racine carrée définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x}$. Alors $f$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et pour tout $x\in\,]0\,;+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.



## II 9 Dérivée de la fonction valeur absolue

**DEFINITION :**

La fonction valeur absolue $f$ est définie sur $\mathbb{R}$ par

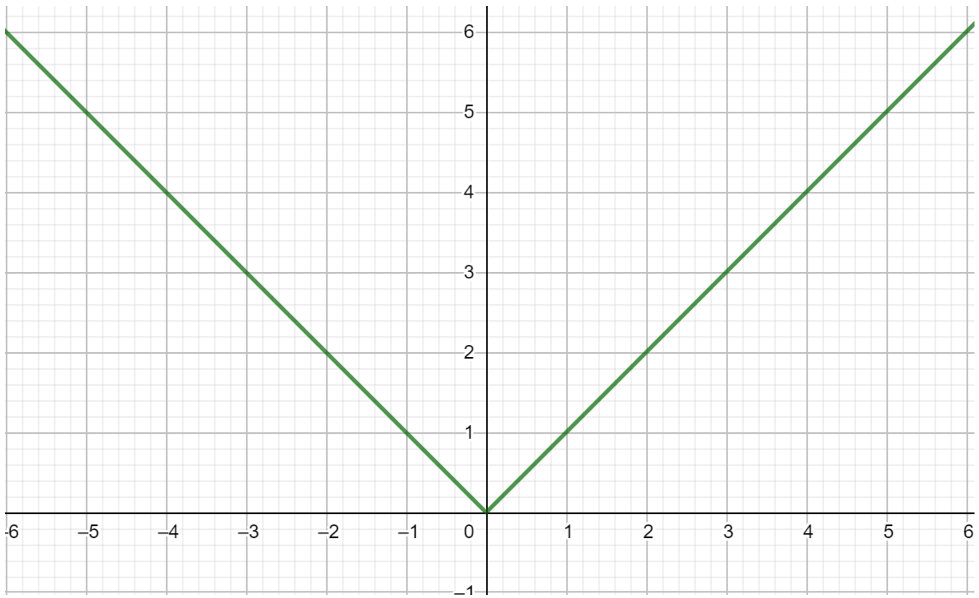
$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

**PROPRIETE :**

La fonction valeur absolue est **dérivable** sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$ et on a

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x > 0 \\ -1 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Elle **n'est pas** dérivable en zéro.




**DEMONSTRATION :**

• Pour tout $x > 0$, $f(x) = |x| = x$. Or, la fonction $x \mapsto x$ est une fonction affine dérivable sur $\mathbb{R}$ et dont la dérivée est la fonction $x \mapsto 1$. Donc $f$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et pour tout $x > 0$, $f'(x) = 1$.

• Pour tout $x < 0$, $f(x) = |x| = -x$. Or, la fonction $x \mapsto x$ est une fonction affine dérivable sur $\mathbb{R}$ et dont la dérivée est la fonction $x \mapsto -1$. Donc $f$ est dérivable sur $]-\infty\,;0[$ et pour tout $x < 0$, $f'(x) = -1$.

• Calculons, pour tout $h$ non nul, le taux de variation de la fonction $f$ en 0 : $\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \dfrac{|0+h|}{h} = \dfrac{|h|}{h}$.
Si $h > 0$, ce taux vaut 1, mais si $h < 0$, il vaut $-1$.
Ainsi, selon le signe de $h$, le taux de variation de $f$ en 0 tend vers deux nombres réels différents, donc $f$ n'est pas dérivable en 0.

## II 10 Tableau récapitulatif des dérivées des fonctions usuelles

| $f(x)$ | $f'(x)$ | $D_f$ | $f$ est dérivable sur | Conditions |
|---|---|---|---|---|
| $k$ | | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$ | $k \in \mathbb{R}$ |
| $mx+p$ | | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$ | $m$ et $p$ réels |
| $x^2$ | | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$ | |
| $x^3$ | | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$ | |
| $x^n$ | | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$ | $n \in \mathbb{N}$ |
| $x^n$ | | $\mathbb{R}^*$ | $\mathbb{R}^*_+$ et sur $\mathbb{R}^*_-$ | $n \in \mathbb{Z} \backslash \mathbb{N}$ |
| $\frac{1}{x}$ | | $\mathbb{R}^*$ | $\mathbb{R}^*_+$ et sur $\mathbb{R}^*_-$ | |
| $\sqrt{x}$ | | $[0\ ;+\infty[$ | $]0\ ;+\infty[$ | |
| $\|x\|$ | | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}^*_+$ et sur $\mathbb{R}^*_-$ | |
| $\cos x$ | | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$ | |
| $\sin x$ | | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$ | |

# III Dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient

## III 1 Dérivée d'une somme

Soit $u$ et $v$ deux fonctions définies et dérivables sur un même intervalle $I$. Étudions la dérivabilité de la fonction $u+v$ :

• $\forall x \in I$, calculons le taux de variation de $u+v$ entre $x$ et $x+h$, avec $h \neq 0$ et tel que $x+h \in I$ :

$$\frac{(u+v)(x+h)-(u+v)(x)}{h} = \frac{u(x+h)+v(x+h)-(u(x)+v(x))}{h} = \frac{u(x+h)-u(x)}{h} + \frac{v(x+h)-v(x)}{h}.$$

• Or $u$ est dérivable sur $I$, donc en tout $x$ de $I$,

et lorsque $h$ tend vers 0, $\dfrac{u(x+h)-u(x)}{h}$ tend vers $u'(x)$ qui est un nombre réel.

De même, $v$ est dérivable sur $I$ et $\dfrac{v(x+h)-v(x)}{h}$ tend vers le réel $v'(x)$ lorsque $h$ tend vers 0.

Par suite, $\dfrac{(u+v)(x+h)-(u+v)(x)}{h}$ tend vers le réel $u'(x)+v'(x)$ lorsque $h$ tend vers 0.

Et donc $u+v$ est dérivable sur $I$ et $\forall x \in I$, $(u+v)'(x) = u'(x)+v'(x)$.

**PROPRIETE :**

Soit $u$ et $v$ deux fonctions définies et dérivables sur un même intervalle $I$.

Alors la fonction $u+v$ est définie et dérivable sur $I$ et $(u+v)' = u'+v'$.

## III 2 Dérivée d'un produit

Soit $u$ et $v$ deux fonctions définies et dérivables sur un même intervalle $I$. Étudions la dérivabilité de la fonction $u \times v$ :

• $\forall x \in I$, calculons le taux de variation de $u \times v$ entre $x$ et $x+h$, avec $h \neq 0$ et tel que $x+h \in I$ :

$$\frac{(u \times v)(x+h)-(u \times v)(x)}{h}=\frac{u(x+h) \times v(x+h)-u(x) \times v(x)}{h}$$

$$\frac{(u \times v)(x+h)-(u \times v)(x)}{h}=\frac{u(x+h)v(x+h)-u(x)v(x+h)+u(x)v(x+h)-u(x)v(x)}{h}.$$

$$\frac{(u \times v)(x+h)-(u \times v)(x)}{h}=\frac{[u(x+h)-u(x)]\,v(x+h)+u(x)\,[v(x+h)-v(x)]}{h}.$$

$$\frac{(u \times v)(x+h)-(u \times v)(x)}{h}=\frac{u(x+h)-u(x)}{h}\,v(x+h)+u(x)\,\frac{v(x+h)-v(x)}{h}.$$

• Or $u$ est dérivable sur $I$, donc en tout $x$ de $I$, et lorsque $h$ tend vers 0, $\dfrac{u(x+h)-u(x)}{h}$ tend vers $u'(x)$ qui est un nombre réel.

De même, $v$ est dérivable sur $I$ et $\dfrac{v(x+h)-v(x)}{h}$ tend vers le réel $v'(x)$ lorsque $h$ tend vers 0.

Enfin, on admet que $v(x+h)$ tend vers $v(x)$ lorsque h tend vers 0.(notion implicite de **continuité** d'une fonction en un point)

Par suite, $\dfrac{(u \times v)(x+h)-(u \times v)(x)}{h}$ tend vers le réel $u'(x)\,v(x)+u(x)\,v'(x)$ lorsque $h$ tend vers 0.

Et donc $u \times v$ est dérivable sur $I$ et $\forall x \in I$, $(u \times v)'(x)=u'(x)\,v(x)+u(x)\,v'(x)$.

**PROPRIETE :**

Soit $u$ et $v$ deux fonctions définies et dérivables sur un même intervalle $I$.
Alors la fonction $u \times v$ est définie et dérivable sur $I$ et $(u \times v)'=u'v+uv'$.

## III 3 Conséquences de ces deux résultats

### III 3 a Dérivée de $ku$

On applique la propriété de la dérivée d'un produit ; avec une fonction $u$ définie et dérivable sur un intervalle $I$ et une fonction constante $v : x \mapsto k$, avec $k$ réel, $v$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur $I$.
La fonction produit $uv$ est donc définie et dérivable sur $I$.
On sait que la dérivée d'une fonction constante est la fonction nulle, donc $(uv)' = u'v + uv' = u'v$ autrement dit $(ku)' = ku'$.

**PROPRIETE :**

Soit $u$ une fonction définie et dérivable sur un intervalle $I$ et $k$ un nombre réel.
Alors la fonction $ku$ est définie et dérivable sur $I$ et $(ku)' = ku'$.

### III 3 b Dérivée d'une différence

$u - v = u + (-v)$ donc à l'aide des propriétés de la dérivée de $ku$, avec $k = -1$ et de la dérivée d'une somme, on obtient :

**PROPRIETE :**

Soit $u$ et $v$ deux fonctions définies et dérivables sur un même intervalle $I$.
Alors la fonction $u - v$ est définie et dérivable sur $I$ et $(u - v)' = u' - v'$.

### III 3 c Dérivée d'une fonction polynôme

**PROPRIETE : (admise)**

Toute fonction polynôme est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

**Exemple :**

### III 3 d Dérivée de $u^2$ (et plus généralement de $u^n$, HP)

$u^2 = u \times u$ donc en appliquant la propriété de la dérivée d'un produit : $(u^2)' = u'u + u'u = 2u'u$.
Par suite, $u^3 = u^2 \times u$ et donc $(u^3)' = 2u'u \times u + u^2 \times u' = 3u'u^2$. On admet : $\boxed{(u^n)' = nu'u^{n-1}}$ (HP, programme de terminale).

## III 4 Dérivée d'un quotient

### III 4 a Dérivée de l'inverse d'une fonction non nulle

Soit une fonction $u$ définie et dérivable sur un intervalle $I$, telle que $\forall x \in I$, $u(x) \neq 0$.

• Calculons le taux de variation de la fonction $\dfrac{1}{u}$ entre $x$ et $x+h$, avec $h \neq 0$ tel que $x+h \in I$ :

$$\frac{\dfrac{1}{u(x+h)} - \dfrac{1}{u(x)}}{h} = \frac{\dfrac{u(x)}{u(x)\,u(x+h)} - \dfrac{u(x+h)}{u(x+h)\,u(x)}}{h} = \frac{1}{u(x)\,u(x+h)}\;\frac{u(x)-u(x+h)}{h}.$$

• Or $u$ est dérivable sur $I$, donc en tout $x$ de $I$, et lorsque $h$ tend vers 0, $\dfrac{u(x+h)-u(x)}{h}$ tend vers $u'(x)$ qui est un nombre réel.

De plus, on admet que $u(x+h)$ tend vers $u(x)$ lorsque h tend vers 0.(notion implicite de **continuité** d'une fonction en un point)

Donc lorsque $h$ tend vers 0, $\dfrac{\dfrac{1}{u(x+h)} - \dfrac{1}{u(x)}}{h}$ tend vers $-u'(x) \times \dfrac{1}{u(x)\,u(x)} = \dfrac{-u'(x)}{u^2(x)} \in \mathbb{R}$.

Donc $\dfrac{1}{u}$ est dérivable en tout $x \in I$ et $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = \dfrac{-u'}{u^2}$.

**PROPRIETE :**

Soit une fonction $u$ définie et dérivable sur un intervalle $I$, telle que $\forall x \in I$, $u(x) \neq 0$.
Alors $\dfrac{1}{u}$ est définie et dérivable sur $I$ et $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = \dfrac{-u'}{u^2}$.

### III 4 b Dérivée d'un quotient

Soit $u$ et $v$ deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle $I$ et telles que $\forall x \in I,\ v(x) \neq 0$.
Alors $\dfrac{u}{v} = u \times \dfrac{1}{v}$ est définie et dérivable sur $I$ (propriété de la dérivée d'un produit) et :
$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \left(u \times \dfrac{1}{v}\right)' = u' \times \dfrac{1}{v} + u \times \dfrac{-v'}{v^2} = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

**PROPRIETE :**

Soit $u$ et $v$ deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle $I$ et telles que $\forall x \in I,\ v(x) \neq 0$.
Alors $\dfrac{u}{v}$ est définie et dérivable sur $I$ et $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

**Exemple :**

### III 4 c Conséquence : Dérivée d'une fonction rationnelle

**PROPRIETE : (admise)**

Toute fonction rationnelle est dérivable sur chacun des intervalles de son ensemble de définition.

## III 5 Dérivée de $g(ax+b)$

**PROPRIETE :**

Soit $a$ et $b$ deux réels et $a \neq 0$. Soit $g$ une fonction dérivable sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$
et $J$ un intervalle tel que, pour tout $x$ de $J$, $ax+b$ appartient à $I$.

alors la fonction $f$ définie sur $J$ par $f(x) = g(ax+b)$ est **dérivable** sur $J$ **et** $\forall x \in J,\ f'(x) = ag'(ax+b)$.

**Exemple :** Soit la fonction $g$ définie sur $\left[\frac{1}{3}\,;+\infty\right[$ par $g(x) = \sqrt{3x-1}$ .

$g$ peut s'écrire $g(x) = f(3x-1)$ , où $f(t) = \sqrt{t}$ .
Or, pour tout $t > 0$, $f'(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}$ ,
donc, pour tout $x > \dfrac{1}{3}$, g'(x) = $3 \times \dfrac{1}{2\sqrt{3x-1}} = \dfrac{3}{2\sqrt{3x-1}}$ .

## III 6 Tableau récapitulatif des opérations sur les dérivées

| $f$ | $f'$ | Conditions |
|---|---|---|
| $u+v$ | $u'+v'$ | |
| $uv$ | $u'v+uv'$ | |
| $ku$ | $ku'$ | $k$ réel |
| $u-v$ | $u'-v'$ | |
| $\frac{1}{u}$ | $\frac{-u'}{u^2}$ | $u \neq 0$ |
| $\frac{u}{v}$ | $\frac{u'v-v'u}{v^2}$ | $v \neq 0$ |

# IV Lien entre les variations d'une fonction et le signe de sa dérivée

## IV 1 Du sens de variation de la fonction au signe de sa dérivée

**PROPRIETE :**

Soit $f$ une fonction définie et dérivable sur un intervalle $I$.

1. Si $f$ est croissante (ou strictement croissante) sur $I$ alors $\forall x \in I,\ f'(x) \geqslant 0$.
2. Si $f$ est décroissante (ou strictement décroissante) sur $I$ alors $\forall x \in I,\ f'(x) \leqslant 0$.
3. Si $f$ est constante sur $I$ alors $\forall x \in I,\ f'(x) = 0$.

**REMARQUE(S) :**

Si $f$ est **strictement croissante** sur $I$ alors $\forall x \in I,\ f'(x) \geqslant 0$ ( et pas nécessairement $f'(x) > 0$ !).
Un contre exemple est la fonction cube qui est **strictement croissante** et dont la **dérivée s'annule** pourtant en 0.

**DEMONSTRATION :**

On choisit de prouver la première assertion (les autres démonstrations étant analogues) Soit $x$ un réel de $I$ et $h$ un réel non nul tel que $x + h \in I$. f est croissante sur $I$ donc :
• si $h > 0$ alors $x + h > x$ et $f(x + h) \geqslant f(x)$, soit $f(x + h) - f(x) \geqslant 0$.
• si $h < 0$ alors $x + h < x$ et $f(x + h) \leqslant f(x)$, soit $f(x + h) - f(x) \leqslant 0$.
Dans ces deux cas, $f(x + h) - f(x)$ et $h$ sont de même signe donc $\dfrac{f(x + h) - f(x)}{h} \geqslant 0$.

Or $f$ est dérivable en $x$ donc $\dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$ tend vers le nombre réel $f'(x)$ lorsque $h$ tend vers 0.

Si on donne à $h$ des valeurs proches de 0, alors $\dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$ prend des valeurs positives. On admet alors que la limite de ce taux de variation, quand $h$ tend vers 0, est aussi positive, c'est-à-dire $f'(x) \geqslant 0$.

### IV 2 Du signe de la dérivée au sens de variation de la fonction

**PROPRIETE : LA PROPRIETE DU CHAPITRE (admise)**

Soit $f$ une fonction définie et dérivable sur un intervalle $I$.
- Si $f'$ est strictement positive sur $I$, sauf en quelques points **isolés** où $f'(x) = 0$, alors $f$ est strictement croissante sur $I$.
- Si $f'$ est strictement négative sur $I$, sauf en quelques points **isolés** où $f'(x) = 0$, alors $f$ est strictement décroissante sur $I$.
- Si $f'$ est nulle sur $I$, alors $f$ est constante sur $I$.

## V Extremum d'une fonction

### V 1 Extremum local d'une fonction

**DEFINITION : Maximum/minimum global (ou absolu) d'une fonction sur un intervalle (Rappel)**

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$ et soit $x_0$ un réel de $I$.

- $f$ admet un **minimum** en $x_0$ **ssi** pour tout $x \in I$, $f(x) \geqslant f(x_0)$. Ce minimum est $f(x_0)$.
- $f$ admet un **maximum** en $x_0$ **ssi** pour tout $x \in I$, $f(x) \leqslant f(x_0)$. Ce maximum est $f(x_0)$.

**DEFINITION :**

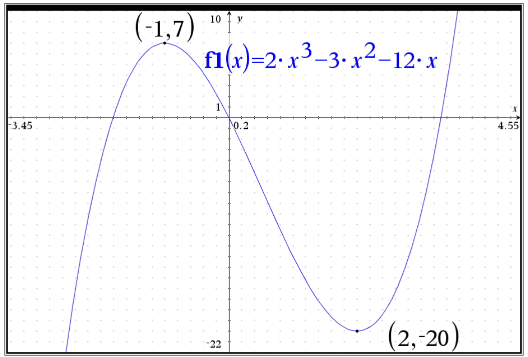
Soit $f$ une fonction définie et dérivable sur un intervalle $I$ et soit $x_0$ un réel de $I$.

- Dire que $f(x_0)$ est un **maximum local** (resp. minimum local) de $f$ signifie qu'il existe un intervalle ouvert $J$ inclus dans $I$ et contenant $x_0$ tel que pour tout réel $x$ de $J$, $f(x) \leqslant f(x_0)$ (resp. $f(x) \geqslant f(x_0)$).
- Dire que $f(x_0)$ est un **extremum local** de $f$ signifie que $f(x_0)$ est un maximum local ou un minimum local de $f$.

**REMARQUE(S) :**

Concrètement, $x_0$ ne peut être une borne de l'intervalle $I$.

**Exemple :** Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$ dont on donne une représentation graphique ci-dessous.




- $f(-1) = 7$ est un **maximum local** de cette fonction $f$
car pour tout $x \in ]-1,5\,;-0,5[$, $f(x) \leqslant 7$.

- $f(2) = -20$ est un **minimum local** de cette fonction $f$
car pour tout $x \in ]1,5\,;2,5[$, $f(x) \geqslant 20$.

**Vocabulaire :** 7 est le maximum local de $f$, **atteint en** -1.

## V 2 Extremum local et fonction dérivée

**PROPRIETE : CN (admise)**

Soit $f$ une fonction définie et dérivable sur un intervalle $I$ et soit $x_0$ un réel de $I$.
Si $f(x_0)$ est un extremum local de $f$ sur $I$ alors $f'(x_0) = 0$.

**REMARQUE(S) :**

1. Si $f(x_0)$ est un extremum local de $f$ sur $I$ alors la courbe représentative de $f$ admet au point d'abscisse $x_0$ une tangente parallèle à l'axe des abscisses.
2. Un **faux** contre-exemple à cette propriété : la fonction valeur absolue en 0.
   En effet, nous savons que $f(0) = 0$ est un minimum local de $f$ sur $\mathbb{R}$ alors que $f'(0) \neq 0$ et cela semble, de prime abord, contredire la propriété.
   Mais c'est oublier que cette fonction ne satisfait pas aux données nécessaires à ce théorème, en effet, $f$ **n'est pas dérivable en 0** !
   Donc on ne peut remettre en cause ce théorème avec cet argument.
3. La **réciproque** de cette propriété est **fausse** !
   **Contrexemple :** la fonction cube ($f : x \mapsto x^3$) en 0, $f'(x) = 3x^2$,
   soit $f'(0) = 0$ et pourtant $f$ n'admet pas d'extremum en 0,
   (On observe un **point d'inflexion** de la courbe représentative de la fonction cube en 0).

**PROPRIETE : CS (admise)**

Soit $f$ une fonction définie et dérivable sur un intervalle $I$ et soit $x_0$ un réel de $I$ qui **n'est pas une borne** de $I$.
Si $f'$ **s'annule en** $x_0$ **en changeant de signe** alors $f(x_0)$ est un extremum local de $f$ sur $I$.