Dénombrement

Probabilité - Chapitre 1

Table des matières

I Principes additif et multiplicatif **1**
I 1 Réunion d'ensembles disjoints - Principe additif 1
I 2 Produit cartésien - Principe multiplicatif 4

II k-uplets ou k-listes d'un ensemble **6**

III Arrangements ou k-uplets d'éléments tous distincts d'un ensemble **9**
III 1 Factorielle d'un entier naturel 9
III 2 Arrangements d'un ensemble 10

IV Cas particulier important d'arrangements : Permutations d'un ensemble **12**

V Combinaisons ou coefficients binomiaux **14**
V 1 Parties d'un ensemble 14
V 2 Combinaisons 15
V 3 Triangle de Pascal 21
V 4 Complément : Formule du binôme de Newton 22

I Principes additif et multiplicatif

I 1 Réunion d'ensembles disjoints - Principe additif

DEFINITION : Cardinal d'un ensemble

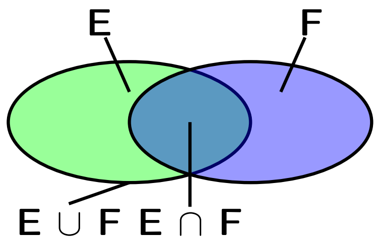
Soit E un ensemble **fini**. Le cardinal de E, noté $\text{Card}(E)$ est le **nombre d'éléments** de l'ensemble E.

REMARQUE(S) :

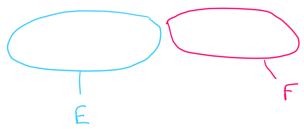
1. Si $E = \{\pi\,;\sqrt{2}\,;-3\,;\frac{4}{5}\,;\frac{1}{3}\,;1,034\}$ alors $\text{Card}(E) = 6$.
2. $\text{Card}(\emptyset) = 0$.
3. Certains ensembles ne sont pas finis.
   Par exemple, l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$, l'ensemble des réels $\mathbb{R}$ ou un intervalle de réels $[2\,;5[$.
   HP : Cependant l'ensemble $\mathbb{N}$ est **infini et dénombrable** (tout ensemble équipotent à $\mathbb{N}$, càd il existe une bijection entre cet ensemble et $\mathbb{N}$, est dénombrable) tandis que $\mathbb{R}$ ou un intervalle qcq de $\mathbb{R}$ sont **infinis et NON dénombrables**.
4. Le cardinal de E est parfois noté $|E|$ ou encore $\#E$.

PROPRIETE : Cardinal de la réunion de deux ensembles (admise)

Soit E et F deux ensembles **finis**. On a alors : $\text{Card}(E \cup F) = \text{Card}(E) + \text{Card}(F) - \text{Card}(E \cap F)$



DEFINITION : Ensembles disjoints



Deux ensembles E et F sont **disjoints** lorsque $E \cap F = \emptyset$.

PROPRIETE : Cardinal de la réunion de deux ensembles finis et disjoints - Principe additif

Soit E et F deux ensembles **finis et disjoints**. On a alors : $\text{Card}(E \cup F) = \text{Card}(E) + \text{Card}(F)$

DEMONSTRATION :

$\text{Card}(E \cup F) = \text{Card}(E) + \text{Card}(F) - \text{Card}(E \cap F)$, comme E et F sont disjoints, $E \cap F = \emptyset$ donc $\text{Card}(E \cap F) = 0$.

REMARQUE(S) :

On peut généraliser le principe additif à n ($n \geqslant 2$) ensembles finis et **deux à deux disjoints** : $A_1; A_2; ...A_n$. On a alors :

$$\boxed{\mathrm{Card}(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Card}(A_i)}$$

Exercice 1

Soit $E = \{a; b; c\}$, $F = \{c; d\}$ et $G = \{1; 2\}$.

1. Écrire l'ensemble $E \cup F$ en extension. Quel est son cardinal ?
2. Écrire l'ensemble $E \cup G$ en extension. Quel est son cardinal ?

PROPRIETE : Complémentaire d'un ensemble

Soit A une partie d'un ensemble (un sous-ensemble) d'un ensemble fini E et $\overline{A}$ le complémentaire de A dans E.
On a alors :

$$\mathrm{Card}(\overline{A}) = \mathrm{Card}(E) - \mathrm{Card}(A)$$

DEMONSTRATION :

$\overline{A}$ est le complémentaire de A donc $A \cup \overline{A} = E$ et $A \cap \overline{A} = \emptyset$.
$\mathrm{Card}(A \cup \overline{A}) = \mathrm{Card}(E)$ et $\mathrm{Card}(A \cup \overline{A}) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(\overline{A})$ donc $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(\overline{A})$

I 2 Produit cartésien - Principe multiplicatif

DEFINITION : Produit cartésien de deux ensembles non vides

Soit E et F deux ensembles **non vides**.
Le **produit cartésien** de E par F est l'ensemble noté $E \times F$ (se lit "E croix F") constitué des couples $(x;y)$ où x est un élément de E et y un élément de F.

$$E \times F = \{(x;y), x \in E, y \in F\}.$$

REMARQUE(S) :

1. On peut généraliser cette définition à plus de deux ensembles non vides.
   Pour trois ensembles, le produit cartésien est constitué de triplets.
2. Le produit cartésien de E par lui-même est noté E^2.
   Plus généralement, le produit de E par lui-même n fois $(n \geqslant 2)$ se note E^n.

Exemple : En géométrie, $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ sont des produits cartésiens, constitués
pour $\mathbb{R}^2$ des couples de coordonnées des points du plan
et pour $\mathbb{R}^3$ des triplets de coordonnées des points de l'espace.

PROPRIETE : Principe multiplicatif

Soit E et F deux ensembles **finis et non vides**. On a alors : $\mathrm{Card}(E \times F) = \mathrm{Card}(E) \times \mathrm{Card}(F)$.

DEMONSTRATION :

Modélisation arbre. Chaque élément de E permet de générer autant de couples de $E \times F$ que d'éléments de F.

Exercice 2

Soit $E = \{a; b; c\}$ et $G = \{1; 2\}$. Écrire les ensembles $E \times G$ et $G \times E$ en extension (modélisation avec arbres).
Quel est son cardinal de l'ensemble $E \times G$?

II k-uplets ou k-listes d'un ensemble

DEFINITION : k-uplets d'un ensemble E à n éléments

Soit E un ensemble non vide et k un entier naturel non nul.
On appelle **k-uplet** ou **k-liste** de E un élément de E^k.

Vocabulaire : En particulier, lorsque k vaut 2, il s'agit d'un **couple**, lorsqu'il vaut 3, il s'agit d'un **triplet**.

REMARQUE(S) :

Un **k-uplet** de E^k est une liste **ordonnée** d'éléments de E.
Ainsi, si $E = \{a; b; c\}$ alors le triplet $(a\ ; b\ ; c)$ n'est pas égal au triplet $(a\ ; c\ ; b)$.

Exemples :

1. $(-3,5\ ; 2)$ est un couple de $\mathbb{R}^2$.
2. Soit $E = \{a; b; c\}$. $(a\ ; b\ ; c\ ; a\ ; c)$ et $(a\ ; a\ ; c\ ; b\ ; c)$ sont deux 5-uplets distincts de E^5.
3. Un **code de carte bancaire** est un 4-uplet de $E = \{0; 1; ...; 9\}$.
   Par exemple : $(0; 0; 2; 5) \in E^4$ ou $(1; 7; 7; 7) \in E^4$.
4. Un **« mot » de 5 lettres** est un 5-uplet de l'alphabet.
   Par exemple, si $F = \{a; b; ...; z\}$, $(m; m; m; a; z) \in F^5$ ou $(s; a; l; u; t) \in F^5$.
   Attention, un « mot » n'a pas nécessairement de sens.

PROPRIETE : Principe multiplicatif appliqué à un k-uplet

Soit E un ensemble fini et non vide et k un entier non nul. On a alors $\boxed{\text{Card}(E^k) = [\text{Card}(E)]^k}$

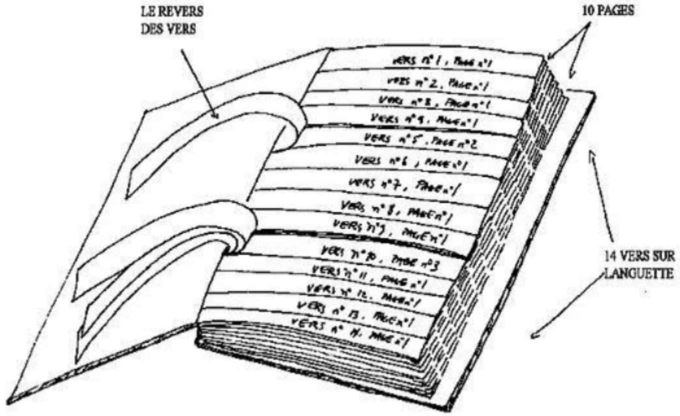
Autrement dit, le **nombre de k-uplets** de E vaut $[\text{Card}(E)]^k$.

DEMONSTRATION :

Par récurrence en itérant le principe multiplicatif

Exercice 3

Raymond Queneau a écrit un ouvrage intitulé Cent mille milliards de poèmes.
Il est composé de 10 pages contenant chacune 14 vers.
Le lecteur peut composer son propre poème de 14 vers en prenant le premier vers de l'une des 10 pages puis le deuxième vers de l'une des 10 pages et ainsi de suite jusqu'au quatorzième vers.
Justifier le titre de l'ouvrage.



Exercice 4

Un immeuble est protégé par un digicode. Ce code peut être constitué de 4, 5 ou 6 chiffres allant de 0 à 9 suivis d'une lettre sélectionnée parmi A, B et C.
Combien de codes peut-on former avec ce système ?

Exercice 5 (Bac 2021)

Un code inconnu est constitué de 8 signes.
Chaque signe peut être une lettre ou un chiffre.
Il y a donc 36 signes utilisables pour chacune des positions. Un logiciel de cassage de code teste environ cent millions de codes par seconde.
En combien de temps au maximum le logiciel peut-il découvrir le code ?

III Arrangements ou k-uplets d'éléments tous distincts d'un ensemble

III 1 Factorielle d'un entier naturel

DEFINITION : Factorielle

Soit n un entier **naturel non nul**. On appelle **factorielle** de n, le nombre :

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times 1 = \prod_{i=1}^{n} i.$$

Par convention, $0! = 1$.

Exercice 6

1. Calculer $3!$
2. Calculer astucieusement $\dfrac{8!}{6!}$

III 2 Arrangements d'un ensemble

DEFINITION : Arrangements

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit E un ensemble fini non vide à n éléments.
Soit k un entier naturel inférieur ou égal à n $(0 \leqslant k \leqslant n)$.
Un **arrangement** de k éléments de E est un k-uplet d'éléments **tous distincts** de E.

Exemple :
Soit $E = \{a; b; c\}$. $(a\ ; b)$ et $(a\ ; c)$ sont deux arrangements de E.
Le couple $(a\ ; a)$ n'est pas un arrangement de E car ces deux éléments ne sont pas distincts.

PROPRIETE : Nombre d'arrangements de k éléments dans un ensemble à n éléments

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit E un ensemble fini non vide à n éléments.
Soit k un entier naturel inférieur ou égal à n $(0 \leqslant k \leqslant n)$.
Le **nombre d'arrangements de k éléments** de E est égal à : $A_n^k = n \times (n-1) \times ... \times (n-k+1) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$

DEMONSTRATION :

(Modélisation avec un arbre)
En effet, il y a n possibilités pour le 1er élément, puis il ne reste que $(n-1)$ possibilités pour le 2è, puis $(n-2)$ pour le 3è , etc, au k-ième, il y a donc $(n-k+1)$ possibilités et pour finir, on applique le principe multiplicatif.

Exercice 7

La finale d'un 100 m voit s'aligner 9 athlètes. Combien de podiums sont possibles ?

Exercice 8

Pour une course de 18 chevaux au départ, combien y a-t-il de tiercés possibles ?

Exercice 9

Soit A l'ensemble des nombres de quatre chiffres, le premier étant non nul.
1) Calculer le nombre d'éléments de A.
2) Dénombrer les éléments de A :
a) composés de quatre chiffres distincts.
b) composés d'au moins deux chiffres identiques.
c) composés de quatre chiffres distincts autres que 5 et 7.

Exercice 10

Un clavier de 9 touches (1 ;2 ;3 ;4 ;5 ;6 ;A ;B ;C) permet de composer le code d'entrée d'un immeuble, à l'aide d'une lettre suivie d'un nombre de 3 chiffres distincts ou non.
1) Combien de codes différents peut-on former ?
2) Combien y a-t-il de codes sans le chiffre 1 ?
3) Combien y a-t-il de codes comportant au moins une fois le chiffre 1 ?
4) Combien y a-t-il de codes comportant des chiffres distincts ?
5) Combien y a-t-il de codes comportant au moins deux chiffres identiques ?

IV Cas particulier important d'arrangements : Permutations d'un ensemble

DEFINITION : Permutation

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit E un ensemble fini et non vide à n éléments.
Une **permutation** de E est un **n-uplet d'éléments tous distincts** de E.

Exemple : Soit $E = \{a; b; c\}$. $(a\ ; b\ ; c)$ et $(a\ ; c\ ; b)$ sont deux permutations distinctes de E.

PROPRIETE : Nombre de permutations

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le **nombre de permutations** d'un ensemble fini et non vide, à n éléments, est $n!$

DEMONSTRATION :

C'est un cas particulier du précédent paragraphe, avec $k = n$.
En effet, il s'agit de dénombrer le nombre de n-uplets d'éléments tous distincts (ou nombre d'arrangements) d'un ensemble à n éléments.
D'après le paragraphe précédent, on obtient donc $\dfrac{n!}{0!} = n!$

Exercice 11

Dans une classe de terminale il y a 30 places et il y a justement 30 élèves dans la classe.

1) Combien de plans de classe différents sont possibles ?
2) Dans cette classe, le professeur doit évaluer à l'oral 6 élèves, les 24 autres ont déjà été évalués. On suppose que chaque élève est interrogé une seule fois. Combien d'ordres de passage différents peut-il y avoir ?
3) Finalement, le professeur n'a pas le temps de les interroger tous. Combien y a-t-il d'ordres de passage différents si 3 élèves parmi les 6, sont finalement interrogés ?

Exercice 12

1) Dénombrer les anagrammes du mot PATRICE.

2) Dans chacun des cas suivants, dénombrer les anagrammes du mot PATRICE :
a) commençant et finissant par une consonne ;
b) commençant et finissant par une voyelle ;
c) commençant par une consonne et finissant par une voyelle
d) commençant par une voyelle et finissant par une consonne

3) Quel est le nombre d'anagrammes du mot « ANAGRAMME » ?

V Combinaisons ou coefficients binomiaux

V 1 Parties d'un ensemble

DEFINITION : Partie d'un ensemble

Une partie d'un ensemble E est un sous-ensemble de E.

REMARQUE(S) :

1. L'ensemble des parties de E est souvent noté $\mathcal{P}(E)$.
2. $\mathcal{P}(E)$ est donc un ensemble d'ensembles.
3. E et l'ensemble vide appartiennent à $\mathcal{P}(E)$.
4. Attention à ne pas confondre une **partie** d'un ensemble et un **k-uplet** de cet ensemble.
   Si $E = \{a\,;b\,;c\}$ alors $\{b\,;c\}$ est une partie à deux éléments de E et $\{b\,;c\} = \{c\,;b\}$ (pas d'ordre et accolades).
   Mais $(b\,;c)$ est un 2-uplet (ou couple) de E et $(b\,;c) \neq (c\,;b)$ (ordre et parenthèses).

PROPRIETE : Nombre de parties d'un ensemble

Soit E un ensemble fini à n éléments. Le nombre de parties de E est 2^n.

DEMONSTRATION :

♡ Bac ♡

Constituer une partie de E revient à considérer, tour à tour, chaque élément de E et à l'inclure ou pas dans la partie, il y a donc deux choix possibles pour chaque élément de E (inclus ou pas) et l'on répète ainsi n fois pour les n éléments de E. Cela revient à dénombrer le nombre de n-uplets de l'ensemble $\{0; 1\}$. Il y en a donc 2^n.

V 2 Combinaisons

DEFINITION : Combinaison ou coefficient binomial

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit E un ensemble fini à n éléments et k un entier naturel inférieur ou égal à n $(0 \leqslant k \leqslant n)$.
Une **combinaison** de k éléments de E est une partie de E de cardinal k (c'est-à-dire un sous-ensemble de E à k éléments).

Le **nombre de combinaisons** de k éléments parmi n est noté $\binom{n}{k}$. On lit "k parmi n".

REMARQUE(S) :

Pour une combinaison de k éléments, on ne tient pas compte de l'**ordre** des éléments, c'est ce qui la distingue des k-uplets ou k-listes.
Aide - Combinaison : tirage du loto (pas d'ordre) et k-uplets ou k-listes : podium olympique ou tiercé (ordre).

PROPRIETE : Formule de calcul de $\binom{n}{k}$

Soit n et k deux entiers naturels tels que $k \leqslant n$. On a : $\displaystyle\binom{n}{k} = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

DEMONSTRATION :

On reprend le nombre de k-uplets d'éléments tous distincts d'un ensemble à n éléments : $N = n \times (n-1) \times \ldots \times (n-k+1) = A_n^k$.
Comme ici on a tenu compte de l'**ordre** des éléments dans le k-uplet, on en a donc trop compté.
Plus précisément, on a compté à chaque fois toutes les permutations possibles de ces k éléments, il y en a k!
Pour déterminer le nombre de combinaisons de k parmi n, il s'agit donc de diviser N par le nombre de permutations.

On obtient ainsi : $\displaystyle\binom{n}{k} = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n \times (n-1) \times \ldots \times (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

REMARQUE(S) :

♡ **Bac** ♡
Soit $n \in \mathbb{N}$ et k entier compris entre 0 et n. La propriété sur le nombre de parties d'un ensemble à n éléments peut donc s'écrire : $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n}$

Exercice 13

Combien de tirages possibles y a-t-il au loto ? Tirage de 5 numéros distincts compris entre 1 et 49.

Solution : $\binom{49}{5} = \dfrac{49!}{(49-5)! \times 5!} = 1\ 906\ 884$

PROPRIETE : Propriétés des coefficients binomiaux

Soit n et k des entiers naturels et $0 \leqslant k \leqslant n$.

1. $\dbinom{n}{k} = \dbinom{n}{n-k}$.
2. $\dbinom{n}{0} = 1$
3. $\forall n \geqslant 1$, $\dbinom{n}{1} = n$, $\dbinom{n}{n} = 1$.
4. **Relation de Pascal** : si $k \in [\![0; n-1]\!]$ alors $\dbinom{n}{k} + \dbinom{n}{k+1} = \dbinom{n+1}{k+1}$

DEMONSTRATION :

1. évident avec la formule car les rôles de $(n-k)$ et k sont interchangeables.
   Par dénombrement, le nombre de sous-ensembles de k éléments est égal au nombre de sous-ensembles de $n-k$ (on prend les ensembles complémentaires des précédents)
2. évident avec la formule. ou par dénombrement, nombre d'ensembles ayant 0 élément.
3. évident avec la formule. ou par dénombrement, nombre d'ensembles ayant 1 élément, n éléments.
4. ♡ **Bac** ♡

   • On peut procéder par **dénombrement** :
   on part d'un ensemble E à n éléments et on imagine qu'on lui ajoute un $(n+1)$ième élément, constituant ainsi l'ensemble E'.

Dans ce nouvel ensemble E', on aimerait compter les sous-ensembles de $k+1$ éléments.
On fait ainsi la somme du nombre de sous-ensembles de $k+1$ éléments de l'ensemble E (on ne prend donc pas l'élément ajouté) et du nombre de sous-ensembles de k éléments de E auxquels on ajoute cet élément ajouté afin qu'ils contiennent bien $k+1$ éléments.
Il n'y a pas d'autres possibilités ...
• On peut aussi procéder par **calcul** :

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\frac{n!}{(n-k)!k!}+\frac{n!}{(n-k-1)!(k+1)!}=\frac{n!(k+1+n-k)}{(n-k)!(k+1)!}=\frac{(n+1)!}{(n+1-k-1)!(k+1)!}=\binom{n+1}{k+1}$$

Exercice 14

En utilisant trois méthodes différentes, dénombrer le nombre de poignées de mains échangées, dans un groupe de 13 personnes, si chacune échange une poignée de main avec toutes les autres ?

Exercice 15

On extrait simultanément 5 cartes d'un jeu de 32. Cet ensemble de 5 cartes est appelé une "main".
1) Combien y a-t-il de mains différentes possibles ?
2) Dénombrer les mains de 5 cartes contenant :
a) un carré
b) deux paires distinctes
c) un full (trois cartes de même valeur, et deux autres de même valeurs. Exemple : 3 rois et 2 as)
d) un brelan (trois cartes de même valeur, sans full ni carré)
e) une quinte (5 cartes de même couleur, se suivant dans l'ordre croissant)

Exercice 16

Un sac contient 5 jetons verts (numérotés de 1 à 5) et 4 jetons rouges (numérotés de 1 à 4).
1) On tire successivement et au hasard 3 jetons du sac, sans remettre le jeton tiré.
Calculer les probabilités :
a) De ne tirer que 3 jetons verts ;
b) De ne tirer aucun jeton vert ;
c) De tirer au plus 2 jetons verts ;
d) De tirer exactement 1 jeton vert.
2) On tire simultanément et au hasard 3 jetons du sac.
Reprendre alors les questions a), b), c) et d).

Exercice 17

Soit un quadrillage de 10 par 10 carreaux. A est le point de ce carré situé en bas à gauche et B celui situé en haut à droite.
Soit un chemin entre ces deux points constitués de déplacements sur les segments du quadrillage.
Les seuls déplacements autorisés étant "une unité à droite" et "une unité en haut".
Combien y a-t-il de chemins possibles ?

V 3 Triangle de Pascal

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$
$n=0$	1						
$n=1$	1	1					
$n=2$	1	2	1				
$n=3$	1	3	3	1			
$n=4$	1	4	6	4	1		
$n=5$	1	5	10	10	5	1	
$n=6$	1	6	15	20	15	6	1

V 4 Complément : Formule du binôme de Newton

PROPRIETE : Formule du binôme de Newton

Soit a et b deux réels. Pour tout entier naturel n non nul, on a

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k}$$

Exemple : Développer $(a+b)^4$ et $(a-b)^4$.

REMARQUE(S) :

On retrouve le résultat déjà vu sur le nombre de parties d'un ensemble :

$$\boxed{\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n \text{ car } (1+1)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}.}$$

DEMONSTRATION :

Démonstration 1 : Dénombrement
En développant $(a+b)^n$, on obtient des termes tous de la forme $a^k b^{n-k}$ avec $0 \leqslant k \leqslant n$.

Pour k fixé, il y aura autant de termes de type $a^k b^{n-k}$ que de sous ensembles à k éléments dans un ensemble en contenant n càd $\binom{n}{k}$. D'où le résultat.

Démonstration 2 : Récurrence
Initialisation : $n = 1$

- $(a+b)^1 = a+b$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^{1-k}\ b^k = \binom{1}{0} a^1 b^0 + \binom{1}{1} a^0 b^1 = a+b.$

Hérédité : Supposons $(a+b)^n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i$ et démontrons $(a+b)^{n+1} = \displaystyle\sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} a^{n+1-i} b^i$

$$(a+b)^{n+1} = (a+b) \times (a+b)^n = (a+b) \times \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n+1-i} b^i + \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^{i+1}$$

Dans la deuxième somme, $j = i+1$, i évoluant entre 0 et n, j évolue entre 1 et $n+1$.

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n+1-i} b^i + \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} a^{n-j+1} b^j$$

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{i=1}^{n} \left[\binom{n}{i} + \binom{n}{i-1} \right] a^{n+1-i} b^i$$

On utilise alors la formule de Pascal pour conclure.

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n+1}{i} a^{n+1-i} b^i$$

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} a^{n+1-i} b^i$$

Conclusion : La proposition étant vérifiée au rang initial $n = 1$ et étant héréditaire, en application du principe de récurrence, elle est donc vraie pour tout n entier naturel différent de 0.

n : nb d'éléments de l'ensemble

p : nb d'éléments que l'on a pris dans l'ensemble de départ