76 APPROFONDISSEMENT

Formule de $E(XY)$ sous hypothèse d'indépendance

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur un univers Ω.

On souhaite montrer que $E(XY) = E(X)E(Y)$.

› Notations et questions préliminaires :

Soit Z la variable aléatoire définie par $Z = X \times Y$.
On notera dans la suite $\mathrm{Val}_X = \{x_1 ; \ldots ; x_r\}$ l'ensemble des valeurs prises par X, $\mathrm{Val}_Y = \{y_1 ; \ldots ; y_s\}$ l'ensemble des valeurs prises par Y et Val_Z l'ensemble des valeurs prises par Z.
Attention, pour $z \in \mathrm{Val}_Z$, il peut exister plusieurs couples $(x ; y)$ tels que $z = x \times y$.
On va donc regrouper ces différents couples dans un ensemble qu'on notera A_z : pour tout $z \in \mathrm{Val}_Z$, on pose $A_z = \{(x ; y) \in \mathrm{Val}_X \times \mathrm{Val}_Y \text{ tels que } x \times y = z\}$.
A_z est donc l'ensemble des couples de valeurs de X et de Y dont le produit vaut z.

1. Justifier que les ensembles A_z sont des ensembles deux à deux disjoints.

2. À quoi la réunion de tous les ensembles A_z tels que $z \in \mathrm{Val}_Z$ correspond-elle ?

3. Démontrer que pour tout $z \in \mathrm{Val}_Z$,
$P(Z = z) = \sum\limits_{(x ; y) \in A_z} P((X = x) \cap (Y = y))$.

› Résolution du problème :

4. Montrer que $E(Z) = \sum\limits_{z \in \mathrm{Val}_Z} \sum\limits_{(x ; y) \in A_z} xyP(X = x)P(Y = y)$.

5. En déduire que $E(Z) = E(X)E(Y)$.

Corrigé exercice 76 :

1. Supposons qu'il existe z_0 et z_1 tels que A_{z_0} et A_{z_1} ne soient pas disjoints. Alors il existerait un couple de réels $(x;y) \in \mathrm{Val}_X \times \mathrm{Val}_Y$ tel que $x \times y = z_0$ et $x \times y = z_1$. Ainsi on aurait $z_0 = z_1$, et donc les ensembles A_{z_0} et A_{z_1} seraient les mêmes. Pour deux valeurs distinctes prises par Z, les ensembles A_z sont donc disjoints.

2. On a $\bigcup_{z\in \mathrm{Val}_Z} A_z = \mathrm{Val}_X \times \mathrm{Val}_Y$.

3. On a $P(Z = z) = P(X \times Y = z) = P(\bigcup\limits_{(x;y)\in A_z} (X = x) \cap (Y = y))$. Or, les ensembles A_z sont tous disjoints donc $P(Z = z) = \sum\limits_{(x;y)\in A_z} P((X = x) \cap (Y = y))$.

4. Par définition,

   $E(Z) = \sum\limits_{z\in \mathrm{Val}_Z} zP(Z = z)$ d'où $E(Z) = \sum\limits_{z\in \mathrm{Val}_Z} \sum\limits_{(x;y)\in A_z} zP((X = x) \cap (Y = y))$ donc $E(Z) = \sum\limits_{z\in \mathrm{Val}_Z} \sum\limits_{(x;y)\in A_z} xyP((X = x) \cap (Y = y))$.

   Donc $E(Z) = \sum\limits_{z\in \mathrm{Val}_Z} \sum\limits_{(x;y)\in A_z} zP(X = x) \times P(Y = y))$ car les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

5. Or, $E(X)E(Y) = \sum\limits_{x\in \mathrm{Val}_X} xP(X = x) \times \sum\limits_{y\in \mathrm{Val}_Y} yP(Y = y)$ donc

   $E(X)E(Y) = \sum\limits_{x\in \mathrm{Val}_X} \sum\limits_{y\in \mathrm{Val}_Y} xyP(X = x) \times P(Y = y)$. Or, la famille d'ensembles $(A_z)_{z\in \mathrm{Val}_Z}$ forme une partition de $\mathrm{Val}_X \times \mathrm{Val}_Y$ d'où :

   $E(X)E(Y) = \sum\limits_{z\in \mathrm{Val}_Z} \sum\limits_{(x;y)\in A_z} zP(X = x) \times P(Y = y)$.

77 APPROFONDISSEMENT

Additivité de la variance

On rappelle la formule de König-Huygens : pour toute variable aléatoire X définie sur un univers Ω,
$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$.

1. Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur Ω. Soit Z la variable aléatoire définie par $Z = X + Y$. Appliquer la relation ci-dessus à la variable aléatoire Z.

2. En déduire que $V(X+Y) = E(X^2) - (E(X))^2 + E(Y^2) - (E(Y))^2 + 2E(XY) - 2E(X)E(Y)$.

3. En utilisant l'exercice **76**, en déduire que si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, alors $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$.

Corrigé exercice 77 :

1. On a $V(Z) = E(Z^2) - (E(Z))^2$.

2. Par définition de la variable aléatoire Z, $V(Z) = E((X+Y)^2) - (E(X+Y))^2$.
   Or $E((X+Y)^2) = E(X^2 + 2XY + Y^2) = E(X^2) + 2E(XY) + E(Y^2)$
   et $(E(X+Y))^2 = (E(X) + E(Y))^2 = (E(X))^2 + 2E(X)E(Y) + (E(Y))^2$.
   Ainsi, $V(Z) = E(X^2) + 2E(XY) + E(Y^2) - (E(X))^2 - 2E(X)E(Y) - (E(Y))^2$
   donc $V(Z) = E(X^2) - (E(X))^2 + E(Y^2) - (E(Y))^2 + 2E(XY) - 2E(X)E(Y)$.

3. Les variables aléatoires X et Y sont indépendantes. L'exercice précédent permet alors d'affirmer que $E(XY) = E(X)E(Y)$.

   On obtient alors $V(Z) = E(X^2) - (E(X))^2 + E(Y^2) - (E(Y))^2$, c'est-à-dire, d'après la formule de König-Huygens, $V(Z) = V(X) + V(Y)$.

   Ainsi, si X et Y sont indépendantes, on a alors $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$.