Produit Scalaire dans le plan

Géométrie - Chapitre 3

Table des matières

I Définition

I 1 Norme d'un vecteur

DEFINITION :

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur du plan et$A$ et B deux points du plan tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$.
La **norme** du vecteur $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ est la **longueur du segment** $[AB]$ c'est-à-dire AB, on note $||\overrightarrow{u}|| = ||\overrightarrow{AB}|| = AB$.

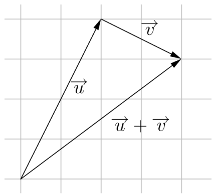
REMARQUE(S) :

On rappelle que dans un RON, si $\overrightarrow{u}(x; y)$ alors $||\overrightarrow{u}|| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

PROPRIETE : (admise)

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan.

1. $\forall k \in \mathbb{R}$, $||k\overrightarrow{u}|| = |k| \times ||\overrightarrow{u}||$. En particulier, $||-\overrightarrow{u}|| = ||\overrightarrow{u}||$.
2. $||\overrightarrow{u}|| = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$
3. **Inégalité triangulaire** : $||\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}|| \leqslant ||\overrightarrow{u}|| + ||\overrightarrow{v}||$ (voir figure)



I 2 Cas particulier : Produit scalaire de deux vecteurs colinéaires (E0)

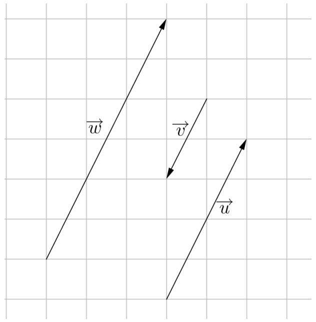
DEFINITION : (E0)

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan **colinéaires**.

si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont **colinéaires de même sens** alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = ||\overrightarrow{u}|| \times ||\overrightarrow{v}||$ (ce ps est donc un réel positif)

si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont **colinéaires de sens contraires** alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = -||\overrightarrow{u}|| \times ||\overrightarrow{v}||$ (ce ps est donc un réel négatif)

Exemple :



Ici, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont **colinéaires de sens opposés** donc $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = -||\overrightarrow{u}|| \times ||\overrightarrow{v}||$.

Et $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w}$ sont **colinéaires de même sens** donc $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} = ||\overrightarrow{u}|| \times ||\overrightarrow{w}||$.

REMARQUE(S) :

Le produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ par lui-même, $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u}$, est appelé carré scalaire de $\overrightarrow{u}$ et noté $\overrightarrow{u}^2$. Par définition, $\overrightarrow{u}^2 = ||\overrightarrow{u}||^2$.

Par suite, pour tous points O et A du plan, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA}^2 = ||\overrightarrow{OA}||^2 = OA^2$

ex 32 p 256

I 3 Produit scalaire de deux vecteurs quelconques (E1)

I 3 a Définition du projeté orthogonal d'un point sur une droite

DEFINITION :

Soit B un point du plan et (d) une droite du plan.
Si $B \notin (d)$, le projeté orthogonal du point B sur une droite (d) est le point B' de (d) tel que les droites (d) et (BB') soient perpendiculaires.
Si $B \in (d)$, son projeté orthogonal sur (d) est lui-même.

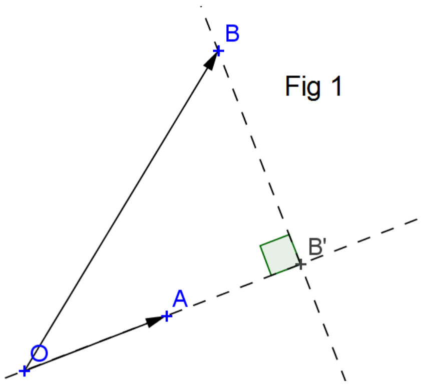
I 3 b Produit scalaire de deux vecteurs quelconques (E1)

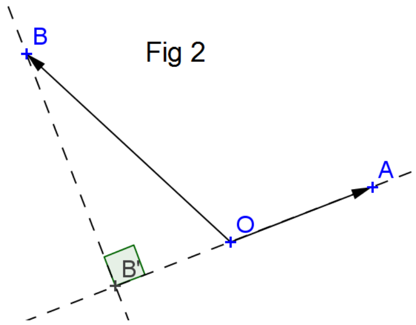
DEFINITION : (E1)

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan et les points O, A et B tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OB}$ (*on choisit des représentants issus d'un même point de ces deux vecteurs*)

On a alors : $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB'}$ avec B' le **projeté orthogonal** de B sur la droite (OA).

PROPRIETE : Conséquence

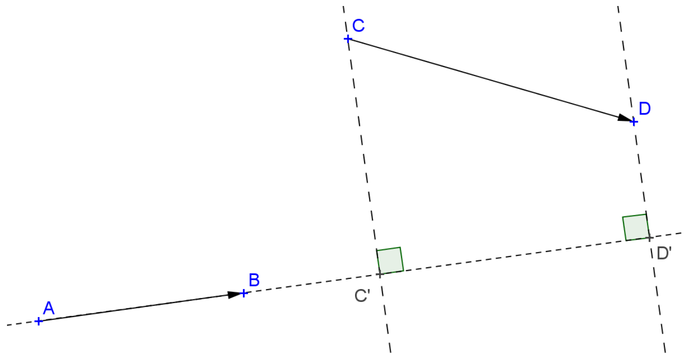




Sur la fig 1 :
$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB'} = OA \times OB'$
(car les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB'}$ sont colinéaires de même sens).

Sur la fig 2 :
$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB'} = -OA \times OB'$
(car les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB'}$ sont colinéaires de sens opposés).

REMARQUE(S) :



Soit A, B, C et D quatre points distincts du plan ; et C' et D' les projetés orthogonaux respectifs de C et D sur (AB).

On a alors : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'D'}$. On dit que $\overrightarrow{C'D'}$ est le **projeté orthogonal** de $\overrightarrow{CD}$ sur (AB).

II Propriétés

II 1 Orthogonalité de deux vecteurs

DEFINITION :

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan. Soit O, A et B trois points du plan tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OB}$.

Dire que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont **orthogonaux** signifie que : * l'un au moins est nul : $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.
OU * si aucun des deux vecteurs n'est nul, on a : $(OA) \perp (OB)$.

PROPRIETE :

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan. $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$.

DEMONSTRATION :

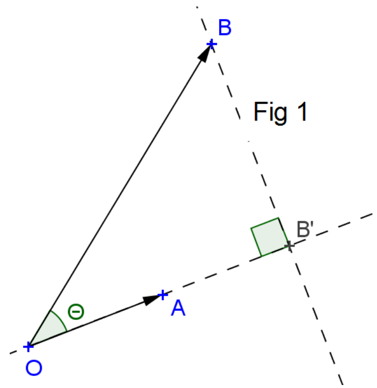
Soit $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OB}$
Implication : On suppose $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$.
* Si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$, alors la norme de l'un des deux vecteurs étant nulle, $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$
* Si $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$, alors $O \neq B$ et $O \neq A$ et $(OA) \perp (OB)$, donc O est le projeté orthogonal de B sur (OA) et donc $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$

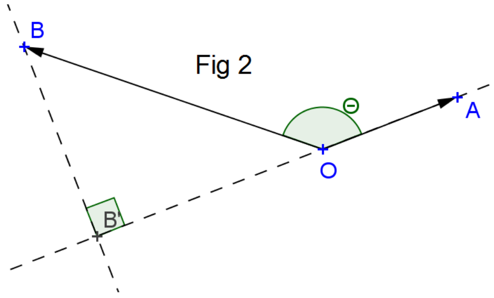
Réciproque : On suppose $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$
* Si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$, alors $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$ (immédiat car le vecteur nul est orthogonal à tous les vecteurs du plan)
* Si $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$, donc $O \neq B$ et $O \neq A$,
soit B' le projeté orthogonal de B sur (OA), on a alors : $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \pm\ OA \times OB'$
donc comme $OA \neq 0$, on a $OB' = 0$, soit $O = B'$, donc $O = B$ (interdit ici) ou $(OA) \perp (OB)$, et par conséquent $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$.

REMARQUE(S) :

Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. ATTENTION, la **réciproque est FAUSSE** !

II 2 Autre expression (E2) du produit scalaire de deux vecteurs non nuls





On pose : $\theta = \widehat{AOB}$
Fig 1 : $\vec{u} \cdot \vec{v} = OA \times OB' = OA \times OB \times \cos\theta$
et **Fig 2 :** $\vec{u} \cdot \vec{v} = -OA \times OB' = -OA \times OB \times \cos(\pi - \theta) = -OA \times OB \times (-\cos\theta) = OA \times OB \times \cos\theta$

PROPRIETE : (E2)

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs **NON NULS** du plan. Soit O, A et B trois points du plan tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = ||\overrightarrow{OA}|| \times ||\overrightarrow{OB}|| \times \cos\widehat{AOB} = OA \times OB \times \cos\widehat{AOB}$

soit, en notant $(\vec{u}, \vec{v})$ l'angle orienté entre les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (cet angle est associé à un sens),

$\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$

II 3 Symétrie du PS

PROPRIETE :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. On a $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$.
(On peut donc parler du PS de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, au lieu du PS de $\vec{u}$ par $\vec{v}$.)

II 4 Linéarité du PS et conséquences : expressions du PS avec les normes (E3, bis et ter)

PROPRIETE :

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ et tout nombre réel k, on a :

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w} \qquad (k\vec{u})\cdot\vec{v}=k(\vec{u}\cdot\vec{v})=k\ \vec{u}\cdot\vec{v}$$

PROPRIETE : Conséquences (preuves immédiates)

1. Pour tous points A, B et C du plan, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}=-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$
2. Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ du plan :
   (a) $(\vec{u}+\vec{v})^2=\vec{u}^2+2\ \vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2$ càd $||\vec{u}+\vec{v}||^2=||\vec{u}||^2+2\ \vec{u}\cdot\vec{v}+||\vec{v}||^2$
   (b) $(\vec{u}-\vec{v})^2=\vec{u}^2-2\ \vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2$ càd $||\vec{u}-\vec{v}||^2=||\vec{u}||^2-2\ \vec{u}\cdot\vec{v}+||\vec{v}||^2$
   (c) $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=\vec{u}^2-\vec{v}^2$ càd $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=||\vec{u}||^2-||\vec{v}||^2$

PROPRIETE : Formules de polarisation (Propriétés E3, E3bis et E3ter)

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right) \qquad \vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$$

On apprend : $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left[(\vec{u}+\vec{v})^2-\vec{u}^2-\vec{v}^2\right]$ et $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left[\vec{u}^2+\vec{v}^2-(\vec{u}-\vec{v})^2\right]$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$$

II 5 Expression analytique du PS dans un RON (E4)

PROPRIETE : (E4)

Soit $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un **repère orthonormé**, et $\vec{u}(x\,;y)$ et $\vec{v}(x'\,;y')$ deux vecteurs. On a alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'$.

PROPRIETE : Conséquence

$\vec{u} \perp \vec{v}$ ssi $xx' + yy' = 0$.

II 6 Preuves de 3 et 4 en utilisant E4

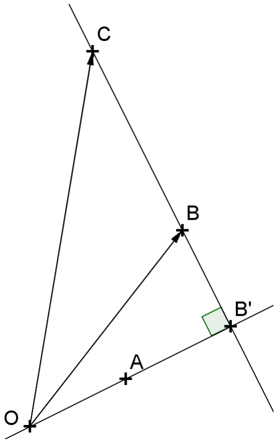
Si $\vec{u}(x\,;y)$, $\vec{v}(x'\,;y')$ et $\vec{w}(c\,;d)$ dans un RON $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'$ et $\vec{v}\cdot\vec{u} = x'x + y'y$

$\vec{v}+\vec{w}\ \ (x'+c\,;y'+d)$ donc $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = x(x'+c)+y(y'+d) = xx'+xc+yy'+yd = (xx'+yy')+(xc+yd) = \vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$

$k\vec{u}\ \ (kx\,;ky)$ et $(k\vec{u})\cdot\vec{v} = kxx' + kyy'$

REMARQUE(S) :

Très important



$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA}$ n'implique pas $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$!

ex 1 à 4, 6-7, 31, 45, 46, 49 p 247

III Applications du produit scalaire en géométrie analytique dans un RON

III 1 Équation d'une droite

Dans cette partie, le plan est muni d'un repère $(O\,;\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$.

III 1 a Rappel : Équation cartésienne d'une droite

DEFINITION :

Une équation de droite est une **égalité** vérifiée par les coordonnées x et y de tous les points de cette droite.
Dire qu'un point appartient à une droite, c'est dire que ses coordonnées vérifient l'équation de cette droite.

PROPRIETE :

Soit a et b deux réels tels que $(a\,;b) \neq (0\,;0)$.
1) **Toute** droite du plan admet une équation de la forme $ax + by + c = 0$.

Et **réciproquement** :
2) **Toute** relation de la forme $ax + by + c = 0$ **est une équation de droite**.

DEFINITION :

Soit a et b deux réels avec $(a\,;b) \neq (0\,;0)$. Une équation de la forme $\boxed{ax + by + c = 0}$ est une **équation cartésienne** de droite.

REMARQUE(S) :

Soit a et b deux réels tels que $(a\,;b) \neq (0\,;0)$. Une droite admet une **infinité** d'équations cartésiennes.
En effet, pour tout réel k non nul, la droite d'équation cartésienne $ax+by+c=0$, admet également comme équation cartésienne $akx+bky+ck=0$.

Exemple : Le point $A(3;-2)$ appartient à la droite D d'équation $x+4y+5=0$ car : $3+4\times(-2)+5=3-8+5=0$.

III 1 b Rappel : Équation réduite

PROPRIETE : et définition (droite parallèle à l'axe des ordonnées)

Soit a et b deux réels tels que $(a\,;b) \neq (0\,;0)$. Soit d la droite d'équation cartésienne $ax+by+c=0$.

Si $b=0$ alors la droite d est **parallèle à l'axe des ordonnées** et admet une équation appelée **équation réduite** de la forme $\boxed{x=k}$, $k \in \mathbb{R}$.

Cette équation réduite est **unique**.

PROPRIETE : et définition (droite NON parallèle à l'axe des ordonnées)

Soit a et b deux réels tels que $\boxed{b \neq 0}$.

La droite d, d'équation cartésienne $ax+by+c=0$, admet une **unique** équation de la forme $\boxed{y=mx+p}$.

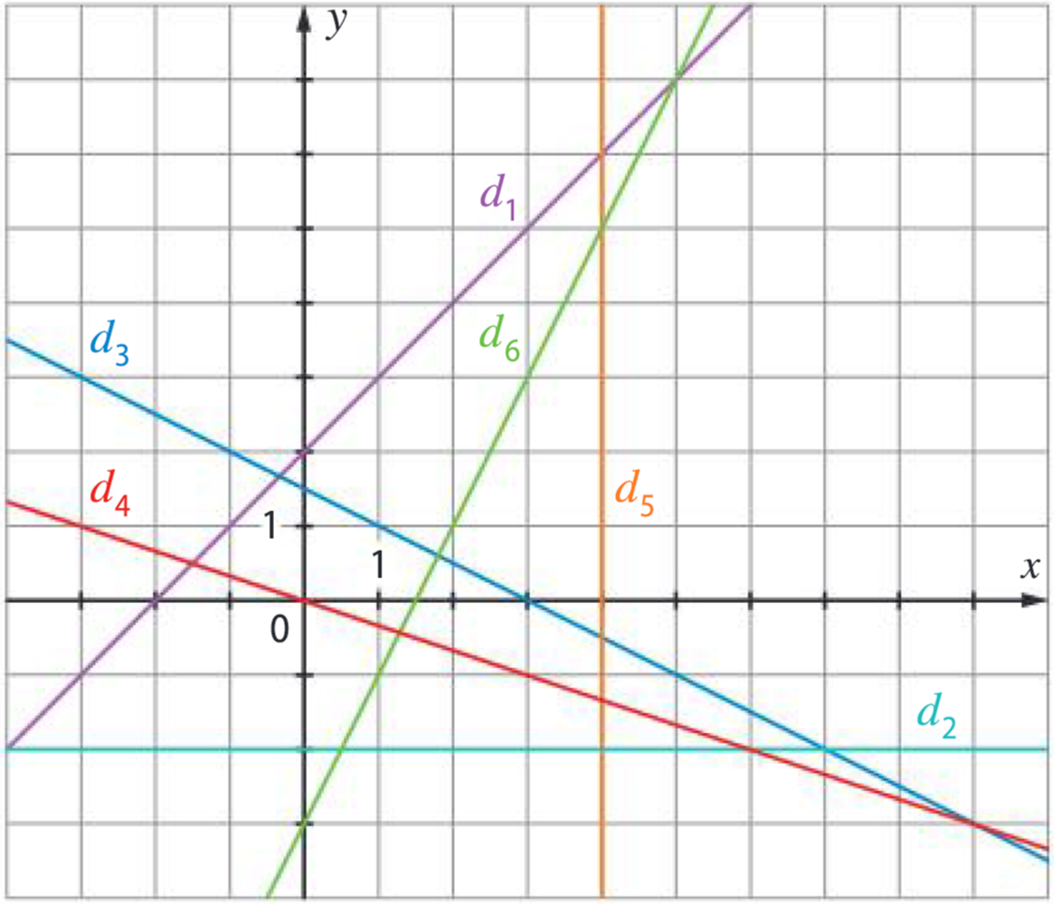
Cette équation est appelée **équation réduite** de d, le réel m est le **coefficient directeur** de d et p est son **ordonnée à l'origine**.

PROPRIETE :

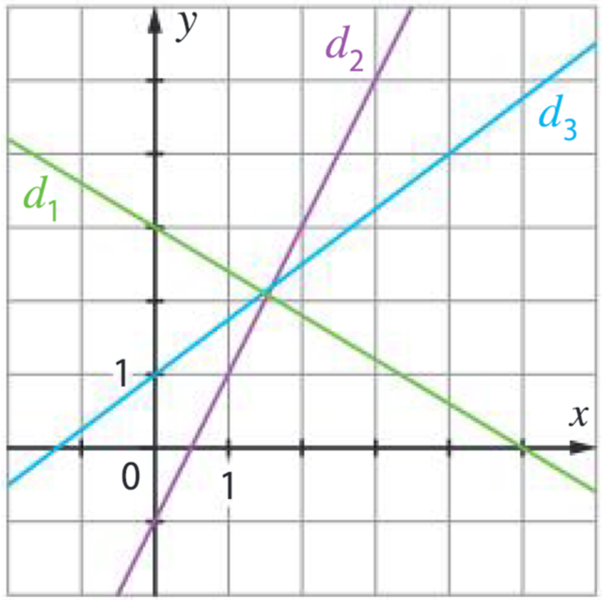
Soit A et B deux points de coordonnées respectives $(x_A\,;y_A)$ et $(x_B\,;y_B)$, avec $x_A \neq x_B$.

Le coefficient directeur de la droite (AB) est $\boxed{m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}}$.

Exercice 1 : Déterminer une équation cartésienne de chaque droite représentée. Si cela est possible donner également le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine.



Exercice 2 : Même énoncé.



Exercice 3 : Soit les points $A(3\ ;2)$, $B(-1\ ;2)$ et $C(3\ ;6)$. Déterminer une équation cartésienne de chacune des droites (AB), (AC) et (BC).

III 1 c Rappel : Vecteur directeur

PROPRIETE :

Soit a et b deux réels tels que $(a\,;b) \neq (0\,;0)$.

Le vecteur de coordonnées $(-b; a)$ est **un** vecteur directeur de toute droite d'équation $ax + by + c = 0$.

Exercice 4 :
Soit les droites (d_1) d'équation $3x - 2y + 7 = 0$, (d_2) d'équation $5x + 2 = 0$ et (d_3) d'équation $5 - 2y = 0$.
Déterminer les coordonnées d'un vecteur directeur de chaque droite.
Donner l'équation réduite de chaque droite.

Exercice 5 :
Dans le plan muni d'un repère, on considère les points $A(-4\,;3)$, $B(2\,;-1)$, $C(3\,;2)$ et un vecteur $\overrightarrow{u}(3\,;1)$.

1. Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB).
2. Déterminer une équation cartésienne de la droite d_1 passant par C et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$.
3. Déterminer une équation cartésienne de la droite d_2 passant par C et parallèle à la droite (AB).

Ex 3 :

- $M(x\,;y) \in (AB) \Longleftrightarrow \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-3 \\ y-2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -1-3 \\ 2-2 \end{pmatrix}$ sont **colinéaires**.

$\Longleftrightarrow$ det$(\overrightarrow{AM}\,;\overrightarrow{AB}) = 0$

$\Longleftrightarrow \begin{vmatrix} x-3 & -4 \\ y-2 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$\Longleftrightarrow 0(x-3) - (-4)(y-2) = 0$

$\Longleftrightarrow y - 2 = 0$, **une** équation **cartésienne** de la droite (AB).

$\Longleftrightarrow y = 2$, **l'**équation **réduite** de la droite (AB).

- $M(x\,;y) \in (AC) \Longleftrightarrow \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-3 \\ y-2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 3-3 \\ 6-2 \end{pmatrix}$ sont **colinéaires**.

$\Longleftrightarrow$ det$(\overrightarrow{AM}\,;\overrightarrow{AC}) = 0$

$\Longleftrightarrow \begin{vmatrix} x-3 & 0 \\ y-2 & 4 \end{vmatrix} = 0$

$\Longleftrightarrow 4(x-3) - 0(y-2) = 0$

$\Longleftrightarrow x - 3 = 0$, **une** équation **cartésienne** de la droite (AC).

• $M(x\,;y) \in (BC) \Longleftrightarrow \overrightarrow{BM}\begin{pmatrix} x+1 \\ y-2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 3+1 \\ 6-2 \end{pmatrix}$ sont **colinéaires**.

$\Longleftrightarrow \det(\overrightarrow{BM}\,;\overrightarrow{BC}) = 0$

$\Longleftrightarrow \begin{vmatrix} x+1 & 4 \\ y-2 & 4 \end{vmatrix} = 0$

$\Longleftrightarrow 4(x+1) - 4(y-2) = 0$

$\Longleftrightarrow x - y + 3 = 0$, **une** équation **cartésienne** de la droite (BC).

Ex 4 :

• La droite (d_1) d'équation $3x - 2y + 7 = 0$ admet le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ comme vecteur directeur.

L'équation réduite de la droite (d_1) est $y = \dfrac{3}{2}x + \dfrac{7}{2}$.

• La droite (d_2) d'équation $5x + 2 = 0$ est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. L'équation réduite de la droite (d_2) est $x = \dfrac{-2}{5}$.

• La droite (d_3) d'équation $5 - 2y = 0$ est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Son équation réduite est $y = \dfrac{5}{2}$.

Ex 5 :
Dans le plan muni d'un repère, on considère les points $A(-4\,;3)$, $B(2\,;-1)$, $C(3\,;2)$ et un vecteur $\overrightarrow{u}(3\,;1)$.

1. $M(x\,;y) \in (AB) \iff \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x+4 \\ y-3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2+4 \\ -1-3 \end{pmatrix}$ sont **colinéaires**.

$$\iff \text{det}(\overrightarrow{AM}\,;\overrightarrow{AB}) = 0$$

$$\iff \begin{vmatrix} x+4 & 6 \\ y-3 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\iff -4(x+4) - 6(y-3) = 0$$

$$\iff 2(x+4) + 3(y-3) = 0$$

$\iff 2x + 3y - 1 = 0$, **une** équation **cartésienne** de la droite (AB).

2. d_1 passe par C et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$M(x\,;y) \in (d_1) \iff \overrightarrow{CM}\begin{pmatrix} x-3 \\ y-2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont **colinéaires**.

$$\iff \text{det}(\overrightarrow{CM}\,;\overrightarrow{u}) = 0$$

$$\iff \begin{vmatrix} x-3 & 3 \\ y-2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\iff (x-3) - 3(y-2) = 0$$

$\iff x - 3y + 3 = 0$, **une** équation **cartésienne** de la droite (d_1).

3. d_2 passe par C et de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}$.

$M(x\,;y) \in (d_2) \iff \overrightarrow{CM}\begin{pmatrix} x-3 \\ y-2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}$ sont **colinéaires**.

$\iff \det(\overrightarrow{CM}\,;\overrightarrow{AB}) = 0$

$\iff \begin{vmatrix} x-3 & 6 \\ y-2 & -4 \end{vmatrix} = 0$

$\iff -4(x-3) - 6(y-2) = 0$

$\iff 2x + 3y - 12 = 0$, **une** équation **cartésienne** de la droite (d_2).

III 1 d Définition d'un vecteur normal à une droite

DEFINITION :

On appelle **vecteur normal** à une droite D, tout vecteur **non nul orthogonal à un vecteur directeur** de D.

PROPRIETE : Conséquence

Soit une droite passant par un point A du plan et de vecteur normal $\overrightarrow{n}$. La droite D est **l'ensemble des points** M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0$.

III 1 e Équation d'une droite

Dans un RON $(O\,;\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath})$, soit D la droite passant par $A(\alpha\,;\beta)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}(a,b)$ ($\overrightarrow{n}$ étant un vecteur normal, il ne peut être nul donc a et b ne sont donc pas simultanément nul) :

$$\begin{aligned} M(x,y) \in \text{D} \text{ ssi } & \overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{n} \\ \text{ssi } & \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0 \\ \text{ssi } & a(x-\alpha) + b(y-\beta) = 0 \\ \text{ssi } & \boxed{ax + by + (-a\alpha - b\beta) = 0} \end{aligned}$$

En posant $c = -a\alpha - b\beta$, on reconnaît l'équation cartésienne de la droite D.

PROPRIETE :

Soit un RON $(O\,;\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath})$ et a, b des nombres réels tels que $(a\,;b) \neq (0\,;0)$.

Une droite de vecteur normal $\overrightarrow{n}(a,b)$ admet une équation cartésienne de la forme : $ax + by + c = 0$ ($c \in \mathbb{R}$).
Et **réciproquement** : Si une droite D a pour équation cartésienne $ax + by + c = 0$ ($c \in \mathbb{R}$) alors $\overrightarrow{n}(a,b)$ est un vecteur normal à D.

Exemples : Dans un RON $(O\,;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$,
1) Déterminer une équation de la droite D passant par $A(2\,;-3)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}(-4,5)$.

2) Soit $A(1,-2)$ et D d'équation $y=-2x-3$.
Déterminer une équation de la droite Δ passant par A et perpendiculaire à D.

1) $M(x,y) \in$ D ssi $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-2 \\ y+3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}$ sont orthogonaux.

ssi $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0$
ssi $-4(x-2)+5(y+3)=0$
ssi $\boxed{-4x+5y+23=0}$

Une équation cartésienne de D est donc $\boxed{-4x+5y+23=0}$.

2) Comme D a pour équation $y=-2x-3$, $\overrightarrow{n}(2,1)$ est un vecteur **normal** à D et sachant que $\Delta \perp$D, $\overrightarrow{n}(2,1)$ est un vecteur **directeur** de Δ.

$M(x\,;y) \in (\Delta) \Longleftrightarrow \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-1 \\ y+2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont **colinéaires**.

$\Longleftrightarrow$ det$(\overrightarrow{AM}\,;\overrightarrow{n}) = 0$

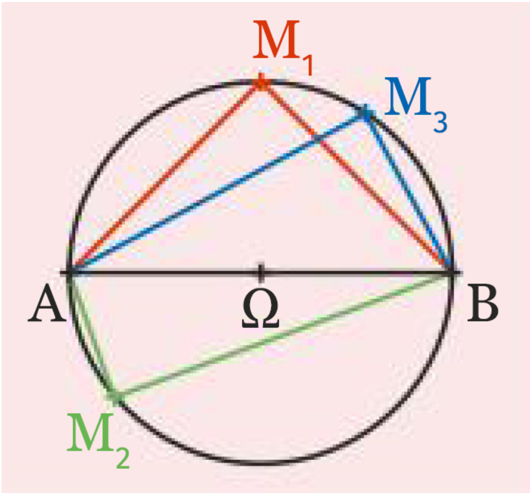
$$\Longleftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 2 \\ y+2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$\Longleftrightarrow 1(x-1)-2(y+2)=0$

$\Longleftrightarrow x-2y-5=0$, **une** équation **cartésienne** de la droite (Δ).

III 2 Équation d'un cercle

III 2 a Cercle caractérisé par son diamètre



Soit A et B deux points quelconques du plan.
M appartient au cercle C de diamètre $[AB] \iff M = A$ ou $M = B$ ou $(MA) \perp (MB)$.

$$\iff \overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{MB}$$

$$\iff \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$$

PROPRIETE :

Le cercle de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

Exemple : Dans un RON $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, soit $A(1\,;2)$ et $B(-3\,;1)$ et $\mathcal{C}$ le cercle de diamètre $[AB]$. Déterminer l'équation de ce cercle.

$M(x\,;y) \in \mathcal{C} \iff M = A$ ou $M = B$ ou $(MA) \perp (MB)$.

$$\iff \overrightarrow{MA}\begin{pmatrix}1-x\\2-y\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{MB}\begin{pmatrix}-3-x\\1-y\end{pmatrix} \text{ sont orthogonaux.}$$

$$\iff \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 0$$

$$\iff (1-x)(-3-x)+(2-y)(1-y)=0 \text{ (Dans un RON !)}$$

$$\iff x^2+y^2+2x-3y-1=0.$$

III 2 b Cercle caractérisé par son centre et son rayon

DEFINITION :

Soit Ω un point du plan et soit R un nombre réel positif.
Le **cercle** de centre Ω et de rayon R est l'ensemble des points M du plan tels que $\Omega M = R$.

Dans un RON $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, si $\Omega(x_\Omega;y_\Omega)$ et $M(x\,;y)$ alors $\Omega M = \sqrt{(x-x_\Omega)^2+(y-y_\Omega)^2}$ et donc

$\Omega M = R \Leftrightarrow \Omega M^2 = R^2$ (les longueurs sont des nombres réels **positifs**)
$\Omega M = R \Leftrightarrow (x-x_\Omega)^2+(y-y_\Omega)^2 = R^2$

PROPRIETE :

Soit Ω un point du plan et soit R un nombre réel positif. Une équation du cercle C de centre $\Omega(x_\Omega;y_\Omega)$ et de rayon R est :
$\boxed{(x-x_\Omega)^2+(y-y_\Omega)^2 = R^2}$

Exemples :
1) Reprise de l'exemple précédent et déterminer les coordonnées du centre et le rayon de ce cercle.

2) Déterminer l'ensemble des points du plan dont les coordonnées vérifient l'équation $x^2-4x+y^2+6y+13=0$.

3) Déterminer l'ensemble des points du plan dont les coordonnées vérifient l'équation $x^2+6x+y^2-10y+35=0$.

Correction :

1) $x^2+2x+y^2-3y-1=(x+1)^2-1+\left(y-\dfrac{3}{2}\right)^2-\left(\dfrac{3}{2}\right)^2-1=(x+1)^2+\left(y-\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{17}{4}$

Ainsi, $x^2+2x+y^2-3y-1=0 \iff (x+1)^2+\left(y-\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{17}{4}$

Il s'agit donc du cercle de centre $\Omega\begin{pmatrix}-1\\ \dfrac{3}{2}\end{pmatrix}$ et de rayon $\dfrac{\sqrt{17}}{2}$.

2) $x^2-4x+y^2+6y+13=(x-2)^2-4+(y+3)^2-9+13=(x-2)^2+(y+3)^2$.

Donc $x^2-4x+y^2+6y+13=0 \iff (x-2)^2+(y+3)^2=0$ (équation d'un cercle de centre $A(2\,;-3)$ et de rayon égal à 0).

Donc l'ensemble des points du plan dont les coordonnées vérifient l'équation $x^2-4x+y^2+6y+13=0$ est donc réduit au point $A(2\,;-3)$.

3) $x^2+6x+y^2-10y+35=(x+3)^2-9+(y-5)^2-25+35=(x+3)^2+(y-5)^2+1$.

Donc $x^2+6x+y^2-10y+35=0 \iff (x+3)^2+(y-5)^2=-1$.

Or $\forall x\in\mathbb{R}$, $(x+3)^2\geqslant 0$ et $\forall y\in\mathbb{R}$, $(y-5)^2\geqslant 0$, donc par somme, $(x+3)^2+(y-5)^2\geqslant 0$. Tandis que $-1<0$.

Il n'y a donc aucun point du plan dont les coordonnées vérifient cette équation. Cet ensemble est donc l'ensemble vide.

IV Applications du produit scalaire pour le calcul de longueurs et de mesures d'angles

act 4 p 245

IV 1 Théorème de la médiane

PROPRIETE :

Soit A, B deux points du plan et I le milieu du segment $[AB]$.

Pour tout point M du plan, on a : $MA^2 + MB^2 = 2\ MI^2 + \dfrac{1}{2}\ AB^2$, $MA^2 - MB^2 = 2\ \overrightarrow{IM}\ .\ \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MA}\ .\ \overrightarrow{MB} = MI^2 - \dfrac{AB^2}{4}$

DEMONSTRATION :

$MA^2 + MB^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 = 2MI^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) + IA^2 + IB^2 = 2MI^2 + \dfrac{1}{2}AB^2.$

$MA^2 - MB^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 - (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 = 2\overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB}) = 2\ \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{BA}.$

$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}) = MI^2 - IA^2 = MI^2 - \dfrac{AB^2}{4}$

PROPRIETE : Rappel : Ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

Soit A, B deux points du plan et I le milieu du segment $[AB]$.
L'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ est le cercle de diamètre $[AB]$.

DEMONSTRATION :

$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \Leftrightarrow MI^2 - \dfrac{AB^2}{4} = 0 \Leftrightarrow MI^2 = \dfrac{AB^2}{4} \Leftrightarrow MI = \dfrac{AB}{2}$ (longueurs positives). Donc M appartient au cercle de centre I et de rayon $\dfrac{AB}{2}$.

ex 100

IV 2 Théorème d'Al-Kashi

PROPRIETE :

Soit ABC un triangle quelconque. On a alors :
$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \times AC \times BC \times \cos \widehat{ACB}$ $\quad AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \times AB \times BC \times \cos \widehat{ABC}$ $\quad BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos \widehat{CAB}$

DEMONSTRATION :

$AB^2 = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB})^2 = (-\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})^2 = AC^2 + BC^2 - 2\,\overrightarrow{CA}\,.\,\overrightarrow{CB} = AC^2 + BC^2 - 2 \times AC \times BC \times \cos \widehat{ACB}$