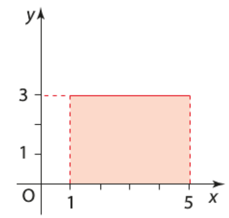
Exercice 1 - Cas d'une fonction constante -

f est une fonction constante sur l'intervalle $[1\,;5]$ dont on donne la représentation graphique ci-contre.

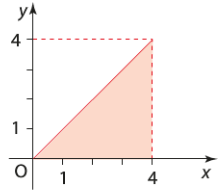
Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_1^5 f(x)\mathrm{d}x$.



Exercice 2 - Cas d'une fonction affine -

f est une fonction affine sur l'intervalle $[0\,;4]$ dont on donne la représentation graphique ci-contre.

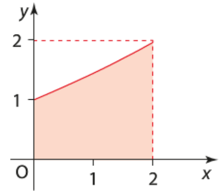
Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x$.



Exercice 3 - Cas d'une fonction affine bis -

f est une fonction affine sur l'intervalle $[0\,;2]$ dont on donne la représentation graphique ci-contre.

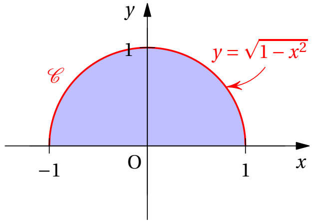
Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$.



Exercice 4

La courbe $\mathcal{C}$ d'équation $y=\sqrt{1-x^2}$ est définie par les conditions $y \geqslant 0$ et $x^2+y^2=1$.
$\mathcal{C}$ est donc la moitié supérieure du cercle de centre O et de rayon 1. Par conséquent :

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\ .$$



Exercice 5 - Approximation d'une aire par la méthode des rectangles, puis passage à la limite. Comment calculer $\int_0^1 e^x \mathrm{d}x$? -

On partage l'intervalle $[0\,;1]$ en n intervalles de même longueur $\frac{1}{n}$. L'aire sous la courbe de la fonction exp entre 0 et 1, $\int_0^1 e^x \mathrm{d}x$, est encadrée par deux sommes d'aires de rectangles telles que : $m_1 + m_2 + ...m_n \leqslant \int_0^1 e^x \mathrm{d}x \leqslant M_1 + M_2 + ...M_n$.

Avec $m_1 = \frac{1}{n}$, $m_2 = \frac{1}{n} \times \mathrm{e}^{\frac{1}{n}}$, ..., $m_n = \frac{1}{n} \times \mathrm{e}^{\frac{n-1}{n}}$. Et $M_1 = m_2$, $M_2 = m_3$, ..., $M_n = \frac{1}{n} \times \mathrm{e}^1$. Plus n sera grand et plus la précision sera bonne.

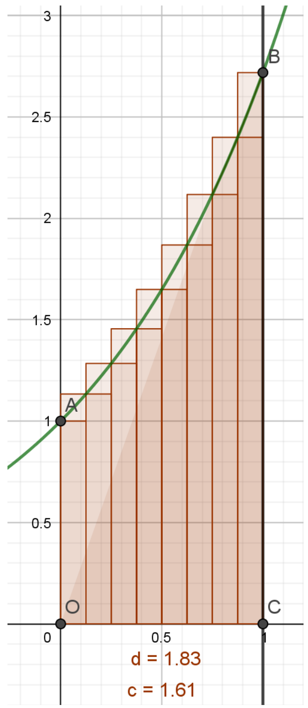
Ainsi on a : $\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} + \frac{1}{n}\mathrm{e}^{\frac{2}{n}} + ... + \frac{1}{n}\mathrm{e}^{\frac{n-1}{n}} \leqslant \int_0^1 e^x \mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n}\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} + \frac{1}{n}\mathrm{e}^{\frac{2}{n}} + ... + \frac{1}{n}\mathrm{e}^1$

$$\frac{1}{n}\left[1 + \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} + \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\right)^2 + ... + \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1}\right] \leqslant \int_0^1 e^x \mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n}\left[\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} + \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\right)^2 + ... + \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\right)^n\right]$$

$$\frac{1}{n} \times \frac{1 - \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\right)^n}{1 - \mathrm{e}^{\frac{1}{n}}} \leqslant \int_0^1 e^x \mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n} \times \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} \times \frac{1 - \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\right)^n}{1 - \mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}$$

$$\frac{1}{n} \times \frac{1 - \mathrm{e}}{1 - \mathrm{e}^{\frac{1}{n}}} \leqslant \int_0^1 e^x \mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n} \times \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} \times \frac{1 - \mathrm{e}}{1 - \mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}$$

$$\boxed{(\mathrm{e}-1)\frac{1}{\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}-0}} \leqslant \int_0^1 e^x \mathrm{d}x \leqslant \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} \times (\mathrm{e}-1)\frac{1}{\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}-0}}}$$

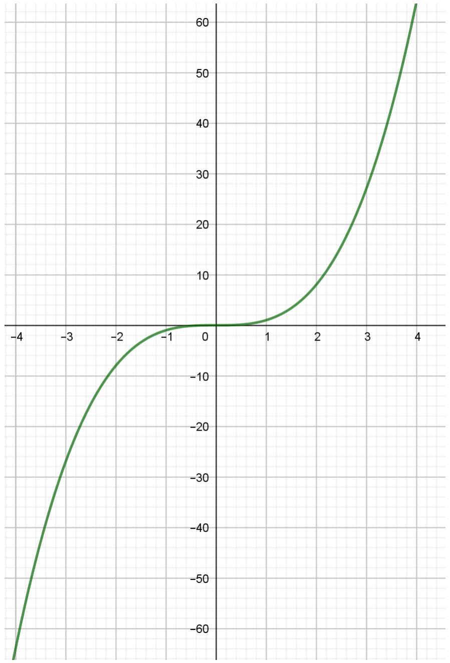


Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{N\to 0} \frac{\mathrm{e}^N - 1}{N - 0} = \exp'(0) = 1$ donc par composition $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n} - 0} = 1$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (\mathrm{e}-1)\frac{1}{\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}-0}} = \mathrm{e}-1$ comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} = 1$ on a aussi $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{n}}(\mathrm{e}-1)\frac{1}{\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}-0}} = \mathrm{e}-1$

Donc, en application du théorème des gendarmes, on obtient : $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 e^x \mathrm{d}x = \mathrm{e}-1$ et comme $\int_0^1 e^x \mathrm{d}x$ ne dépend pas de n on a donc :

$$\boxed{\int_0^1 e^x \mathrm{d}x = \mathrm{e}-1}$$



Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $[0\,;6]$ par $f(x)=\dfrac{1}{2}x-2$.

1. Tracer la courbe représentative de f.
2. Calculer $\displaystyle\int_0^6 f(x)\mathrm{d}x$.

Exercice 7

Calculer $\displaystyle\int_{-3}^{3} f(x)\mathrm{d}x$.

Exercice 8

Calculer les intégrales suivantes : 1. $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin t\ \mathrm{d}t$ 2. $\displaystyle\int_0^{3} x\ \mathrm{d}x$ 3. $\displaystyle\int_2^{-1} \mathrm{e}^t\ \mathrm{d}t$ 4. $\displaystyle\int_1^{3} \frac{1}{t^2}\ \mathrm{d}t$ 5. $\displaystyle\int_2^{3} \frac{\ln x}{x}\ \mathrm{d}x$

Exercice 9

$I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 x\ \mathrm{d}x$ et $J=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x\ \mathrm{d}x$.

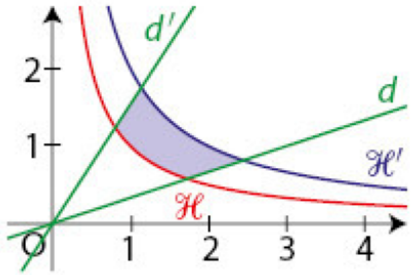
1. Calculer $I+J$ et $I-J$.
2. En déduire I et J.

Exercice 10

Soit a et b deux nombres réels strictement positifs tels que $a < b$. On considère les droites d et d' d'équations respectives $y = ax$ et $y = bx$ dans un repère orthonormé.

Soit f et g deux fonctions définies sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ et $g(x) = \dfrac{2}{x}$ de courbes respectives $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$.

Exprimer en fonction de a et b, en u.a., l'aire du domaine coloré ci-dessous.



Exercice 11

1. Tracer la courbe représentative de la fonction f définie sur $[-2\,;1]$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$. Vous prendrez deux carreaux comme unité de longueur sur chaque axe.
2. Calculer la valeur moyenne μ de la fonction f sur $[-2\,;1]$.
3. Interpréter graphiquement μ.

Exercice 12

Calculer $\displaystyle\int_{-1}^{0} x\,\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 13

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^{\mathrm{e}-1} \frac{1}{1+x}\mathrm{d}x = 1$.
2. Calculer ensuite $\displaystyle\int_0^{\mathrm{e}-1} \frac{x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$.

Exercice 14 Questions indépendantes

1. Calculer $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} x^2 \ln(x)\mathrm{d}x$.
2. Calculer $\displaystyle\int_0^{1} x \cos(x)\mathrm{d}x$.

Exercice 15 - Intégrales de **Wallis** (mi 17ès, inventeur du symbole infini) -

Soit $n \in \mathbb{N}$ et les intégrales : $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\mathrm{d}x$ et $J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\mathrm{d}x$.

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, $nI_n = (n-1)I_{n-2}$ (IPP).
3. Déduire du résultat précédent I_2.
4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = J_n$ (changement de variable, HP).