ex 92 p 58 :

1.) a.) inequation $(1, 1, 1, -2)$

A l'appel de cette instruction, on passe en argument les valeurs : $\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 1 \\ x = -2 \end{cases}$ OR $1 \times (-2)^2 + 1 \times (-2) + 1 = 4 - 2 + 1 = 3$

Comme $3 > 0$, le test effectué en ligne 2 est FAUX

Donc solution prend la valeur "False"

Donc $\boxed{\text{le programme renvoie "False"}}$

b.) inequation $(-2, 3, -1, 2)$

On a : $\begin{cases} a = -2 \\ b = 3 \\ c = -1 \\ x = 2 \end{cases}$ OR $-2 \times 2^2 + 3 \times 2 - 1 = -8 + 6 - 1 = -3$

Comme $-3 < 0$, le test effectué en ligne 2 est VRAI

Donc solution prend $\boxed{\text{la valeur "True"}}$ qui est alors renvoyée par le programme.

2.) A l'appel de cette fonction "inequation", les valeurs de a, b, c et x sont passées en argument.

Le programme indique alors si le nombre x est $\boxed{\text{solution de l'inéquation } ax^2 + bx + c < 0}$

3.) a.) $-2x^2 + 3x - 1$ est un polynôme de second degré dont le discriminant Δ vaut : $\Delta = 3^2 - 4 \times (-2) \times (-1)$

$\Delta = 9 - 8$

$\Delta = 1$

$\Delta > 0$ donc ce polynôme est du signe de (-2), strictement négatif sauf entre ses racines :

$x_1 = \dfrac{-3-1}{2\times(-2)} = \dfrac{-4}{-4} = 1$ et $x_2 = \dfrac{-3+1}{-4} = \dfrac{-2}{-4} = \dfrac{1}{2}$

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}, -2x^2+3x-1<0 \iff x \in \left]-\infty ; \frac{1}{2}\right[\cup]1;+\infty[$

$\boxed{\text{Donc le programme renvoie "True" pour toute valeur de } x \text{ de } \left]-\infty ; \frac{1}{2}\right[\cup]1;+\infty[.}$

b.) x^2+x+1 est .... $\Delta = 1^2 - 4\times 1\times 1 = 1-4 = -3$

$\Delta < 0$ donc ce polynôme est du signe de 1, st +,
pour tout x réel.

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}, x^2+x+1<0 \iff x \in \emptyset$.

Donc le programme renvoie "True" pour aucune valeur de x réel.

ex 113 p60 :

1.) a.) $P(3) = 3^3 - 5\times 3^2 + 5\times 3 + 3 = 27 - 45 + 15 + 3 = \boxed{0}$

Donc $\boxed{3 \text{ est racine de } P(x)}$

b.) $\forall x \in \mathbb{R}, (x-3)(ax^2+bx+c) = ax^3+bx^2+cx-3ax^2-3bx-3c$

$= ax^3+(b-3a)x^2+(c-3b)x-3c$

Or la forme développée d'un polynôme est unique

Donc, par identification avec $P(x) = x^3-5x^2+5x+3$

on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = (x-3)(ax^2+bx+c) \iff \begin{cases} a = 1 \\ b-3a = -5 \\ c-3b = 5 \\ -3c = 3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = 1 \\ c = -1 \\ b = -5+3 \\ -1-3(-2) = 5 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = -1 \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = (x-3)(x^2-2x-1)}$$

c.) • x^2-2x-1 est un poly de 2nd degré dt le disc Δ vaut :

$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 4 + 4 = 8$

$\Delta > 0$ donc ce polynôme est du signe de 1, st $+$, sauf entre ses racines : $x_1 = \dfrac{-(-2)-\sqrt{8}}{2\times 1} = \dfrac{2-2\sqrt{2}}{2\times 1} = \dfrac{2(1-\sqrt{2})}{2\times 1} = 1-\sqrt{2}$

et $x_2 = \dfrac{2+2\sqrt{2}}{2} = 1+\sqrt{2}$

• $\forall x \in \mathbb{R}$, $x-3>0 \iff x>3$.

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		$1+\sqrt{2}$		3		$+\infty$
$x-3$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
x^2-2x-1		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

2.) a.) $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{2\}$, $f(x) - g(x) = x^2-3x+1 - \dfrac{2x-5}{x-2}$

$$= \frac{(x^2-3x+1)(x-2)-(2x-5)}{x-2}$$

$$= \frac{x^3-3x^2+x-2x^2+6x-2-2x+5}{x-2}$$

$$= \frac{x^3-5x^2+5x+3}{x-2}$$

$$= \frac{P(x)}{x-2}$$

b.) • $\forall x \in \mathbb{R}$, $x-2>0 \iff x>2$

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		2		$1+\sqrt{2}$		3		$+\infty$
$P(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f(x)-g(x)$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	0	$-$	0	$+$	

<u>Donc</u> $\mathcal{P}$ est $\overset{\text{strictement}}{\vee}$ au dessus de $\mathcal{H}$ sur $]-\infty; 1-\sqrt{2}[\cup]2; 1+\sqrt{2}[\cup]3;+\infty[$

$\mathcal{P}$ est strictement en dessous de $\mathcal{H}$ sur $]1-\sqrt{2}\,;2[\cup]1+\sqrt{2}\,;3[$ et $\mathcal{P}$ et $\mathcal{H}$ sont sécantes en 3 points d'abscisses : $1-\sqrt{2}$; $1+\sqrt{2}$ et 3.

c.) Par un solve !

<u>exercice poly (à paramètre)</u> :

$$(E) : (m+8)x^2 + mx + 1 = 0 .$$

1.) (E) est une équation de second degré ssi $8+m \neq 0$

ssi $m \neq -8$

Donc $\boxed{\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-8\}}$.

2.) ~~(E) admet une unique solution réelle~~ :

$\forall m \in D$, $(m+8)x^2 + mx + 1$ est un polynôme de 2nd degré dont le discriminant Δ est : $\Delta = m^2 - 4(m+8) \times 1 = m^2 - 4m - 32$

(E) admet une unique solution réelle ssi $\Delta = 0$

ssi $m^2 - 4m - 32 = 0$

$m^2-4m-32$ est un polynôme du second degré de discriminant

$\Delta' = (-4)^2 - 4 \times 1 \times (-32) = 16 + 128 = 144 = 12^2$

$\Delta' > 0$ donc l'équation $m^2 - 4m - 32 = 0$ admet deux solutions réelles distinctes : $m_1 = \dfrac{-(-4)-12}{2\times 1} = \dfrac{4-12}{2} = \dfrac{-8}{2} = -4$

et $m_2 = \dfrac{4+12}{2} = \dfrac{16}{2} = 8$ (m_1 et m_2 appartiennent bien à $\mathcal{D}$)

$\boxed{\text{Ainsi, } \forall x \in \mathbb{R}, \text{ (E) admet une unique solution réelle} \iff m \in \{-4\,;8\}}$

3.) (E) n'admet aucune solution réelle $\iff \Delta < 0$.

or $m^2 - 4m - 32$ est du signe de 1, soit $+$ sauf entre ses racines.

Ainsi, $\forall m \in D$, $m^2 - 4m - 32 < 0 \iff m \in]-4\,;8[$

$\boxed{\text{Donc, (E) n'a aucune sol. réelle} \iff m \in]-4\,;8[}$

ex 103 p 59 :

1.) Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2 - (mx - 1)$

$$= x^2 - mx + 1$$

P et D_m ont deux points communs ssi l'équation $f(x) = 0$ admet 2 solutions réelles distinctes.

Or $x^2 - mx + 1$ est un poly. de 2nd deg. dont le disc. Δ vaut :

$\Delta = (-m)^2 - 4 \times 1 \times 1 = m^2 - 4 = (m-2)(m-2)$

Δ est un polynôme du 2nd degré du signe de 1, soit $\oplus$ sauf entre ses racines (-2) et 2

Ainsi, $\forall m \in \mathbb{R}$, $m^2 - 4 > 0 \iff m \in]-\infty ; -2[\cup]2 ; +\infty[$

$m^2 - 4 < 0 \iff m \in]-2 ; 2[$

$m^2 - 4 = 0 \iff m \in \{-2 ; 2\}$

Ainsi,

P et D_m ont 2 points communs $\iff \Delta > 0$

$\iff m \in]-\infty ; -2[\cup]2 ; +\infty[$

2.) P et D_m ont un unique point commun $\iff \Delta = 0$

$\iff \boxed{m \in \{-2 ; 2\}}$

3.) P et D_m n'ont aucun point commun $\iff \Delta < 0$

$\iff \boxed{m \in]-2 ; 2[}$