Second degré

Analyse - Chapitre 1

Table des matières

I Fonction polynôme du second degré

I 1 Définition et vocabulaire

I 1 a Vocabulaire de base

DEFINITION : - Vocabulaire -

$n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}$; n et a sont des **constantes** et $x \in \mathbb{R}$; x est une **variable**.

• Un **monôme** est une expression de type ax^n et n est son **degré**.
Par exemple, $4 = 4 \times x^0$, $-5x^2$ et $\frac{5}{7}x^5$ sont des monômes de degrés respectifs : 0, 2, 5.
Tandis que $\sqrt{x}$ et $\frac{1}{x}$ ne le sont pas !

• Un **polynôme** est une somme de monômes.
Par exemple, l'expression $4x^3 - \frac{3}{4}x^8 - \sqrt{3}\,x^2$ est un polynôme de degré 8 car l'exposant le plus grand est 8.

• Les **fonctions affines** sont des fonctions polynômes de degré 0 (si elles sont constantes) ou 1 (quand elles ne sont pas des fonctions constantes).
Par exemple, la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{7}$ est une fonction constante, affine et polynôme de degré 0. La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 5 - \frac{5}{3}x$ est une fonction affine et une fonction polynôme de degré 1 (ou du 1er degré).

I 1 b Polynômes de second degré

DEFINITION :

Soit a, b et c des réels constants, avec $a \neq 0$.

On appelle **fonction polynôme du second degré** toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et pouvant s'écrire sous la forme

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

a, b et c sont appelés **coefficients** du polynôme.

Cette forme $ax^2 + bx + c$ est appelée la **forme développée** du polynôme. La forme développée d'un polynôme est **unique**.

La courbe représentative d'une fonction polynôme du second degré est **une parabole**.

REMARQUE(S) :

Ne pas confondre la **fonction** f et le **nombre réel** $f(x)$ (image du nombre x par la fonction f).

Exemples et contre-exemples :

- Dans le cas particulier où $a = 1$ et $b = c = 0$, on reconnait la fonction carré. La fonction carré est donc une fonction polynôme de second degré.
- La fonction $f : x \mapsto 5x - 3 + 7x^2$ est une fonction polynôme de second degré.
- La fonction $g : x \mapsto 4 - \dfrac{3}{x}$ n'est **pas** une fonction polynôme de second degré.
- La fonction $h : x \mapsto 4x^2 - \sqrt{x}$ n'est **pas** une fonction polynôme de second degré.
- La fonction $k : x \mapsto 3(x-2)(x+5)$ est une fonction polynôme du second degré (donnée sous forme factorisée).

Observation de paraboles tracées avec la calculatrice $x \mapsto x^2$; $x \mapsto x^2 + 1$; $x \mapsto (x-1)^2$; $x \mapsto -x^2$ ...

I 2 Forme canonique

I 2 a Deux exemples pour commencer

Pour tout x réel,
$-3x^2+12x-8=-3\left[x^2-4x+\dfrac{8}{3}\right]$
$-3x^2+12x-8=-3\left[(x-2)^2-4+\dfrac{8}{3}\right]$
$-3x^2+12x-8=-3\left[(x-2)^2-\dfrac{4}{3}\right]$
$-3x^2+12x-8=-3(x-2)^2+4$ qui est la **forme canonique** du trinôme : $-3x^2+12x-8$.

$2x^2+3x-2=2\left[x^2+\dfrac{3}{2}x-1\right]$
$2x^2+3x-2=2\left[\left(x+\dfrac{3}{4}\right)^2-\dfrac{9}{16}-1\right]$
$2x^2+3x-2=2\left[\left(x+\dfrac{3}{4}\right)^2-\dfrac{25}{16}\right]$
$2x^2+3x-2=2\left(x+\dfrac{3}{4}\right)^2-\dfrac{25}{8}$

I 2 b Cas général

Soit a, b et c trois réels constants et $a \neq 0$. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto f(x) = ax^2 + bx + c$.
Pour tout x réel,
$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$ (a **non nul**)
$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + 2 \times \frac{b}{2a}x + \frac{c}{a}\right)$
$ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + 2 \times \frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right]$
$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right]$
$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2}{4a^2}\right) + \frac{4ac}{4a^2}\right]$
$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)\right]$
$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$ (noté le a au dénominateur et pas a^2)
Si on pose $\alpha = -\frac{b}{2a}$, la valeur de $f(\alpha)$ est $f(\alpha) = \beta = -\left(\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$

PROPRIETE : - Définition et propriété (existence et unicité de la forme canonique d'un polynôme du second degré) -

Soit a, b et c trois réels constants et $a \neq 0$.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto f(x) = ax^2 + bx + c$.

On a donc montré que pour tout x réel, $ax^2 + bx + c = a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$ réels.

Cette forme $a(x-\alpha)^2 + \beta$ est **la forme canonique** du polynôme.
Tout polynôme du second degré admet une forme canonique $a(x-\alpha)^2 + \beta$ **unique**.

ON N'APPREND PAS PAR COEUR les expressions des FC ci-dessus (on doit **justifier** en devoir et donc refaire les quelques lignes de calcul) ! !
! ! CALCULATRICE ! ! Sur TI NSPIRE : « completeSquare(expression,x) donne la forme canonique.

I 3 Étude du sens de variation d'une fonction polynôme de second degré

Ex 28 p 52 qui permet de démontrer les variations (Dém1)

I 4 Éléments caractéristiques de la parabole

I 4 a Sommet de la parabole

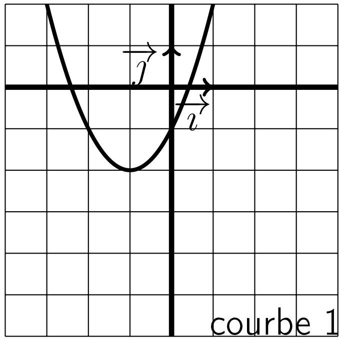
PROPRIETE :

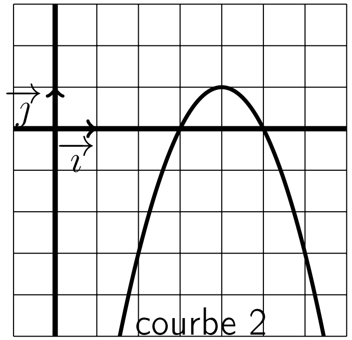
Soit a, α et β trois réels constants et $a \neq 0$.

Le point $S(\alpha; \beta)$ est le **sommet** de la parabole d'équation $y = a(x-\alpha)^2 + \beta$.

Exemples :

- La courbe 1 a pour équation $y = (x+1)^2 - 2$, $a > 0$
  son sommet est le point de coordonnées $(-1\,;-2)$ (le point le plus "bas" de la courbe).
- La courbe 2 a pour équation $y = -(x-4)^2 + 1$, $a < 0$
  son sommet est le point de coordonnées $(4\,;1)$ (le point le plus "haut" de la courbe).





DEMONSTRATION :

(Dém2) Il s'agit de montrer que la fonction f définie par $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ admet :

- lorsque $a > 0$, un **minimum** en $x = \alpha$ valant β.
- lorsque $a < 0$, un **maximum** en $x = \alpha$ valant β,

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$, avec $a \neq 0$.

1er cas $a > 0$ **:**	**2ème cas** $a < 0$ **:**
Si $a > 0$, alors $a(x-\alpha)^2 \geq 0$ donc, $a(x-\alpha)^2 + \beta \geq \beta$ Toutes les images sont donc supérieures ou égales à β. Si β admet un antécédent par la fonction $f : x \mapsto a(x-\alpha)^2 + \beta$ alors β est **le minimum** de cette fonction. Or, on a vu que : $\beta = f(\alpha)$ donc c'est une valeur atteinte et donc β est **le minimum** de cette fonction.	Si $a < 0$, alors $a(x-\alpha)^2 \leq 0$ donc, $a(x-\alpha)^2 + \beta \leq \beta$ Toutes les images sont donc inférieures ou égales à β. Si β admet un antécédent par la fonction $f : x \mapsto a(x-\alpha)^2 + \beta$ alors β est **le maximum** de cette fonction. Or, on a vu que : $\beta = f(\alpha)$ donc c'est une valeur atteinte et donc β est **le maximum** de cette fonction.

Si $a > 0$, a **positif**

x	$-\infty$		$\alpha = -\frac{b}{2a}$		$+\infty$
Variations de f		$\searrow$	min $= \beta$	$\nearrow$	

Si $a < 0$, a **négatif**

x	$-\infty$		$\alpha = -\frac{b}{2a}$		$+\infty$
Variations de f		$\nearrow$	Max $= \beta$	$\searrow$	

I 4 b Axe de symétrie de la parabole

PROPRIETE :

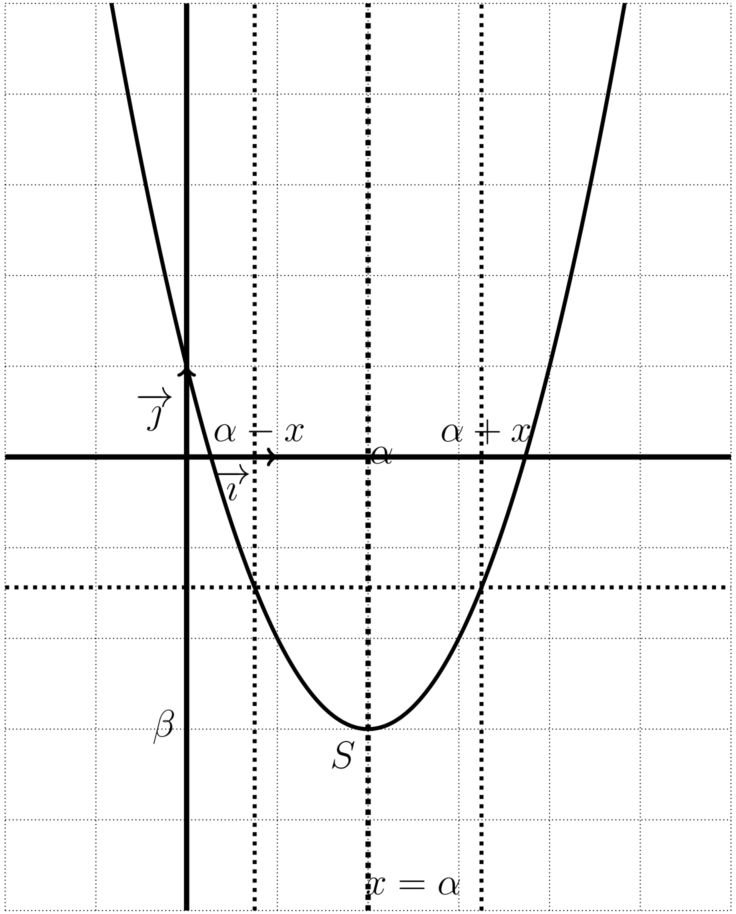
Soit a, α et β trois réels constants et $a \neq 0$.
La droite d'équation $x = \alpha$ est l'**axe de symétrie** de la parabole d'équation $y = a(x-\alpha)^2 + \beta$.

DEMONSTRATION :

(Dém3) Il s'agit de démontrer que pour tout x réel, $f(\alpha - x) = f(\alpha + x)$.

Or $f(\alpha - x) = a((\alpha - x) - \alpha)^2 + \beta = a(-x)^2 + \beta = ax^2 + \beta$.

Et $f(\alpha + x) = a((\alpha + x) - \alpha)^2 + \beta = a(x)^2 + \beta = ax^2 + \beta$.



II Résolution de l'équation de second degré

Prérequis sur les résolutions d'équation déjà connues :

1) $x^2 = 5$, 2) $3x^2 - 2x = 0$, 3) $-3(x+2)(x-5) = 0$, 4) $-4x^2 = 0$, 5) $(3x-2)^2 = 0$,

6) $x^2 - 2x + 1 = 0$, 7) $x^2 + 2 = 0$, 8) $(x-3)^2 + 5 = 0$, 9) $(x-3)^2 - 5 = 0$.

II 1 Résolution de l'équation de second degré

DEFINITION :

Soit a, b et c réels et $a \neq 0$.

Le **discriminant du polynôme** $ax^2 + bx + c$ est le nombre réel $\Delta = b^2 - 4ac$.

DEMONSTRATION :

Soit $ax^2 + bx + c = 0$ (1) avec $a \neq 0$

D'après ce qui précède, (cf. forme canonique) résoudre (1) c'est résoudre : $a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \left(\dfrac{\Delta}{4a^2}\right)\right] = 0$ (2)

• Si $\Delta = 0$, (2) équivaut à $a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 = 0 \iff x = -\dfrac{b}{2a}$ (une solution unique, dite solution « double » car annulant deux facteurs égaux). Dans ce cas, l'expression $ax^2 + bx + c$ est en fait une **identité remarquable** ...

• Si $\Delta > 0$, on factorise l'identité remarquable :

(2) équivaut à $a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \left(\dfrac{\Delta}{4a^2}\right)\right] = 0$

(2) équivaut à $a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \left(\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right] = 0$

(2) équivaut à $a\left(x+\dfrac{b}{2a}-\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\dfrac{b}{2a}+\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0$

(2) équivaut à $x = -\dfrac{b}{2a}+\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $x = -\dfrac{b}{2a}-\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}$

• Si $\Delta < 0$,

(2) équivaut à $a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \left(\dfrac{\Delta}{4a^2}\right)\right] = 0$

(2) équivaut à $a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 + \left(\dfrac{-\Delta}{4a^2}\right)\right] = 0$ et $-\Delta > 0$ et $4a^2 > 0$, l'expression ax^2+bx+c est **NON FACTORISABLE** !

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'admet donc aucune solution réelle.

PROPRIETE : - Théorème : Solutions d'une équation du second degré -

Soit a, b et c réels et $a \neq 0$. Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le **discriminant** du polynôme du second degré $ax^2 + bx + c$.

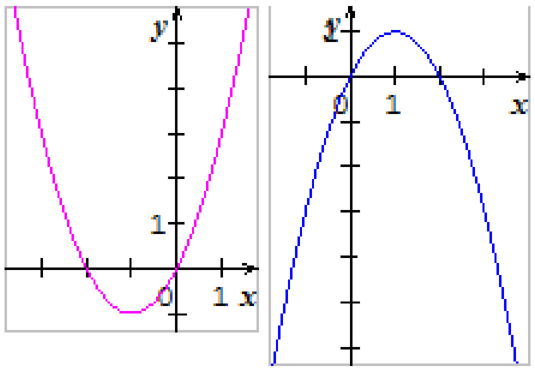
- Si $\Delta > 0$, alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet **deux solutions réelles** distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

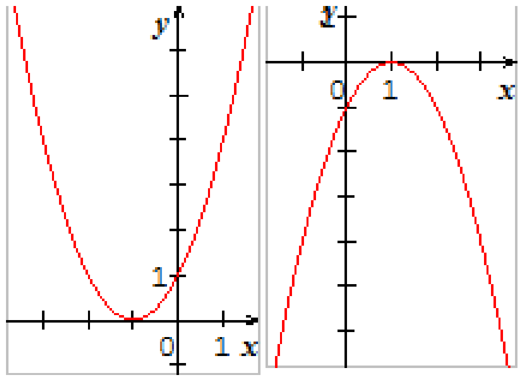
- Si $\Delta = 0$, alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet **une unique solution réelle** (dite solution double) : $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$.

- Si $\Delta < 0$, alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'a **pas de solution réelle**.

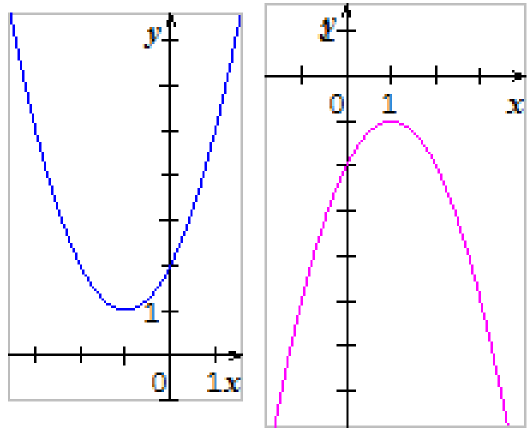
Illustration graphique de ce théorème : Les solutions, quand elles existent, de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ étant **les abscisses des points d'intersection entre la parabole d'équation** $y = ax^2 + bx + c$ **et l'axe des abscisses.**



$\Delta > 0$



$\Delta = 0$



$\Delta < 0$

Rédaction-type 1 : Résoudre les équations suivantes :

1. $x^2 - x - 1 = 0$ (E1)
   $x^2 - x - 1$ est un polynôme du second degré dont le discriminant Δ vaut $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 1 + 4 = 5$
   $\Delta > 0$, donc l'équation (E1) admet deux solutions réelles distinctes :
   $x_1 = \dfrac{-(-1) - \sqrt{5}}{2 \times 1} = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$

2. $x^2 + x + 1 = 0$ (E2)
   $x^2 + x + 1$ est un polynôme du second degré dont le discriminant Δ vaut $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = 1 - 4 = -3$
   $\Delta < 0$, donc l'équation (E2) n'admet aucune solution réelle.

3. $x^2 - 6x + 9 = 0$ (E3)
   $x^2 - 6x + 9$ est un polynôme du second degré dont le discriminant Δ vaut $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 9 = 36 - 36 = 0$ *(on n'a donc pas vu une IR)* $\Delta = 0$, donc l'équation (E3) admet une solution "double" $x_0 = \dfrac{-(-6)}{2 \times 1} = 3$

II 2 Racines d'un polynôme

DEFINITION :

Soit a, b et c réels et $a \neq 0$.

Une **racine du trinôme** $ax^2 + bx + c$ est une **solution de l'équation** $ax^2 + bx + c = 0$.

Attention au vocabulaire ! !

Exercice 1

Soit le polynôme $f(x) = x^2 + 3x - 10$. Calculer $f(2)$. Qu'en déduire ?

II 3 Factorisation d'un trinôme de second degré admettant des racines (une ou deux)

Si $\Delta \geqslant 0$, $ax^2 + bx + c = a\left(x + \dfrac{b}{2a} - \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \dfrac{b}{2a} + \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$

Et les solutions de l'équation associée sont : $x_1 = -\dfrac{b}{2a} + \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = -\dfrac{b}{2a} - \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}$

On a alors $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

PROPRIETE : - Théorème de factorisation -

Soit a, b et c réels et $a \neq 0$. Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant du polynôme du second degré $ax^2 + bx + c$.

- Si $\Delta > 0$, le trinôme de second degré $ax^2 + bx + c$ a **deux racines réelles distinctes**,

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et pour tout } x \text{ réel, } \boxed{ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)}.$$

- Si $\Delta = 0$, le trinôme de second degré $ax^2 + bx + c$ a une **racine double**,

$$x_0 = \frac{-b}{2a} \text{ et pour tout } x \text{ réel, } \boxed{ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2}.$$

- Dans le cas où $\Delta < 0$ le polynôme n'est **pas factorisable** dans $\mathbb{R}$.

II 4 Somme et produit des racines d'un polynôme de second degré

PROPRIETE : - Somme et produit des racines d'un polynôme de second degré -

Soit a, b et c réels et $a \neq 0$. Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant du polynôme du second degré $ax^2 + bx + c$.

Si $\Delta \geqslant 0$, alors le polynôme admet deux racines, x_1 et x_2, distinctes ou confondues, et :

La somme de ces racines est $x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a}$; **le produit** de ces racines est $x_1 \times x_2 = \dfrac{c}{a}$.

DEMONSTRATION :

On développe : $a(x - x_1)(x - x_2) = ax^2 - a(x_1 + x_2) + ax_1x_2$ et on identifie avec la forme développée du polynôme.

III Signe du trinôme

III 1 Étude du signe du trinôme

Soit a, b et c réels et $a \neq 0$.

• Si $\Delta > 0$, pour tout réel x, $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ où x_1 et x_2 sont les racines du trinôme.

On prend $x_1 < x_2$ (on peut choisir le **plus petit nombre** parmi les deux racines, et l'appeler x_1) et on fait un tableau de signes :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$x - x_1$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$x - x_2$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$a(x - x_1)(x - x_2)$		Signe de a	0	Signe de $(-a)$	0	Signe de a	

• Si $\Delta \leqslant 0$, pour tout réel x, $ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$ et donc pour tout x réel, $ax^2 + bx + c$ est du signe de a.

PROPRIETE : - Signe du trinôme -

Soit a, b et c réels et $a \neq 0$. Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant du polynôme du second degré $ax^2 + bx + c$.

• Si $\Delta < 0$ alors **pour tout x réel**, le trinôme $ax^2 + bx + c$ est du **signe de** a.

• Si $\Delta = 0$ alors, pour tout x réel **différent** de x_0, le trinôme $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$ est **du signe de a et s'annule en** $x = x_0 = -\dfrac{b}{2a}$.

• Si $\Delta > 0$ alors le trinôme $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ est :

* du signe de a, pour tout x situé « à l'extérieur des racines »
* du signe de $-a$, pour tout x situé « à l'intérieur des racines »
* s'annule quand $x = x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x = x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

III 2 Inéquation du second degré

DEFINITION :

Pour tous les réels a, b et c avec $a \neq 0$, une inéquation du second degré est une inéquation pouvant se mettre sous la forme :

$$ax^2 + bx + c > 0 \text{ ou } ax^2 + bx + c \geqslant 0 \text{ ou } ax^2 + bx + c < 0 \text{ ou } ax^2 + bx + c \leqslant 0.$$

Méthode : Pour résoudre une inéquation du second degré, on étudie le signe du trinôme associé.

Rédaction-type 2 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $3x^2 + 5x - 2 \geqslant 0$
2. $-x^2 + x - 7 > 0$

Exercice 2

Déterminer les ensembles de définitions des fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto \frac{1}{3x^2 - 18x - 21} \quad g : x \mapsto \sqrt{-2x^2 + x - 9} \quad h : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2}}$$