Calcul intégral

Analyse - Chapitre 8

Table des matières

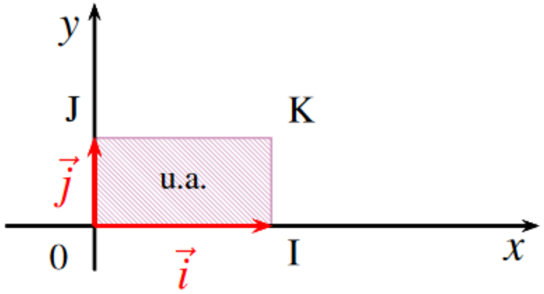
I Définition de l'intégrale d'une fonction

I 1 Intégrale d'une fonction continue et positive

I 1 a Unité d'aire

DEFINITION :

Soit $(O\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$ un repère **orthogonal** du plan.
L'**unité d'aire**, notée u.a, est **l'aire du rectangle unitaire** $OIKJ$ avec $\mathrm{I}(1;0)$, $\mathrm{J}(0;1)$ et $\mathrm{K}(1;1)$.



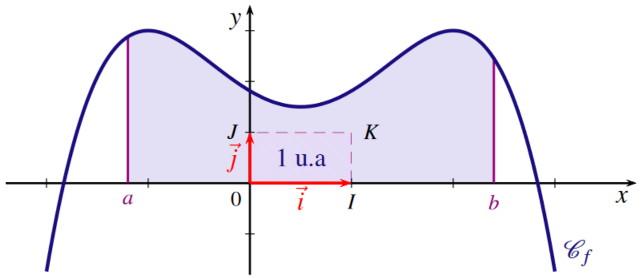
Exemples :
1) Pour une unité graphique de 2 cm en abscisse et 1 cm en ordonnée, l'unité d'aire vaut : 1 u.a.= 2 cm^2.
2) Pour une unité graphique de 2 cm en abscisse et en ordonnée, l'unité d'aire vaut : 1 u.a.= 4 cm^2.

I 1 b Définitions

DEFINITION : - Domaine situé sous la courbe -

Soit f une fonction définie, **continue et positive** sur un intervalle $[a\,;b]$ de $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère **orthogonal** du plan.

Le **domaine situé sous la courbe** $\mathcal{C}_f$ est le domaine situé entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$.



DEFINITION : - Intégrale d'une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;b]$ (on a donc : $a < b$) -

Soit f une fonction **définie, continue et positive** sur un intervalle $[a;b]$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O\,; \overrightarrow{\imath}\,, \overrightarrow{\jmath}\,)$.

L'intégrale de f entre a et b est le nombre qui exprime **l'aire**, en unités d'aire, **du domaine situé sous la courbe** $\mathcal{C}_f$. Ce nombre est noté : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

REMARQUE(S) :

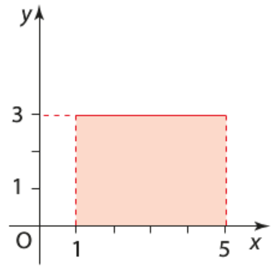
- $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ se lit « intégrale de a à b de $f(x)\mathrm{d}x$ » ou encore « somme de a à b de $f(x)\mathrm{d}x$ ».
- Les réels a et b sont appelés les **bornes** de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.
- La variable x est dite « **muette** », elle n'intervient pas dans le résultat. C'est à dire qu'on peut la remplacer par n'importe quelle autre variable distincte des lettres a et b : $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\mathrm{d}u$
- $\displaystyle\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$, car le domaine sous la courbe est alors réduit à un segment.

I 1 c Exemples

Exercice 1 - Cas d'une fonction constante -

f est une fonction constante sur l'intervalle $[1\,;5]$ dont on donne la représentation graphique ci-contre.

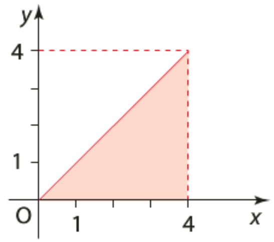
Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_1^5 f(x)\mathrm{d}x$.



Exercice 2 - Cas d'une fonction affine -

f est une fonction affine sur l'intervalle $[0\,;4]$ dont on donne la représentation graphique ci-contre.

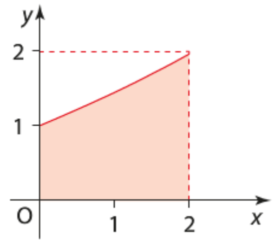
Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x$.



Exercice 3 - Cas d'une fonction affine bis -

f est une fonction affine sur l'intervalle $[0\,;2]$ dont on donne la représentation graphique ci-contre.

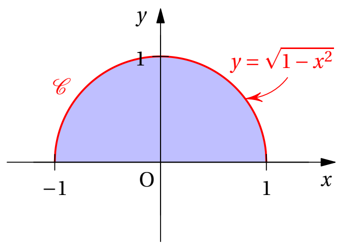
Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$.



Exercice 4

La courbe $\mathcal{C}$ d'équation $y = \sqrt{1-x^2}$ est définie par les conditions $y \geqslant 0$ et $x^2+y^2=1$.
$\mathcal{C}$ est donc la moitié supérieure du cercle de centre O et de rayon 1. Par conséquent :

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} .$$



Exercice 5 - Approximation d'une aire par la méthode des rectangles, puis passage à la limite. Comment calculer $\displaystyle\int_0^1 e^x \mathrm{d}x$? -

On partage l'intervalle $[0\ ;1]$ en n intervalles de même longueur $\dfrac{1}{n}$. L'aire sous la courbe de la fonction exp entre 0 et 1, $\displaystyle\int_0^1 e^x \mathrm{d}x$, est encadrée par deux sommes d'aires de rectangles telles que : $m_1 + m_2 + ...m_n \leqslant \displaystyle\int_0^1 e^x \mathrm{d}x \leqslant M_1 + M_2 + ...M_n$.

Avec $m_1 = \dfrac{1}{n}$, $m_2 = \dfrac{1}{n} \times \mathrm{e}^{\frac{1}{n}}$, ..., $m_n = \dfrac{1}{n} \times \mathrm{e}^{\frac{n-1}{n}}$. Et $M_1 = m_2$, $M_2 = m_3$, ..., $M_n = \dfrac{1}{n} \times \mathrm{e}^1$. Plus n sera grand et plus la précision sera bonne.

Ainsi on a : $\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n}\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} + \dfrac{1}{n}\mathrm{e}^{\frac{2}{n}} + ... + \dfrac{1}{n}\mathrm{e}^{\frac{n-1}{n}} \leqslant \displaystyle\int_0^1 e^x \mathrm{d}x \leqslant \dfrac{1}{n}\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} + \dfrac{1}{n}\mathrm{e}^{\frac{2}{n}} + ... + \dfrac{1}{n}\mathrm{e}^1$

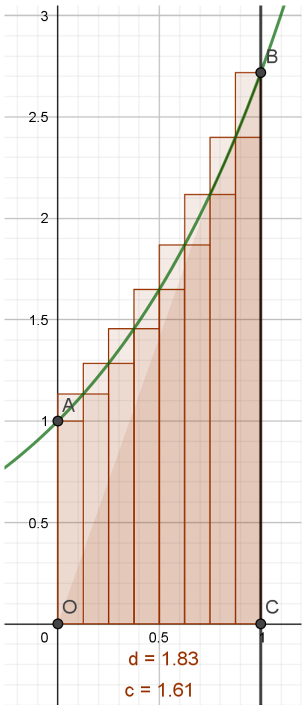
$$\frac{1}{n}\left[1 + \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} + \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\right)^2 + ... + \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1}\right] \leqslant \int_0^1 e^x \mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n}\left[\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} + \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\right)^2 + ... + \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\right)^n\right]$$

$$\frac{1}{n} \times \frac{1 - \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\right)^n}{1 - \mathrm{e}^{\frac{1}{n}}} \leqslant \int_0^1 e^x \mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n} \times \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} \times \frac{1 - \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\right)^n}{1 - \mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}$$

$$\frac{1}{n} \times \frac{1 - \mathrm{e}}{1 - \mathrm{e}^{\frac{1}{n}}} \leqslant \int_0^1 e^x \mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n} \times \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} \times \frac{1 - \mathrm{e}}{1 - \mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}$$

$\boxed{(\mathrm{e} - 1)\dfrac{1}{\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n} - 0}} \leqslant \displaystyle\int_0^1 e^x \mathrm{d}x \leqslant \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} \times (\mathrm{e} - 1)\dfrac{1}{\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n} - 0}}}$ Or $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\displaystyle\lim_{N \to 0} \frac{\mathrm{e}^N - 1}{N - 0} = \exp'(0) = 1$

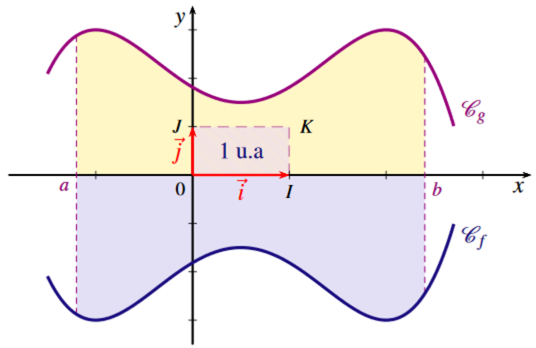
donc par composition $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n} - 0} = 1$. Donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} (\mathrm{e} - 1)\frac{1}{\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n} - 0}} = \mathrm{e} - 1$, comme $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} = 1$



on a aussi $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{n}}(\mathrm{e}-1)\dfrac{1}{\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}-0}} = \mathrm{e}-1$. Donc, en application du théorème des gendarmes, on obtient : $\lim\limits_{n \to +\infty} \displaystyle\int_0^1 e^x \mathrm{d}x = \mathrm{e}-1$

et comme $\displaystyle\int_0^1 e^x \mathrm{d}x$ ne dépend pas de n on a donc : $\boxed{\displaystyle\int_0^1 e^x \mathrm{d}x = \mathrm{e}-1}$

I 2 Intégrale d'une fonction continue et négative



Si f est une fonction **continue et négative** sur un intervalle $[a;b]$ alors, la fonction g définie sur l'intervalle $[a;b]$ par $g=-f$ est une fonction **continue et positive** sur cet intervalle.

Par symétrie par rapport à l'axe des abscisses, l'aire du domaine $\mathcal{D}_f$ compris entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ est **égale** à l'aire du domaine $\mathcal{D}_g$ compris entre la courbe $\mathcal{C}_g$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$.

DEFINITION :

Soit a et b deux réels tels que $a<b$.
Soit f une fonction **définie, continue et négative** sur un intervalle $[a;b]$
et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O\,;\overrightarrow{\imath}\,,\overrightarrow{\jmath})$.

L'intégrale de la fonction f entre a et b est égale à l'**opposé** de l'aire $\mathcal{A}$, exprimée en unités d'aire, du domaine $\mathcal{D}_f$ compris entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=-\mathcal{A}$$

On dit aussi que $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ est l'**aire algébrique** de ce domaine.

I 3 Intégrale d'une fonction continue et changeant de signe sur $[a\,;b]$

DEFINITION :

Soit f une fonction continue, de signe quelconque sur $[a\,;b]$, avec a et b deux réels.

On note $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ la **somme** des **aires algébriques** des domaines définis à partir des intervalles sur lesquels f garde un signe constant.

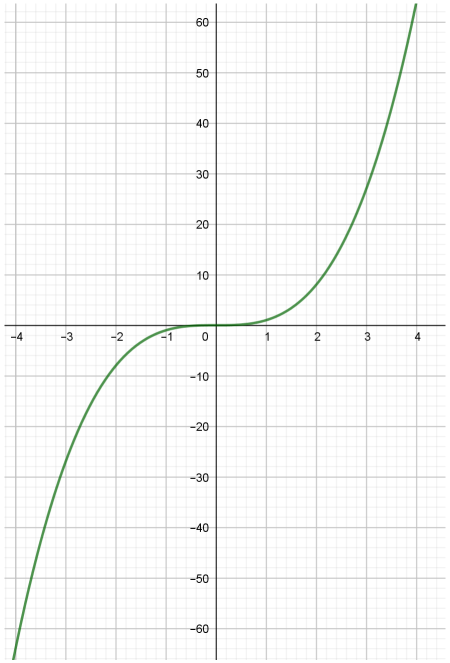
Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $[0\,;6]$ par $f(x) = \dfrac{1}{2}x - 2$.

1. Tracer la courbe représentative de f.
2. Calculer $\displaystyle\int_0^6 f(x)\mathrm{d}x$.

Exercice 7

Calculer $\displaystyle\int_{-3}^3 f(x)\mathrm{d}x$.



II Lien entre primitive et intégrale

II 1 Théorème fondamental et lien entre primitive et intégrale

PROPRIETE : - Théorème fondamental -

Soit f une fonction **définie, continue et positive** sur un intervalle $[a;b]$.

Alors la fonction F définie sur $[a;b]$ par $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est **l'unique** primitive de f qui s'annule en a.

DEMONSTRATION :

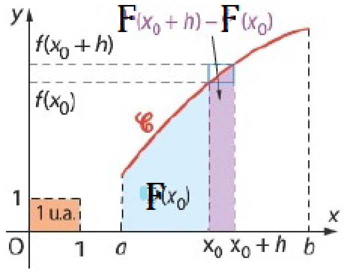
♡ Bac ♡

Théorème admis dans le cas général.

On le démontre ici dans le cas particulier où f est **croissante** sur l'intervalle $[a\,;b]$.

Soit F la fonction définie sur $[a;b]$ par $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$.

f étant continue et positive sur $[a\,;b]$, F est par définition une fonction **"aire sous la courbe"** de la fonction f sur $[a\,;x]$.



Soit $x_0 \in [a\,;b]$ et h un réel tel que $x_0 + h \in [a\,;b]$.

• si $h > 0$:

Comme f est croissante, $\quad f(x_0) \leqslant f(x_0 + h)$

et on sait que $F(x_0 + h) - F(x_0)$ exprime **l'aire** sous la courbe de f sur $[x_0\,;x_0 + h]$.

On encadre cette aire par celles des deux **rectangles** de même largeur h et de hauteurs $f(x_0)$ et $f(x_0 + h)$:

$h \times f(x_0) \leqslant F(x_0 + h) - F(x_0) \leqslant h \times f(x_0 + h)$ d'où $f(x_0) \leqslant \dfrac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} \leqslant f(x_0 + h)$.

Or f est continue en x_0, donc $\lim\limits_{h \to 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$.

ainsi, d'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = f(x_0)$.

Par suite, F est dérivable en x_0 et $F'(x_0) = f(x_0)$.

Comme ce résultat est vrai pour tout x_0 de l'intervalle $[a\,;b]$, F **est donc dérivable sur** $[a\,;b]$ **et** $F' = f$.

• si $h < 0$: démonstration analogue à faire en exercice.

Donc F est une primitive de f sur l'intervalle $[a\,;b]$.
Et $\displaystyle\int_a^a f(t)\mathrm{d}t = 0$. Ainsi F est **la** primitive de f **s'annulant** en a, sur $[a\,;b]$.

II 2 Démonstration du théorème sur l'existence de primitive pour toute fonction continue (cf. chap A7)

PROPRIETE :

Toute fonction f **continue** sur un intervalle I admet **des** primitives sur I.

DEMONSTRATION :

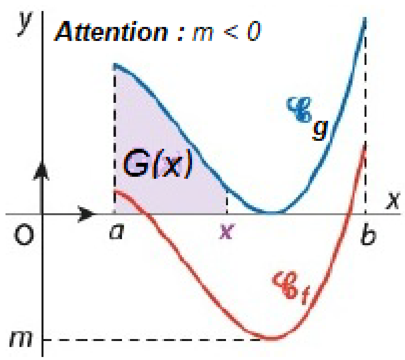
• D'après le théorème fondamental, si f est une fonction **définie, continue et positive** sur un intervalle $[a;b]$, on peut définir une nouvelle fonction F qui à tout réel x de l'intervalle $[a;b]$, associe l'intégrale de f entre a et x : $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$.

La fonction F est dérivable sur $[a;b]$ et a pour dérivée f.
L'existence d'une primitive est donc prouvée dans le cas où f est positive.

• **Cas où f n'est pas positive, mais étude sur un intervalle I FERME :**

On se place dans le cas où I est un intervalle fermé $[a\,;b]$.
On admet le résultat suivant : **Toute fonction continue sur un intervalle fermé $[a\,;b]$ admet un minimum et un maximum sur $[a\,;b]$.**

Soit f une fonction continue sur I et m son minimum sur I. Alors pour tout réel x de I, $f(x) - m \geqslant 0$.



Soit g la fonction $x \mapsto f(x) - m$. g est continue et positive sur I donc il existe une fonction G définie sur I telle que pour tout x de I, $G'(x) = g(x) = f(x) - m$.

Alors la fonction $F : x \mapsto G(x) + mx$ est dérivable sur I et $F'(x) = G'(x) + m = f(x)$.

Ainsi on a montré que F est une primitive de f sur I.

II 3 Calcul d'une intégrale à l'aide d'une primitive

REMARQUE(S) :

Le théorème fondamental est également vrai dans le cas d'une fonction continue de signe quelconque. On l'admet.

PROPRIETE : - Calcul d'une intégrale avec une primitive -

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, soit F une primitive de f sur I et soit a et b deux réels de I.

L'intégrale de f entre a à b est le nombre réel égal à $F(b) - F(a)$; ainsi, $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.

On **notera** : $\boxed{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)}$

DEMONSTRATION :

♡ Bac ♡

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, soit F une primitive de f sur I.

D'après le théorème précédent, on sait qu'il existe une primitive G de f sur I telle que $G(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$.

Ainsi, il existe un réel c tel que : $G(x) + c = F(x)$.

Or $G(a) = \int_a^a f(t)\mathrm{d}t = 0$ donc $F(a) = c$, et $G(b) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ donc $F(b) = G(b) + c = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t + F(a)$.

Exercice 8

Calculer les intégrales suivantes : 1. $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin t \ \mathrm{d}t$ 2. $\displaystyle\int_0^{3} x \ \mathrm{d}x$ 3. $\displaystyle\int_2^{-1} \mathrm{e}^t \ \mathrm{d}t$ 4. $\displaystyle\int_1^{3} \frac{1}{t^2} \ \mathrm{d}t$ 5. $\displaystyle\int_2^{3} \frac{\ln x}{x} \ \mathrm{d}x$

III Propriétés des intégrales

III 1 Propriétés algébriques

PROPRIETE : - Premières propriétés -

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. a et b deux réels appartenant à I.

$$\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0 \qquad \text{et} \qquad \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$$

DEMONSTRATION :

Soit F une primitive de f sur I.

- $\displaystyle\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = F(a) - F(a) = 0$
- $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$ et $\displaystyle\int_b^a f(x)\mathrm{d}x = F(a) - F(b)$

PROPRIETE : - Relation de Chasles -

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Pour tous réels a, b et c appartenant à I

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

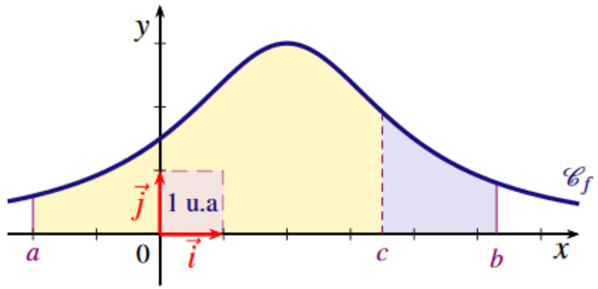
DEMONSTRATION :

Soit F une primitive de f sur I. Pour tous réels a, b et c appartenant à I

$$\begin{aligned}\int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x &= (F(c) - F(a)) + (F(b) - F(c)) \\ &= F(b) - F(a) \\ &= \int_a^b f(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Interprétation graphique : Dans le cas où f est une fonction continue et positive sur $[a;b]$.

L'aire du domaine compris entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est égale à la somme des aires du domaine compris entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = c$ et du domaine compris entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = c$ et $x = b$.



PROPRIETE : - Linéarité -

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Pour tous réels a et b appartenant à I, et pour tout réel α

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad \int_a^b \alpha f(x)\mathrm{d}x = \alpha\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

DEMONSTRATION :

1. Si F et G sont deux primitives respectives des fonctions f et g sur I, alors $F+G$ est une primitive sur I de la fonction $f+g$.

$$\begin{aligned}\int_a^b (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x &= (F(b)+G(b))-(F(a)+G(a))\\ &= (F(b)-F(a))+(G(b)-G(a))\\ &= \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

2. Soit F une primitive de f sur I et α un réel.

$$\begin{aligned}\int_a^b \alpha f(t)\mathrm{d}t &= \alpha F(b) - \alpha F(a)\\ &= \alpha\,(F(b)-F(a))\\ &= \alpha\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Exercice 9

$I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 x \, \mathrm{d}x$ et $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x \, \mathrm{d}x$.

1. Calculer $I + J$ et $I - J$.
2. En déduire I et J.

III 2 Intégrales et inégalités

PROPRIETE : - Positivité -

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux réels appartenant à I.

Si $a \leqslant b$ et $f \geqslant 0$ sur l'intervalle $[a;b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$.

DEMONSTRATION :

Soit F une primitive de f sur I. Pour tout réel x de l'intervalle I, $F'(x) = f(x)$. Or $f \geqslant 0$ sur l'intervalle $[a;b]$ donc F est croissante sur $[a;b]$.

Par conséquent, si $a \leqslant b$, alors $F(a) \leqslant F(b)$. On en déduit que $F(b) - F(a) \geqslant 0$ et $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$.

Attention la réciproque est fausse :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 3x + 1$

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{3} \left(-x^2 + 3x + 1\right)\, \mathrm{d}x &= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 + x\right]_{-2}^{3} \\ &= \left(-9 + \frac{27}{2} + 3\right) - \left(\frac{8}{3} + 6 - 2\right) = \frac{5}{6}\end{aligned}$$

Ainsi $\displaystyle\int_{-2}^{3} f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$ mais $f(-1) = -3$.

On démontre de manière analogue la propriété suivante :

PROPRIETE :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux réels appartenant à I.

Si $a \leqslant b$ et $f \leqslant 0$ sur l'intervalle $[a;b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant 0$.

PROPRIETE : - Ordre -

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, a et b deux réels appartenant à I tels que $a \leqslant b$.

Si pour tout réel x appartenant à $[a;b]$, $f(x) \leqslant g(x)$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$

DEMONSTRATION :

Si pour tout réel x appartenant à $[a;b]$, $f(x) \leqslant g(x)$, alors $f(x) - g(x) \leqslant 0$. Comme f et g sont deux fonctions continues sur $[a;b]$, la fonction $f - g$ est continue sur $[a;b]$.
Par conséquent, si $a \leqslant b$ et $f - g \leqslant 0$ alors

$$\int_a^b (f-g)(x)\mathrm{d}x \leqslant 0 \Leftrightarrow \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\mathrm{d}x \leqslant 0$$

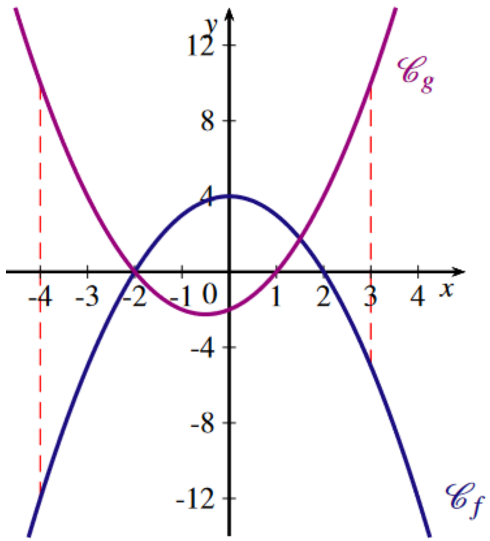
Attention la réciproque est fausse :

Considérons les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4 - x^2$ et $g(x) = x^2 + x - 2$.

$$\begin{aligned}\int_{-4}^{3} \left(4 - x^2\right) \mathrm{d}x &= \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{-4}^{3} \\ &= \left(12 - \frac{27}{3}\right) - \left(-16 + \frac{64}{3}\right) \\ &= -\frac{7}{3}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\int_{-4}^{3} \left(x^2 + x - 2\right) \mathrm{d}x &= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x\right]_{-4}^{3} \\ &= \left(\frac{27}{3} + \frac{9}{2} - 6\right) - \left(-\frac{64}{3} + \frac{16}{2} + 8\right) \\ &= \frac{77}{6}\end{aligned}$$



IV Applications du calcul intégral

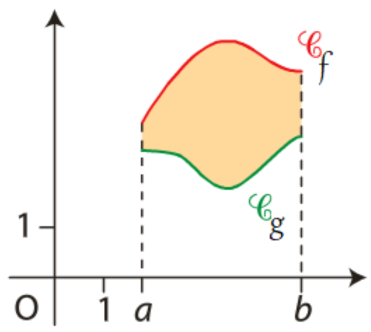
IV 1 Aire du domaine délimité par deux courbes représentatives de fonctions

PROPRIETE :

f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle $[a\,;b]$, telles que pour tout x de $[a\,;b]$, $f(x) \geqslant g(x)$.

L'aire en unité d'aire du domaine délimité par les courbes représentatives de f et de g sur l'intervalle $[a\,;b]$ est égale à

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\mathrm{d}x = \int_a^b (f(x) - g(x))\mathrm{d}x.$$



DEMONSTRATION :

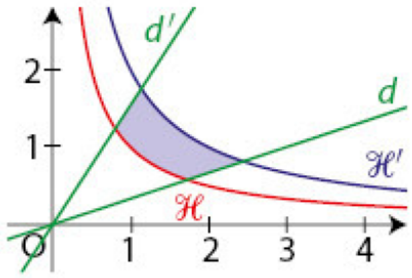
(Dans le cas où les fonctions f et g sont positives sur l'intervalle $[a\,;b]$)
Pour tout $x \in [a\,;b]$, $f(x) \geqslant g(x)$, donc l'aire entre les deux courbes est la différence entre l'aire sous la courbe de f et celle sous la courbe de g, soit $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\mathrm{d}x = \int_a^b (f(x) - g(x))\mathrm{d}x$ (d'après la propriété de linéarité).

REMARQUE(S) :

Par translation, le domaine entre les deux courbes ne change pas donc son aire non plus.
Ainsi, si f et g ne sont pas positives, il suffit d'appliquer une translation de vecteur $|k|\overrightarrow{\jmath}$, où k est le minimum de g sur $[a\,;b]$.

Exercice 10

Soit a et b deux nombres réels strictement positifs tels que $a < b$. On considère les droites d et d' d'équations respectives $y = ax$ et $y = bx$ dans un repère orthonormé.
Soit f et g deux fonctions définies sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ et $g(x) = \dfrac{2}{x}$ de courbes respectives $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$.
Exprimer en fonction de a et b, en u.a., l'aire du domaine coloré ci-dessous.



IV 2 Valeur moyenne d'une fonction continue

DEFINITION :

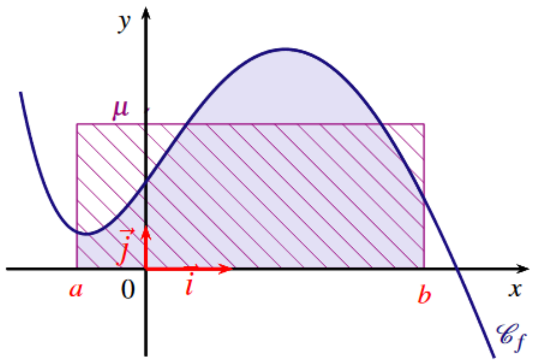
Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle $[a;b]$ de $\mathbb{R}$ ($a < b$).

On appelle valeur moyenne de f sur $[a;b]$ le réel $\mu = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

Interprétation graphique : Dans le cas où f est une fonction continue et positive sur $[a;b]$

L'aire du domaine compris entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est égale à l'aire du rectangle de côtés μ et $b - a$.

Ainsi, le nombre μ peut être interprété comme la **hauteur du rectangle** construit sur $[a;b]$ et ayant la **même aire** que le domaine situé sous la courbe $\mathcal{C}_f$.



Exercice 11

1. Tracer la courbe représentative de la fonction f définie sur $[-2\ ;1]$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$. Vous prendrez deux carreaux comme unité de longueur sur chaque axe.
2. Calculer la valeur moyenne μ de la fonction f sur $[-2\ ;1]$.
3. Interpréter graphiquement μ.

IV 3 Inégalité de la moyenne

PROPRIETE :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a et b deux réels de I tels que $a < b$.
Soit m et M deux réels tels que pour tout $x \in [a\,;b]$, $m \leqslant f(x) \leqslant M$.

On a alors : $m(b-a) \leqslant \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M(b-a)$.

DEMONSTRATION :

$\forall x \in [a\,;b]$, $m \leqslant f(x) \leqslant M$.

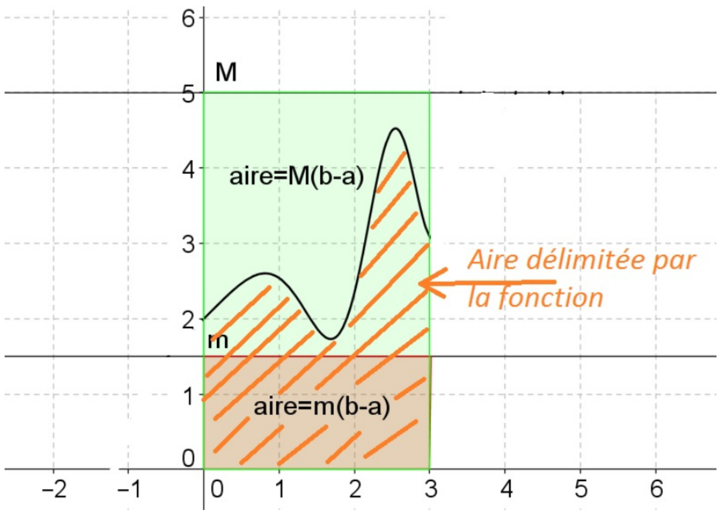
Les fonctions constantes définies sur $[a\,;b]$ par $x \mapsto m$ et $x \mapsto M$ sont telles que $\displaystyle\int_a^b m\ \mathrm{d}x = m(b-a)$ et $\displaystyle\int_a^b M\ \mathrm{d}x = M(b-a)$

Ainsi en appliquant la propriété précédente (ordre III 2) :

$$\int_a^b m\ \mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \leqslant \int_a^b M\ \mathrm{d}x \quad \text{soit} \quad \boxed{m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \leqslant M(b-a)}$$

Interprétation dans le cas d'une fonction positive :

Si f est bornée sur $[a\,;b]$ par deux constantes m et M positives, alors l'inégalité de la moyenne signifie que l'aire sous la courbe C_f sur $[a\,;b]$ est comprise entre les aires des rectangles construits sur $[a\,;b]$ et de hauteurs respectives m et M.



REMARQUE(S) :

Encadrement de la valeur moyenne
En divisant chaque membre par le nombre strictement positif $(b-a)$ on obtient un encadrement de la valeur moyenne de f sur $[a\,;b]$:

$$m \leqslant \mu \leqslant M.$$

V Intégration par parties

PROPRIETE : - Intégration par parties -

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et dont les dérivées u' et v' sont continues sur I. Soit a et b deux réels de I. Alors :

$$\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x$$

DEMONSTRATION :

♡ Bac ♡

Comme u et v sont dérivables sur I, leur produit l'est également et l'on a $(uv)' = u'v + uv'$ (cours dérivation de première)

Comme u et v sont dérivables sur I, elles sont donc continues sur I et donc les fonctions $(uv)'$, $u'v$ et uv' le sont également et admettent donc des primitives sur I.

Ainsi, $\displaystyle\int_a^b (uv)'(x)\mathrm{d}x = \int_a^b [(u'v)(x) + (uv')(x)]\,\mathrm{d}x$

soit $\displaystyle[(uv)(x)]_a^b = \int_a^b (u'v)(x)\mathrm{d}x + \int_a^b (uv')(x)\mathrm{d}x$ (linéarité de l'intégrale)

Ainsi, $\displaystyle[u(x)v(x)]_a^b = \int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x + \int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x$ càd $\displaystyle\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x$.

Exercice 12

Calculer $\displaystyle\int_{-1}^{0} x\,\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 13

1. Montrer que $\displaystyle\int_{0}^{\mathrm{e}-1} \frac{1}{1+x}\mathrm{d}x = 1$.
2. Calculer ensuite $\displaystyle\int_{0}^{\mathrm{e}-1} \frac{x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$.

Exercice 14 Questions indépendantes

1. Calculer $\displaystyle\int_{1}^{\mathrm{e}} x^2 \ln(x)\mathrm{d}x$.
2. Calculer $\displaystyle\int_{0}^{1} x\cos(x)\mathrm{d}x$.

Exercice 15 - Intégrales de Wallis (mi 17ès, inventeur du symbole infini) -

Soit $n \in \mathbb{N}$ et les intégrales : $I_n = \displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\mathrm{d}x$ et $J_n = \displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\mathrm{d}x$.

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, $nI_n = (n-1)I_{n-2}$ (IPP).
3. Déduire du résultat précédent I_2.
4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = J_n$ (changement de variable, HP).