Exemple 1 :
On lance une pièce de monnaie. Si on obtient pile, on gagne 5 euros et si on obtient face, on gagne 2 euros.
On peut alors définir une variable aléatoire X correspondant au gain obtenu en euros.
X est définie sur l'univers $\Omega = \{\text{pile}; \text{face}\}$.
On a alors $X(\text{pile}) = 5$ et $X(\text{face}) = 2$. X peut donc prendre les valeurs 5 et 2.

Exemple 2 : On lance un dé cubique classique équilibré. Si la face 6 sort alors on gagne 5 euros, sinon on perd 1 euro.
Soit X la variable aléatoire associant aux issues de l'expérience leur gain algébrique.
On a donc $X(6) = 5$ et $X(1) = X(2) = X(3) = X(4) = X(5) = -1$
Ainsi $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ et $E = \{5; -1\}$

Exercice 1

En période de réglage de ses machines, le contrôleur qualité d'une entreprise effectue de nombreux prélèvements dans la production et relève, pour chaque pièce, si elle a un défaut A, un ou deux défauts B. Compte-tenu du grand nombre de pièces prélevées, les fréquences indiquées dans ce tableau peuvent être assimilées à des probabilités.
X (resp. Y) est la variable aléatoire qui compte le nombre de défauts A (resp. B).

X ↓ et Y →	0	1	2
0	0,07	0,18	0,17
1	0,15	0,20	0,23

1. A partir de ces données, déterminer la loi de probabilité de X.
2. A partir de ces données, déterminer la loi de probabilité de Y.
3. A partir de ces données, déterminer la loi de probabilité de S=X+Y.

Exercice 2

Une urne contient six boules : trois vertes, numérotées 1, 2 et 3 et trois rouges, numérotées 5, 6 et 7. On effectue un tirage au hasard d'une boule dans cette urne. Soit X la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si la boule est verte et 10 si elle est rouge. Soit Y la variable aléatoire qui prend la valeur du numéro inscrit sur la boule tirée.

1. Donner les valeurs prises par la variable aléatoire X.
2. Donner les valeurs prises par la variable aléatoire Y.
3. Donner les valeurs prises par la variable aléatoire $Z = X + Y$.

Exercice 3

On lance 5 dés équilibrés et on compte la somme des nombres obtenus.
Soit X la variable aléatoire correspondant à cette somme.
On peut écrire X sous la forme $X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5$ où X_k (pour $k \in \{1; 2; 3; 4; 5\}$) correspond au résultat du dé numéroté k.

1. Quel est l'ensemble des valeurs prises par X ?
2. Calculer l'espérance de X.
3. Si maintenant on pose $Y = 5X_1$. Quel est l'ensemble des valeurs prises par Y ?
4. Calculer l'espérance de Y.

Exercice 4

On joue à un jeu se déroulant en deux étapes.
Dans la phase 1, on lance un dé équilibré à six faces.
Si le résultat obtenu est 1 ou 6 alors on gagne 9 points ; sinon on perd 6 points.

Dans la phase 2, on lance une pièce équilibrée. Si on obtient face, on gagne 6 points ; sinon on perd 2 points.

Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre total de points obtenus.
Calculer de deux manières différentes $E(X)$.

Exercice 5

Reprendre les exemples précédents et calculer la variance de chaque VA.

Exercice 6 (Résolu)

En 2015, le salaire brut mensuel moyen en France était de 2 442 euros.
On choisit un salarié au hasard et on note X la VA donnant son salaire.

....

Les salaires étant positifs ou nuls, on sait que X est une VA positive ou nulle et on peut donc appliquer l'inégalité de Markov sur un exemple :

$$P(X \geqslant 3 \times 2442) \leqslant \frac{2442}{3 \times 2442} \text{ soit } P(X \geqslant 3 \times 2442) \leqslant \frac{1}{3}.$$

La probabilité que le salaire brut mensuel d'un français soit supérieure ou égale à 3 fois le salaire moyen est donc inférieure ou égale à $\frac{1}{3}$.

Exercice 7

Une usine produit en moyenne 35 pièces par semaine.
On note X la VA donnant le nombre de pièces produites par semaine.
Que peut-on dire de la probabilité que l'usine produise plus de 70 pièces par semaine ?

Exercice 8 (Résolu)

Le taux moyen de glycémie dans une population est de 1g.L^{-1} avec une variance de 0,1.
Une personne présente un taux X critique si son taux ne se situe pas dans l'intervalle $]0,5\,;1,5[$.

....

Cet événement se traduit par l'inégalité $|X - E(X)| \geqslant 0,5$.

Sa probabilité vérifie donc $P(|X - E(X)| \geqslant 0,5) \leqslant \dfrac{0,1}{0,5^2}$ soit $P(|X - E(X)| \geqslant 0,5) \leqslant 0,4$.

Ainsi la probabilité qu'une personne présente un taux critique est inférieure ou égale à 0,4.

Exercice 9

Lors d'une saison de football, le nombre moyen de buts par match est de 2,5 avec une variance de 1,1.
Majorer la probabilité que le match suivant ne se termine pas par 2 ou 3 buts.

Exercice 10

On lance 100 fois un dé équilibré tétraédrique, numéroté de 1 à 4. On observe la face cachée du dé et le succès est obtenu lorsque cette face est celle numérotée 4. Étudier $P(21 \leqslant S_n \leqslant 29)$ en utilisant l'inégalité de BT.

Exercice 11

On effectue n lancers successifs supposés indépendants d'une pièce équilibrée.
On associe à chaque lancer i la variable aléatoire X_i prenant la valeur 0 si on obtient face et 1 si on obtient pile.
On pose $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$ la variable aléatoire donnant le nombre de piles obtenu lors de ces n lancers.
On pose $M_n = \dfrac{S_n}{n}$.

1. Donner la loi de probabilité de X_i (pour i entier entre 1 et n).
2. Déterminer l'espérance $E(X_i)$ et la variance $V(X_i)$.
3. Appliquer l'inégalité de concentration avec $n = 10\ 000$ et $a = 0,01$ et interpréter ce résultat.
4. On souhaite maintenant que l'écart entre la proportion de pile obtenu et $\dfrac{1}{2}$ soit inférieur ou égal à 0,01.
   Quelle est la valeur minimale de n pour que le risque d'erreur soit inférieur ou égal à 5% ?