Primitives et Équations différentielles

Analyse - Chapitre 7

Table des matières

I Équation différentielle $y' = f$ et primitives **1**

I 1 Notion d'équation différentielle 1

I 2 Primitives d'une fonction continue sur un intervalle 1

I 3 Théorème : Fonction continue 2

I 4 Ensemble des primitives d'une fonction 2

I 5 Recherche de primitives 5

II Équation différentielle $y' = ay$ **7**

III Équation différentielle $y' = ay + b$ **9**

IV Équation différentielle $y' = ay + f$ **11**

I Équation différentielle $y' = f$ et primitives

I 1 Notion d'équation différentielle

DEFINITION :

Une **équation différentielle** est une équation dont l'**inconnue** est une **fonction** (notée le plus souvent y) et dans laquelle peuvent apparaître les **dérivées** de la fonction (dérivée première y', dérivée seconde y'', ...) ainsi que la variable x de la fonction.

Résoudre sur I une équation différentielle c'est déterminer **toutes** les fonctions y **dérivables** sur I qui vérifient cette équation.

Exemple : Des solutions de l'équation différentielle $y' = 2x$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$, par $x \mapsto x^2$ et , $x \mapsto x^2 - 3$.

I 2 Primitives d'une fonction continue sur un intervalle

DEFINITION :

Soit f une fonction **définie et continue** sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
On appelle **primitive** de f sur I, toute fonction solution de l'équation différentielle $y' = f$.
Ainsi, une primitive de f sur I est une fonction F, **dérivable** sur I, telle que $\forall x \in I,\ F'(x) = f(x)$.

Exemples :

- $x \mapsto \cos x$ est une primitive de la fonction $x \mapsto -\sin x$ sur $\mathbb{R}$.
- $x \mapsto \dfrac{3x+7}{x+2}$ et $x \mapsto \dfrac{1}{x+2}$ sont des primitives de $x \mapsto \dfrac{-1}{(x+2)^2}$ sur $]-2\,;+\infty[$.

I 3 Théorème : Fonction continue

PROPRIETE : (admis, sera démontrée dans le chapitre A8)

Toute fonction f **continue** sur un intervalle I admet **des** primitives sur I.

I 4 Ensemble des primitives d'une fonction

I 4 a Propriété

PROPRIETE :

Soit F une primitive sur un intervalle I d'une fonction f définie et continue sur I.

1) Pour tout réel k, la fonction G définie pour tout réel x de I par $G(x) = F(x) + k$ est **aussi une primitive** de f sur I.

2) **Toute** primitive de la fonction f est de **ce** type.
C'est-à-dire : **deux primitives** d'une **même fonction continue** sur un **intervalle diffèrent d'une constante**.

DEMONSTRATION :

(1) Si, pour tout réel x de I, G est la fonction définie par $G(x) = F(x) + k$, alors $G'(x) = F'(x) + 0 = f(x)$
donc G est aussi une primitive de f sur I.

(2) ♡ **Bac** ♡
Soient G et F deux primitives de f sur I.
On considère la fonction H définie sur I par $H(x) = G(x) - F(x)$, alors H est dérivable sur I et $H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$
La dérivée H' est la fonction nulle sur I ce qui signifie que H est une fonction constante sur I.
Ainsi, pour tout réel x de I, $H(x) = k$ où k est un réel. Soit $G(x) - F(x) = k$ donc $G(x) = F(x) + k$.

REMARQUE(S) :

Le résultat est faux si I n'est pas un **intervalle**.

Par exemple sur $\mathbb{R}^*$, qui n'est pas un intervalle, les fonctions : $x \mapsto \dfrac{1+|x|}{x}$ et $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sont deux primitives de $x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$, mais **leur différence n'est pas constante**.

I 4 b Primitive vérifiant une condition

PROPRIETE :

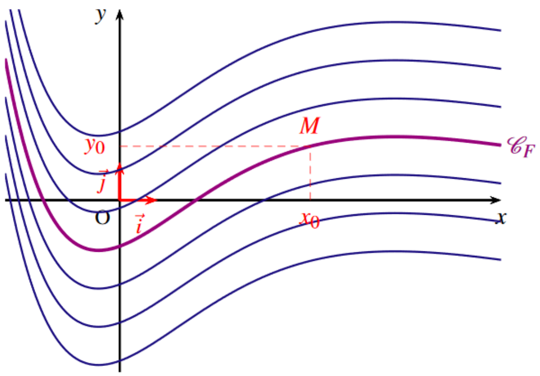
Soit f une fonction admettant des primitives sur un intervalle I.
Soit x_0 un réel de l'intervalle I et y_0 un réel quelconque.

Il existe une **unique** primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$.

DEMONSTRATION :

Soit G une primitive de f sur I.
D'après la propriété précédente, toutes les primitives de f sur I sont les fonctions $x \mapsto G(x) + k$ avec $k \in \mathbb{R}$.
On cherche donc la fonction F de ce type telle que $F(x_0) = y_0$, soit $G(x_0) + k = y_0$.
Il suffit de poser $k = y_0 - G(x_0)$.
Ainsi $F(x) = G(x) + y_0 - G(x_0)$ est l'unique fonction primitive telle que $F(x_0) = y_0$.

Graphiquement :



REMARQUE(S) :

La calculatrice donne les solutions des équations différentielles avec ou sans condition (Menu-4-D) :

$$\text{deSolve}(y' = x^2, x, y) \qquad \text{ou} \qquad \text{deSolve}(y' = x^2 \ \text{ and } y(0) = 1, x, y)$$

I 5 Recherche de primitives

I 5 a Primitives des fonctions usuelles (par lecture inverse du tableau des dérivées)

Fonction f	Une primitive F	Ensembles de validité
$f(x) = a$ (a est un réel quelconque)	$F(x) = ax$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$F(x) = \dfrac{x^2}{2}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ (n est un entier naturel)	$F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$	$F(x) = \dfrac{-1}{x}$	$]-\infty\,;0[$ ou $]0\,;+\infty[$
$f(x) = \dfrac{1}{x^n}$ (n est un entier naturel, $n \geqslant 2$)	$F(x) = \dfrac{-1}{(n-1)x^{n-1}}$	$]-\infty\,;0[$ ou $]0\,;+\infty[$
$\dfrac{1}{x}$	$F(x) = \ln x$	$]0\,;+\infty[$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x}$	$]0\,;+\infty[$

I 5 b Primitives et opérations sur les fonctions

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et u' sa dérivée.

Fonction f	Une primitive F
$f = u' + v'$	$F = u + v$
$f = \alpha\ u'$	$F = \alpha\ u$
$f = u'\ u$	$F = \frac{1}{2}\ u^2$
$f = u'\ u^n$ (n est un entier naturel non nul)	$F = \frac{u^{n+1}}{n+1}$
$f = u'\ e^u$	$F = e^u$
$f = \frac{u'}{u^2}$ (u ne s'annule pas sur l'intervalle I)	$F = -\frac{1}{u}$
$f = \frac{u'}{u^n}$ (u ne s'annule pas sur I et n entier naturel tq $n > 1$)	$F = -\frac{1}{(n-1)\ u^{n-1}}$
$f = \frac{u'}{u}$ ($u > 0$ sur l'intervalle I)	$F = \ln u$
$f = \frac{u'}{\sqrt{u}}$ ($u > 0$ sur l'intervalle I)	$F = 2\sqrt{u}$
$u(ax+b)$ ($a \neq 0$, pour tout x de J, $(ax+b) \in I$ et U primitive de u sur I)	$\frac{1}{a}U(ax+b)$
$u' \cos(u)$	$\sin(u)$
$u' \sin(u)$	$-\cos(u)$

II Équation différentielle $y' = ay$

DEFINITION :

Soit $a \in \mathbb{R}$. L'équation différentielle $y' = ay$ qui peut aussi s'écrire $y' - ay = 0$, est appelée

équation différentielle linéaire homogène du premier ordre à coefficients constants.

REMARQUE(S) :

- **linéaire** : en effet, il n'y a pas de y^2 ou de : $\cos(y)$ ...
- **premier ordre** : l'équation comporte pour inconnue y et sa dérivée première y' (pas de y'', ...)
- **homogène** ou "**sans** second membre" dans $y' - ay = 0$.

PROPRIETE :

Soit $a \in \mathbb{R}$. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ est **l'ensemble des fonctions** f_k définies sur $\mathbb{R}$ par

$\boxed{x \mapsto k\,\mathrm{e}^{ax}}$, où k est une constante réelle quelconque.

DEMONSTRATION :

♡ Bac ♡

- Soit $k \in \mathbb{R}$. Si $f_k : x \mapsto k\,\mathrm{e}^{ax}$ alors $f_k'(x) = a\,\mathrm{e}^{ax}$ et donc f_k est bien solution de l'équation différentielle $y' = ay$ (E).

- **Réciproquement,** soit f une solution de (E), montrons que $f : x \mapsto k\,\mathrm{e}^{ax}$.
Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x)\,\mathrm{e}^{-ax}$.
g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = f'(x)\,\mathrm{e}^{-ax} - af(x)\,\mathrm{e}^{-ax} = af(x)\,\mathrm{e}^{-ax} - af(x)\,\mathrm{e}^{-ax} = 0$
Ainsi g est une fonction constante, càd $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = k$ et par suite, $f(x) = k\,\mathrm{e}^{ax}$.

Exercice 1

Résoudre l'équation différentielle $y' = 3y$.

Exercice 2

1. Résoudre l'équation différentielle $2y' + 3y = 0$ (E).
2. Déterminer la solution f de (E) telle que $f(2) = 1$.

III Équation différentielle $y' = ay + b$

DEFINITION :

Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$. L'équation différentielle $y' = ay + b$ qui peut aussi s'écrire $y' - ay = b$, est appelée

équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants (avec second membre).

REMARQUE(S) :

Le "second membre" dans $y' - ay = b$ est b, soit une constante réelle. (On rappelle que l'adjectif **homogène** signifie "**sans** second membre")

PROPRIETE :

Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$.
L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ (E) est l'ensemble des fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\boxed{x \mapsto k\,\mathrm{e}^{ax} - \frac{b}{a}}$$, où k est une constante réelle quelconque.

Autrement dit, les solutions de cette équation différentielle sont de la forme $\boxed{f_k(x) = f(x) + f_0(x)}$,

où f est une solution de l'**équation homogène** associée : $y' = ay$ et f_0 une **solution particulière**, **fonction constante**, de l'équation (E).

DEMONSTRATION :

- Détermination de la fonction constante solution de (E).

  Soit f une fonction constante $x \mapsto k$, dire que f est solution de (E) signifie que $0 = ak + b$ donc $k = \dfrac{-b}{a}$.
- Dire que g est solution de (E) signifie $g' = ag + b$, or on sait que $f' = af + b$ également donc $g' - f' = a(g - f)$, autrement dit, la fonction $g - f$ est solution de l'équation homogène associée,
  donc d'après le paragraphe précédent, $(g - f)(x) = k\,\mathrm{e}^{ax}$, $k \in \mathbb{R}$.

Exercice 3

1. Résoudre l'équation différentielle $2y' + 3y = 2$ (E).
2. Déterminer la solution f de (E) telle que $f(2) = -\dfrac{1}{3}$.

IV Équation différentielle $y' = ay + f$

DEFINITION :

Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et f une fonction définie sur un intervalle I. L'équation différentielle $y' = ay + f$ qui peut aussi s'écrire $y' - ay = f$, est également appelée

équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants avec second membre.

REMARQUE(S) :

Le "second membre" dans $y' - ay = f$ est f, une fonction, pas nécessairement un réel.

PROPRIETE : (admise)

Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et f une fonction définie sur un intervalle I.

Toute solution dans I de l'équation différentielle $y' - ay = f$ est **la SOMME**

- d'une solution quelconque de l'équation **homogène** associée $y' - ay = 0$
- **ET** d'une solution **particulière** de $y' - ay = f$.

Exercice 4

1. Déterminer la fonction affine f, solution particulière de l'équation différentielle $2y' + 3y = 6x + 1$ (E).
2. En déduire la résolution de (E).