Proposition en mathématique :

Une **proposition** est un énoncé, une "phrase" (égalité, inégalité, affirmation, ...) qui peut être vraie ou fausse.

Exemples : " $x = -1$" ; "$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$" ; "$\dfrac{x-3}{x+2} \geqslant 2$".

L'équivalence :

Dire que deux propositions, P_1 et P_2, sont **équivalentes** signifie que :

P_1 entraine P_2 **ET**, **réciproquement**, P_2 entraine P_1.

P_1 entraine P_2 s'écrit $\boxed{P_1 \Longrightarrow P_2}$ et correspond à "si P_1 alors P_2".

P_1 équivaut à P_2 s'écrit $\boxed{P_1 \Longleftrightarrow P_2}$ **ou** $\boxed{P_1 \text{ ssi } P_2}$. (**ssi** : si et seulement si)

On a donc $\boxed{P_1 \Longleftrightarrow P_2}$ signifie $\boxed{P_1 \Longrightarrow P_2 \text{ et } P_2 \Longrightarrow P_1.}$

Les résolutions d'équations et d'inéquations se font par **équivalences** (on utilise alors le symbole $\Longleftrightarrow$).
Deux équations (respectivement inéquations) sont **équivalentes** ssi elles sont **définies sur le même ensemble** et qu'elles ont le **même ensemble de solutions**.

Exemples :

- $(x+3)(x-2) = 0 \Longleftrightarrow x+3 = 0$ **OU** $x-2 = 0$.
- $\dfrac{(x+2)(x-1)}{(x+2)} = 0 \Longleftrightarrow x-1 = 0$ **ET** $x+2 \neq 0$.
- $x^2 = 2$ **n'est pas** équivalent à $x = \sqrt{2}$.

En effet, les carrés de deux nombres sont égaux ssi ces deux nombres sont **ÉGAUX OU OPPOSES**.

Ainsi, $x^2 = 2 \Longleftrightarrow x = \sqrt{2}$ **ou** $x = -\sqrt{2}$.

Attention : $\dfrac{1-2x}{3+x} \leqslant 2$ n'est pas équivalent à $1 - 2x \leqslant 2(3+x)$.

On ne multiplie pas par $(3+x)$ dont on ne connait pas le signe. En effet, si $x = -5$ alors $3+x$ est strictement négatif et si on multiplie par un **nombre strictement négatif**, on **change** le sens de l'inégalité.

Attention, on ne confond pas "=" et "$\Longleftrightarrow$" !

"=" s'utilise entre deux nombres, deux expressions. Par exemple : pour tout x réel, on a $x^2+x-20=(x+5)(x-4)$.

"$\Longleftrightarrow$" s'utilise entre deux "phrases" (par exemple, des équations ou inéquations)

La rédaction :

• On répond toujours aux questions par une phrase à la fin de la résolution.

• On ne confond pas certaines notions :

Une **fonction** n'est pas une **courbe**. La fonction est croissante/décroissante, pas la courbe !
La **fonction** f n'est pas égale au **nombre** $f(x)$.
Un **nombre** n'est pas un **point**. Par exemple, un **maximum** est un **nombre**.

• La rédaction n'est pas du "blabla". Il faut être **PRÉCIS et CONCIS**.

Deux théorèmes d'algèbre à bien connaître :

$AB=0 \Longleftrightarrow A=0$ **OU** $B=0$.

$\dfrac{A}{B}=0 \Longleftrightarrow A=0$ **ET** $B\neq 0$.

Les quantificateurs "pour tout" et "il existe" :

• $\forall$ est le **quantificateur universel**. Il se lit "pour tout" ou "quel que soit".
En effet, la phrase : "$\forall x\in\mathbb{R}$, $x^2+x-20=(x+5)(x-4)$" signifie que l'égalité est vraie quelle que soit la valeur réelle prise par la variable x.

• $\exists$ est le **quantificateur existentiel**. Il se lit "il existe" (sous-entendu : **au moins un**).
En effet, la phrase : "$\exists x\in\mathbb{R}$ tq $x^2-5x+3=0$" signifie qu'il existe au moins un réel x tel que $x^2-5x+3=0$.
En l'occurrence, il y a deux réels qui conviennent : $\dfrac{5+\sqrt{13}}{2}$ et $\dfrac{5-\sqrt{13}}{2}$, c'est justement l'objet du 1er chapitre.