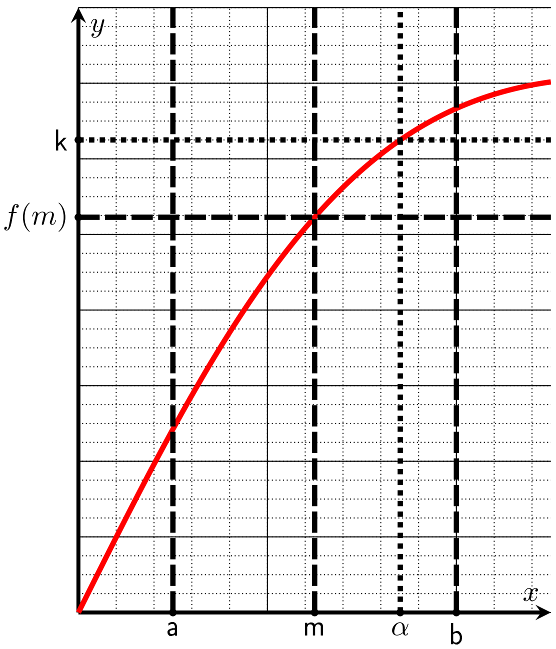
Dichotomie : donner une valeur approchée de la solution de l'équation $f(x) = k$

1) Le principe : corollaire du théorème des valeurs intermédiaires

Si f est une fonction **continue et strictement monotone** sur un intervalle $[a\,;b]$
et que k **est compris entre** $f(a)$ **et** $f(b)$
alors on sait que l'équation $f(x) = k$ admet une **unique solution** α dans l'intervalle $[a\,;b]$.

Pour gagner en efficacité sur la recherche de la solution, l'idée est de partager l'intervalle en son centre $m = \dfrac{a+b}{2}$, de tester si l'image de m est supérieure, ou inférieure, à k et en fonction, de garder la "bonne moitié" d'intervalle.
On répète le processus tant que l'**amplitude de l'intervalle** est supérieure à la **précision choisie**.

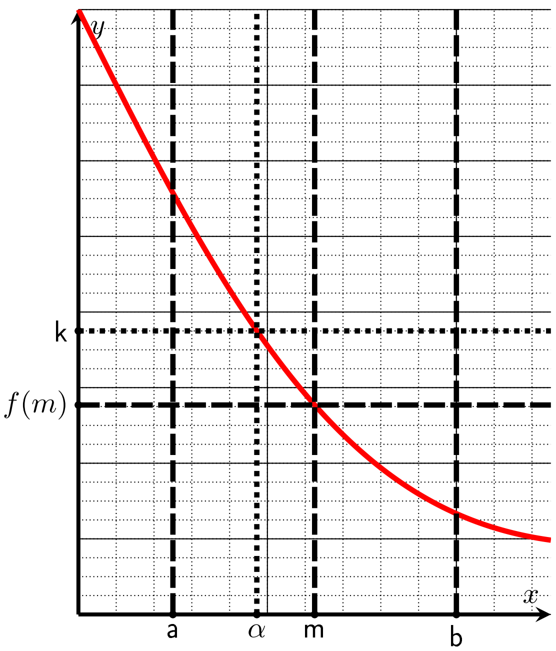
2) L'algorithme de base



Fonction **strictement croissante**

Paramètres à passer à l'appel de la fonction :
borne inférieure a, borne supérieure b, précision e et la valeur k

a prend la borne inférieure
b prend la borne supérieure
e prend la précision
Tant que $b - a > e$
    m prend $\dfrac{a+b}{2}$
    Si $f(m) > k$ **alors**
        b prend m
    Sinon
        a prend m
    Fin de si
Fin de tant que
renvoyer a et b



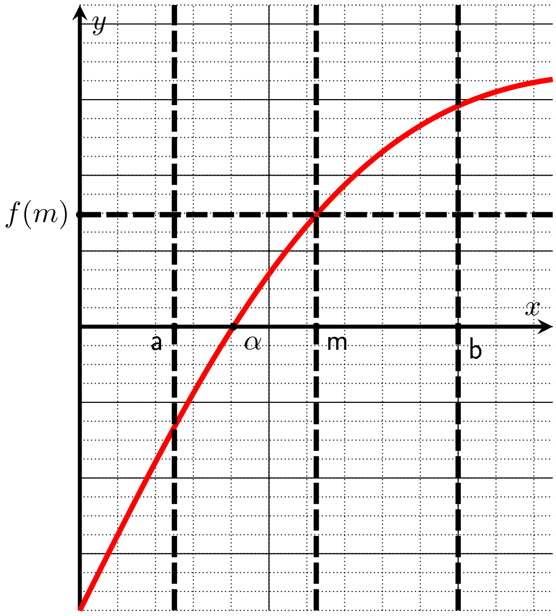
Fonction **strictement décroissante**

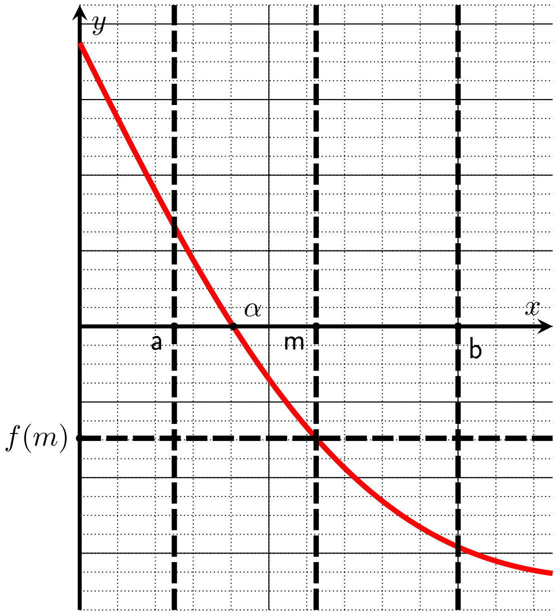
Paramètres à passer à l'appel de la fonction :
borne inférieure a, borne supérieure b, précision e et la valeur k

a prend la borne inférieure
b prend la borne supérieure
e prend la précision
Tant que $b - a > e$
    m prend $\dfrac{a+b}{2}$
    Si $f(m) > k$ **alors**
        a prend m
    Sinon
        b prend m
    Fin de si
Fin de tant que
renvoyer a et b

Remarque : On est obligé d'adapter l'algorithme selon le sens de variation de la fonction f.

3) Cas particulier où $k = 0$, amélioration car cet algorithme fonctionne lorsque f croit ou décroit

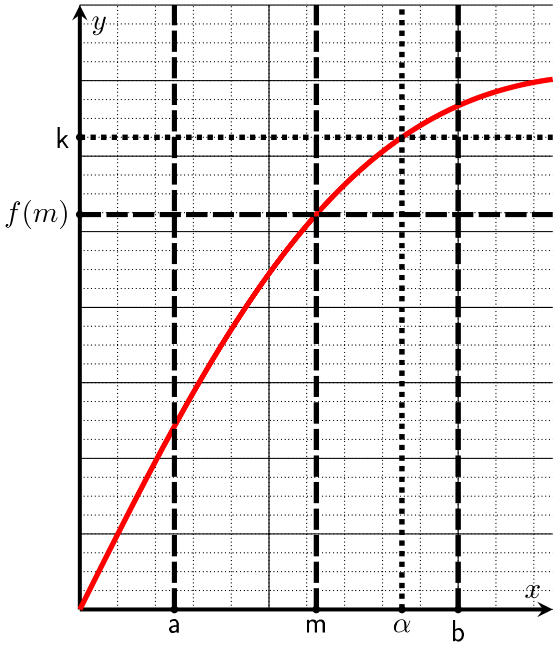


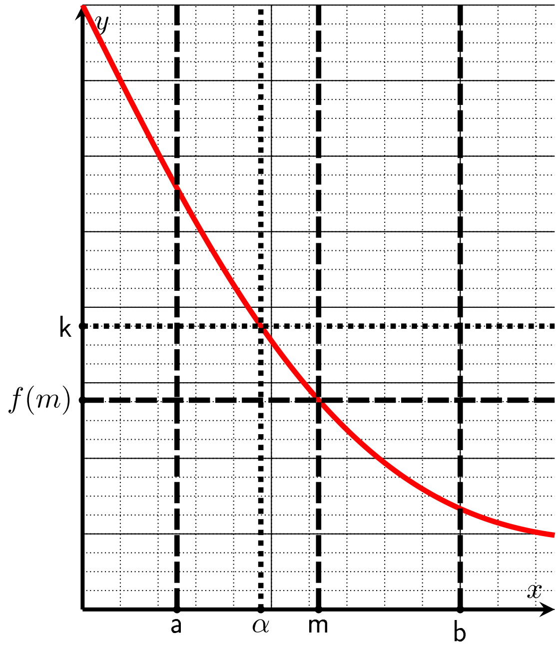


Paramètres à passer à l'appel de la fonction :
borne inférieure a, borne supérieure b et précision e

a prend la borne inférieure
b prend la borne supérieure
e prend la précision
Tant que $b - a > e$
  m prend $\dfrac{a+b}{2}$
  Si $f(m) \times f(a) < 0$ **alors**
    b prend m
  Sinon
    a prend m
  Fin de si
Fin de tant que
renvoyer a et b

4) Généralisation de la méthode précédente





Paramètres à passer à l'appel de la fonction :
borne inférieure a, borne supérieure b, précision e et la valeur k

a prend la borne inférieure
b prend la borne supérieure
e prend la précision
Tant que $b - a > e$
    m prend $\dfrac{a+b}{2}$
    Si $(f(m) - k) \times (f(a) - k) < 0$ **alors**
        b prend m
    Sinon
        a prend m
    Fin de si
Fin de tant que
renvoyer a et b

5) Programmes Python

Pour une fonction **strictement croissante** :

```python
from lycee import *
def f(x):
    y=(25*x-32)*exp(-x)
    return y

def dicho(a,b,e,k):
    while (b-a)>=e:
        m=(a+b)/2
        if f(m)>k:
            b=m
        else:
            a=m
    return a,b
```

```python
from lycee import *
def f(x):
    y=x**3+7*x**2+25*x
    return y
def dicho(a,b,k,e):
    while (b-a)>=e:
        m=(a+b)/2
        F=f(a)-k
        G=f(m)-k
        if F*G<=0:
            b=m
        else:
            a=m
    return a,b
```