Exercice 1 - Activité -

Dans une entreprise on dispose de $5\ 000$ euros pour le salaire de 5 personnes.
Soit 3 manières A, B et C pour répartir ces $5\ 000$ euros entre ces 5 personnes.

Calculer la moyenne, la variance et l'écart-type de ces 3 répartitions des salaires.

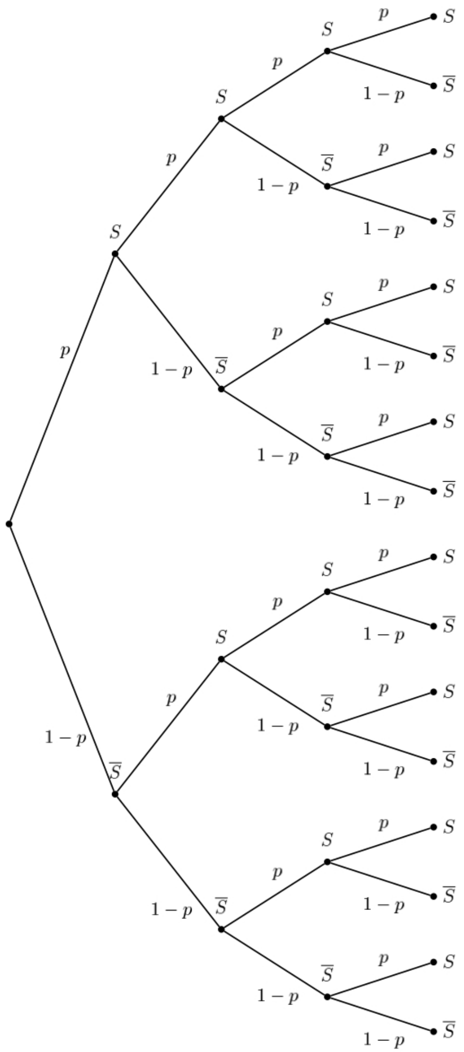
	A	B	C
Personne 1	$1\ 000$	800	200
Personne 2	$1\ 000$	900	800
Personne 3	$1\ 000$	$1\ 000$	$1\ 000$
Personne 4	$1\ 000$	$1\ 100$	$1\ 200$
Personne 5	$1\ 000$	$1\ 200$	$1\ 800$

Exercice 2 - Problématique -

On lance vingt fois de suite, dans les mêmes conditions, un dé bien équilibré à 6 faces.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir 20 fois la face 6 sur les 20 lancers ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir 0 fois la face 6 sur les 20 lancers ?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir 4 fois la face 6 sur les 20 lancers ?

Exemple :
Considérons un schéma de Bernoulli constitué de la répétition de 4 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. On pose $p = P(S)$ où S est le succès de l'épreuve de Bernoulli.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de succès obtenus parmi les 4 épreuves.
Cette situation peut être représentée par l'arbre ci-après :



- $P(X = 4) = p^4$

- $P(X = 0) = (1-p)^4$

- $P(X = 1)$:
L'événement $X = 1$ est réalisé par **quatre** chemins différents de l'arbre.
Chaque chemin comporte 1 succès parmi 4 épreuves.
Ce nombre de chemins est $\binom{4}{1}$. On a $\binom{4}{1} = 4$.
On remarque que chacun de ces chemins a la même probabilité : $p(1-p)^3$

Ainsi : $P(X = 1) = \binom{4}{1} \times p \times (1-p)^3 = 4p(1-p)^3$.

- $P(X = 2) = \binom{4}{2} \times p^2 \times (1-p)^2 = 6p^2(1-p)^2$.

- $P(X = 3) = \binom{4}{3} \times p^3 \times (1-p) = 4p^3(1-p)$.

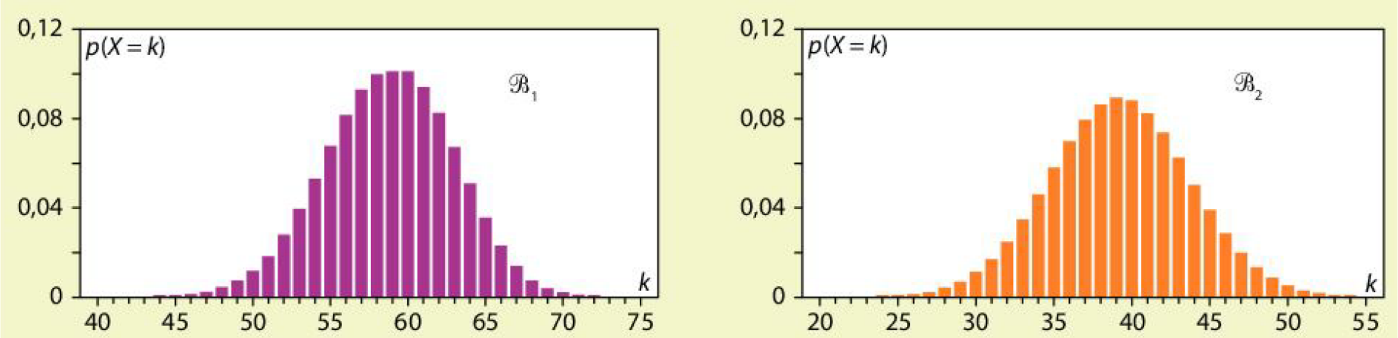
On a ainsi déterminer la loi de probabilité de X.

On peut vérifier que $\sum_{k=0}^{4} P(X = k) = 1$ (formule du binôme de Newton).

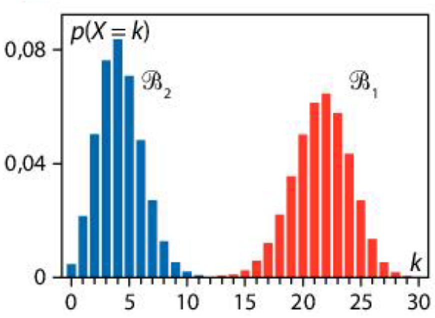
Exercice 3

A) On donne les diagrammes en barres associés à deux lois binomiales B_1 (à gauche) et B_2 (à droite).

1. Soit X_1 la variable aléatoire suivant la loi B_1. Estimer graphiquement $E(X_1)$.
2. Les paramètres de B_1 sont $p_1 = 0,74$ et n_1. Déterminer une valeur possible pour n_1.
3. B_2 admet pour paramètres $n_2 = n_1$ (celle déterminée à la question précédente) et p_2.
   L'écart-type associé à la loi B_2 est-il plus ou moins grand que celui associé à la loi B_1 ?



B) On donne les diagrammes en bâtons associés à deux lois binomiales B_1 et B_2 de paramètres $n = 30$ et p inconnu. Laquelle a la plus grande espérance ? Le plus grand écart-type ?



Exercice 4

On considère la variable aléatoire X qui suit la loi binomiale $B(n\,;p)$ avec $n = 40$ et $p = 0,38$.
Dans chaque cas, déterminer les entiers a ou b vérifiant $P(a \leqslant X \leqslant b) \geqslant 0,95$ et la condition donnée.

1. On pose $a = 0$ et on cherche le plus petit entier b qui puisse convenir.
2. On pose $b = 40$ et on cherche le plus grand entier a qui puisse convenir.
3. On cherche l'intervalle $[a\,;b]$ de plus petite amplitude possible tel que $P(X \leqslant a) \approx P(X \geqslant b)$ (arrondir à 10^{-3}).

Exercice 5

Une société de vente en ligne de matériel de jardinage propose à ses clients des lots de 80 asperseurs.
Une étude a montré que 5% des asperseurs vendus sont défectueux.
On choisit un lot au hasard et on note X la variable aléatoire qui compte le nombre d'asperseurs défectueux sur les 80 du lot.

1. Modéliser la situation par une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. **Cas particulier :** la société souhaite déterminer le plus petit nombre entier naturel k tel que $P(X \leqslant k) \geqslant 0,95$.
   Déterminer cette valeur de k à l'aide de la calculatrice. Interpréter cette information dans le contexte de l'exercice.
3. **Généralisation :** la société souhaite déterminer le plus petit nombre entier naturel k tel que $P(X \leqslant k) \geqslant S$ où S est un nombre réel de l'intervalle $]0\,;1[$.
   Au début de l'algorithme incomplet ci-dessous, on affecte 0 à la variable k et $0,95^{80}$ à la variable P ; on donne une valeur de $]0\,;1[$ à la variable S.
   A la fin de son exécution, l'algorithme renvoie la valeur de la variable k.
   Compléter les pointillés.

   Tant que $P < S$
   $\quad k \leftarrow$ ....
   $\quad P \leftarrow$ ....
   Fin Tant que

4. Coder cet algorithme à l'aide d'une fonction SEUIL en langage Python.
   Saisir cette fonction et l'exécuter pour $S = 0,99$, puis pour $S = 0,999$.

Exercice 6

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètre $n = 100$ et $p = 0,25$.
1) Tabuler avec votre calculatrice la loi binomiale correspondante.
2) Déterminer l'intervalle de fluctuation centré au seuil de 95%.

Exercice 7

Dans la population française, il y a 24,4% de "moins de 20 ans".

1) On prélève au hasard un échantillon de 250 personnes dans la population française. Donner un intervalle de fluctuation au seuil de 95% de la fréquence des "moins de 20 ans" dans cet échantillon.
2) Dans un village de 250 habitants, la proportion de "moins de 20 ans" est de 28,5%. Ce village est-il représentatif de la population française sur ce critère ?

Exercice 8

On a lancé 100 fois une pièce de monnaie et le côté pile est apparu 65 fois ; on s'interroge sur la nature équilibrée de la pièce.

Exercice 9

Un candidat à l'élection présidentielle affirme que 54% de la population lui est favorable. Lors d'un sondage réalisé sur 1 000 personnes, 523 personnes se sont déclarées favorables à ce candidat. Peut-on rejeter ou non la proportion de 54% donnée par ce candidat, au seuil de 95% ?

Exercice 10

Une association de lutte contre la discrimination se voit présenter les cas de deux entreprises :
• l'entreprise **Savamal** dans laquelle 21 des 53 employés sont des femmes ;
• l'entreprise **Cébon** dans laquelle 459 des 1027 employés sont des femmes.

1. Calculer les fréquences d'employées "femmes" dans chaque entreprise. Comparez-les.
2. Cette association peut-elle penser au risque d'erreur de 5% que l'une ou l'autre de ces entreprises pratique la discrimination ?

Point sur l'utilisation de la calculatrice pour la loi binomiale

Supposons que X suive la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,3$:

1. **Binomiale DdP** : permet de calculer la probabilité que la v.a. soit égale à une valeur k.
   Ex : $P(X = 24)$

binomPdf(100,0.3,24)	0.038039

2. **Binomiale FdR** : permet de calculer la probabilité que la v.a. soit entre deux valeurs entières.
   Ex : $P(32 \leqslant X \leqslant 43)$

binomCdf(100,0.3,32,43)	0.364777

3. **Binomiale inverse** : permet de connaitre la plus petite valeur k telle que la probabilité que la v.a. X soit inférieure ou égale à k soit supérieure à une valeur choisie.
   Ex : Déterminer k telle que $P(X \leqslant k) \geqslant 0,97$

invBinom(0.97,100,0.3)	39

4. **Binomiale inverse N** : Cette fois n **est l'INCONNUE** que l'on recherche.

   Par exemple, dans la situation suivante : si on sait que la probabilité de marquer un but lors d'un tir est de $0,7$ ($p = 0,7$) et que l'on souhaite connaître le nombre minimum de tirs à effectuer pour réussir **plus que 50 buts** (lors d'un entrainement) avec une probabilité de réalisation de 99% càd l'événement : $P(X > 50) > 0,99$.
   On passe par l'événement contraire : $P(X > 50) > 0,99 \Longleftrightarrow P(X \leqslant 50) \leqslant 0,01$.
   On trouve ainsi, qu'il est nécessaire d'effectuer 87 tirs.

invBinomN(0.01,0.7,50)	**87**
binomCdf(87,0.7,51,87)	**0.991176**