Fonctions trigonométriques

Analyse - Chapitre 6

Table des matières

Activités (HP)

Exercice 1 Activité 1

Dans un repère $(O\,;I\,;J)$, on considère un réel x appartenant à l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$, le point M du cercle trigonométrique associé à x, et le point T, intersection de la droite (OM) et de la tangente au cercle en I.

1(a) Montrer que $IT = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.

(b) En rangeant dans l'ordre croissant les aires des triangles OIM, OIT et celle du secteur de disque OIM, montrer que, pour tout réel x de $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$, $\sin x \leqslant x \leqslant \dfrac{\sin x}{\cos x}$

(c) En déduire que, pour tout x de $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$, $\cos x < \dfrac{\sin x}{x} < 1$

On admet de même que cet encadrement est également vrai lorsque $x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;0\right[$.

(d) En déduire, en utilisant la définition, que la fonction sinus est dérivable en zéro et que $\sin' 0 = 1$.

2(a) Montrer que pour tout réel h non nul de l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$, on a : $\dfrac{\cos h - 1}{h} = \dfrac{\sin h}{h} \times \dfrac{-\sin h}{\cos h + 1}$

(b) En déduire le nombre dérivé en zéro de la fonction cosinus.

Exercice 2 **Activité 2**

Dans un RON $(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j})$, soit le cercle trigonométrique C, et A et B deux points de ce cercle tels que $A(\cos a\ ; \sin a)$ et $B((\cos b\ ; \sin b)$.

1. Calculer le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ de deux manières différentes.
2. En déduire $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$.
3. En déduire alors que $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$.
4. En utilisant les formules de type $\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$, en déduire $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$ et $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$.

PROPRIETE :

Pour tous réels x et y, on a :

1. $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
2. $\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$
3. $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
4. $\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$

Sinus est sympa et facile et cosinus est compliqué et égoïste.

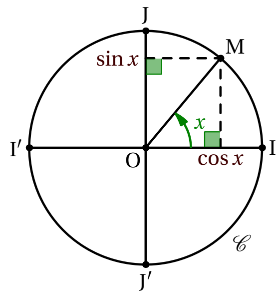
I Fonctions sinus et cosinus

I 1 Définition (rappels)

DEFINITION :

Soit x un nombre réel et M l'unique point du cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ associé à x.
On appelle **cosinus** et **sinus** de x (noté $\cos x$ et $\sin x$) les coordonnées de M dans le repère orthonormé $\left(O\,;I\,,J\right)$:

$$\overrightarrow{OM} = (\cos x)\,\overrightarrow{OI} + (\sin x)\,\overrightarrow{OJ}$$



La **fonction** qui à tout réel x associe l'**abscisse** du point M est appelée fonction **cosinus**.
La **fonction** qui à tout réel x associe l'**ordonnée** du point M est appelée fonction **sinus**.

REMARQUE(S) :

On a pour tout réel x : $\boldsymbol{\cos^2 x + \sin^2 x = 1}$ $\left(OM^2 = 1 = \left\|\overrightarrow{OM}\right\|^2 = \cos^2 x + \sin^2 x\right)$,
et $\boldsymbol{-1 \leqslant \cos x \leqslant 1}$ et $\boldsymbol{-1 \leqslant \sin x \leqslant 1}$.

I 2 Propriétés

I 2 a Périodicité

PROPRIETE : - Périodicité -

Les fonctions **cosinus** et **sinus** vérifient pour tout réel x, les relations suivantes : $\cos(x + \boldsymbol{2\pi}) = \cos x$ et $\sin(x + \boldsymbol{2\pi}) = \sin x$ On dit que $\boldsymbol{2\pi}$ est une **période** de la fonction cosinus et de la fonction sinus, ou encore que **les fonctions sinus et cosinus sont périodiques, de période** 2π.

DEMONSTRATION :

Le périmètre du cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ étant 2π, quel que soit l'entier relatif k, les réels $x + 2k\pi$ ont le même point associé M sur le cercle $\mathcal{C}$.

Cette propriété permet de restreindre l'intervalle d'étude des fonctions cosinus et sinus à n'importe quel intervalle de longueur 2π.

I 2 b Parité

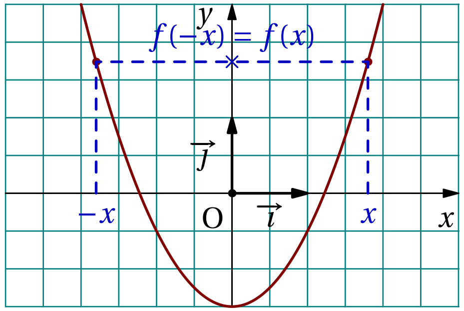
PROPRIETE : Parité d'une fonction

Soit une fonction f définie sur un ensemble $\mathcal{D}$, tel que pour tout $x \in \mathcal{D}$, alors $-x \in \mathcal{D}$ (**l'ensemble de définition est centré sur 0**).
Si **pour tout** $x \in \mathcal{D}$:

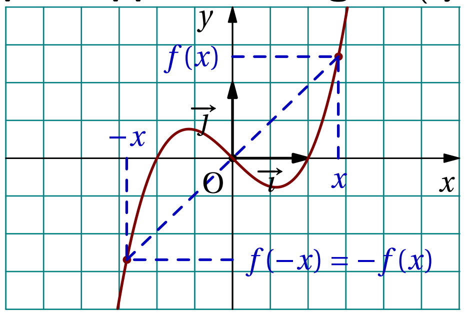
▶ $f(-x) = f(x)$, alors f est **paire** ; ▶ $f(-x) = -f(x)$, alors f est **impaire**.

Interprétation graphique :

Dans un repère orthogonal, la courbe représentative d'une fonction **paire** est **symétrique par rapport à l'axe des ordonnées** (symétrie axiale) :



Dans un repère, la courbe représentative d'une fonction **impaire** est **symétrique par rapport à l'origine** (symétrie centrale) :



PROPRIETE :

Comme $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$,
la fonction **sinus** est **impaire** sur $\mathbb{R}$ et la fonction **cosinus** est **paire** sur $\mathbb{R}$.

Pour la représentation graphique, grâce aux propriétés, nous pouvons restreindre à :

- $[0\,;\pi]$ l'intervalle d'étude de $x \mapsto \cos x$, puis utiliser la **symétrie d'axe** (Oy) ;
- $[0\,;\pi]$ l'intervalle d'étude de $x \mapsto \sin x$, puis utiliser la **symétrie de centre** O.

Dans les deux cas, nous obtenons les courbes représentatives sur un intervalle de longueur 2π : l'intervalle $[-\pi\,;\pi]$.

II Étude des fonctions sinus et cosinus en 0

II 1 Dérivabilité en 0

PROPRIETE :

Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables en 0. On a : $\sin' 0 = 1$ et $\cos' 0 = 0$.

DEMONSTRATION :

cf. activité

II 2 Limites à connaître

PROPRIETE :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$$

DEMONSTRATION :

cf. activité

III Étude de la fonction sinus

III 1 Dérivée

PROPRIETE :

La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x : $\mathbf{\sin'(x) = \cos(x)}$.

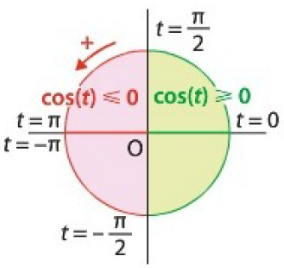
DEMONSTRATION :

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}^*$. $\dfrac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \dfrac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} = \sin x \dfrac{\cos h - 1}{h} + \cos x \dfrac{\sin h}{h}$.

Or $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x} = 0$

donc $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \cos x$, qui est réel. Donc, la fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathbf{\sin'(x) = \cos(x)}$.

III 2 Sens de variations

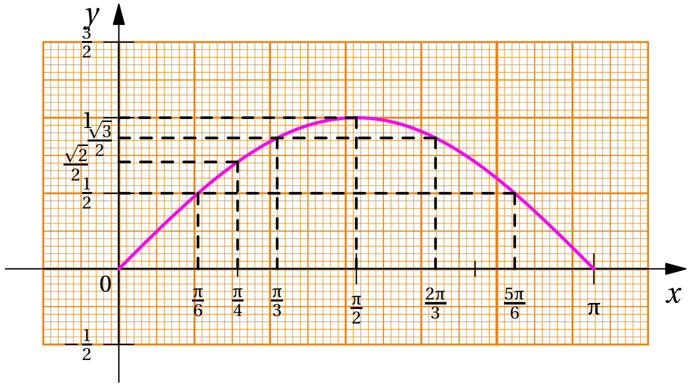


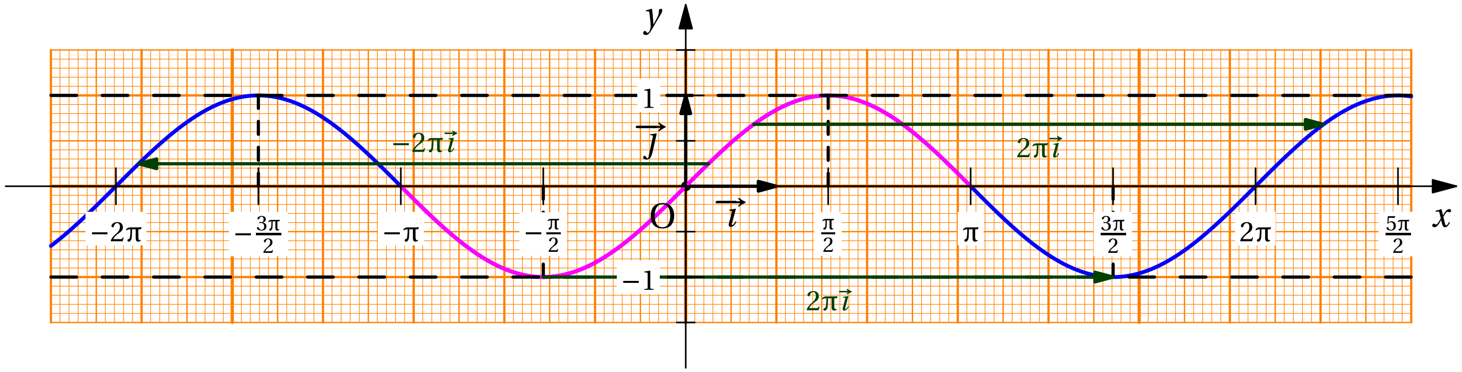
x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin' x = \cos x$		$+$	0	$-$	
$\sin$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Puis on utilise la symétrie centrale de la courbe représentative de la fonction sinus par rapport à O. Et on obtient les variations sur une période $]-\pi\,;\pi]$:

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

III 3 Courbe représentative





IV Étude de la fonction cosinus

IV 1 Dérivée

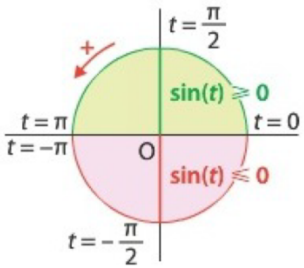
PROPRIETE :

La fonction cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x : $\boldsymbol{\cos'(x) = -\sin(x)}$

DEMONSTRATION :

A faire en activité ... (idem sinus)

IV 2 Sens de variations

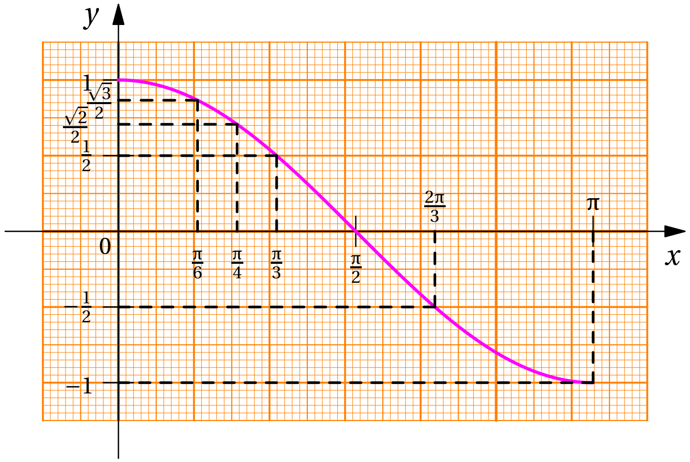


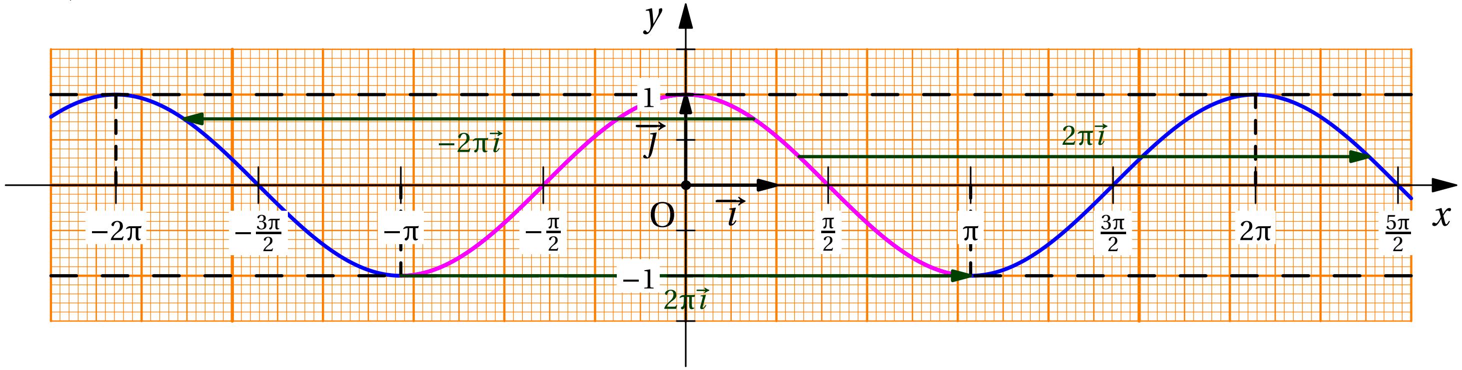
x	0		π
$\cos' x = -\sin x$	0	$-$	0
$\cos$	1	↘	-1

Courbe symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

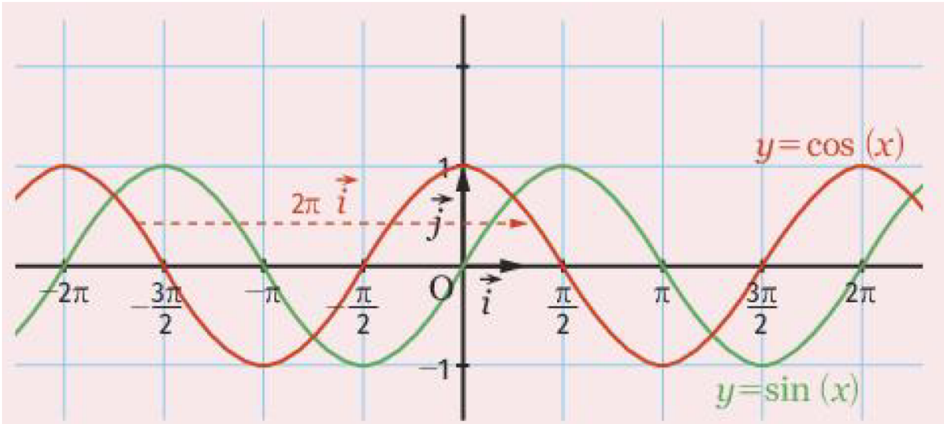
x	$-\pi$		0		π
$\cos$	-1	↗	1	↘	-1

IV 3 Courbe représentative





V Comparaison des deux courbes



VI Limites

PROPRIETE :

Les fonctions sinus et cosinus **n'admettent de limite ni en** $+\infty$, ni en $-\infty$.

DEMONSTRATION :

1) Montrons que ces fonctions ne peuvent admettre de limite infinie.
On sait $\forall x \in \mathbb{R}$, $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ donc si ces fonctions admettent une limite, il est nécessaire que celle-ci appartienne à l'intervalle $[-1\ ;1]$.

2) Montrons par l'absurde qu'elles n'admettent pas de limite.
Supposons que la fonction sinus admette une limite finie, notée l en $+\infty$.
Alors on sait que pour tout nombre réel non nul ϵ qu'il existe un réel M tel que pour tout $x > M$, $l - \epsilon < \sin x < l + \epsilon$.
Prenons par exemple, $\epsilon = 0,1$ (vrai pour tout ϵ non nul donc en particulier pour 0,1)

Or sur l'intervalle $[M\ ;+\infty[$, il existe une infinité de nombres réels $x = \dfrac{\pi}{2} + k \times 2\pi$ $(k \in \mathbb{N})$ et tels que $\sin x = 1$
et également une infinité de nombres réels $x = \dfrac{-\pi}{2} + k \times 2\pi$ $(k \in \mathbb{N})$ tels que leur sinus vaut -1.
Or -1 et 1 n'appartiennent pas à l'intervalle $]1 - \epsilon\ ; l + \epsilon[$ d'amplitude 0,2.
Donc sinus n'admet pas de limite finie en $+\infty$. (démo analogue en $-\infty$ et pour cosinus)

REMARQUE(S) :

Cependant, des fonctions construite avec sinus et cosinus peuvent admettre des limites en $+\infty$ et en $-\infty$.
Ex déjà traité $\dfrac{\sin x}{x}$ en $+\infty$. (th des gendarmes)

VII Complément dérivées de composées de fonctions

PROPRIETE :

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.
Alors les fonctions définies sur I par $f : x \mapsto \cos[u(x)]$ et $g : x \mapsto \sin[u(x)]$ sont dérivables sur I

et $\forall x \in I$, $f'(x) = -u'(x)\sin[u(x)]$ et $g'(x) = u'(x)\cos[u(x)]$

VIII Résolution d'équations et d'inéquations trigonométriques

VIII 1 Équations de type $\cos x = a$ et $\sin x = a$

VIII 1 a $\cos x = a$

Méthode : Résoudre $\cos x = a$ avec $a \in \mathbb{R}$. Cela revient à chercher les points-images sur le cercle dont l'abscisse est égale à a.

1. Pour résoudre l'équation $\cos x = a$ pour $x \in \mathbb{R}$, on résout d'abord cette équation dans $]-\pi \,;\, \pi]$.
2. Dans le cas général, $a \in \,]-1 \,;\, 1[$. Il existe un unique nombre b dans $]0 \,;\, \pi[$ tel que $a = \cos b$.
   Les solutions de $\cos x = \cos b$ sont par conséquent b et $-b$.
3. Cas particuliers :
   • si $a < -1$ ou $a > 1$ alors l'équation n'admet aucune solution réelle.
   • si $a = -1$ alors il existe une unique solution sur $]-\pi \,;\, \pi]$: π.
   • si $a = 1$ alors il existe une unique solution sur $]-\pi \,;\, \pi]$: 0.
4. L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ est obtenu en soustrayant ou en ajoutant un nombre entier de fois 2π : $b+k\times 2\pi$ et $-b+k\times 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 3

Résoudre dans $]-\pi \,;\, \pi]$, puis dans $\mathbb{R}$, l'équation $\cos x = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 4

1. Résoudre dans $[0\ ;\ 2\pi[$, $\cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$, $\cos 2x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
3. Résoudre dans $\left[\dfrac{\pi}{2};\ 3\pi\right[$, $\cos 2x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

VIII 1 b $\sin x = a$

Méthode : Résoudre $\sin x = a$ avec $x \in \mathbb{R}$. Pour résoudre l'équation $\sin x = a$ pour $x \in \mathbb{R}$, on résout d'abord cette équation dans$]-\pi\ ;\ \pi]$.

1. Dans le cas général $a \in]-1\ ;\ 1[$, il existe un unique nombre b dans $\left]-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $a = \sin b$. L'équation est donc équivalente à $\sin x = \sin b$, ce qui est équivalent à $x = b$ ou $x = \pi - b$.
2. L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ est obtenu en soustrayant ou en ajoutant un nombre entier de fois 2π : $b + k \times 2\pi$ et $\pi - b + k \times 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 5

Résoudre l'équation $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 6

Résoudre dans $[0\ ;\ 2\pi[$, $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$.

VIII 2 Inéquations, quelques exemples

Exercice 7

Résoudre l'inéquation $\cos x > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ dans $]-\pi \; ; \; \pi]$.