

Limites de fonctions et compléments à la dérivation

Analyse - Chapitre 3

Table des matières

I	Limite d'une fonction à l'infini	1
I 1	Limite finie à l'infini	1
I 2	Limite infinie à l'infini	3
II	Limite infinie en un réel	5
II 1	Définition	5
II 2	Interprétation graphique et asymptote verticale	6
II 3	Limite à gauche, limite à droite	7
II 4	Fonctions de référence	8
III	Opérations sur les limites	9
III 1	Somme, produit, quotient	9
III 2	Exemple général	9
III 3	Quelques calculs de limites	9
III 4	Limite d'une fonction composée	10
IV	Limites et comparaison	11
IV 1	Théorème de comparaison	11
IV 2	Théorème des gendarmes	12
V	Limites de la fonction exp	13
V 1	Limites en infini	13
V 2	Des limites importantes	14
VI	Compléments à la dérivation	17
VI 1	Dérivée d'une fonction composée	17
VI 2	Dérivée de la fonction $x \mapsto \sqrt{u(x)}$	17
VI 3	Dérivée de la fonction $x \mapsto (u(x))^n$, $n \in \mathbb{Z}^*$	18
VI 4	Dérivée de la fonction $x \mapsto e^{u(x)}$	18

I Limite d'une fonction à l'infini

I 1 Limite finie à l'infini

I 1 a Définition

DEFINITION :

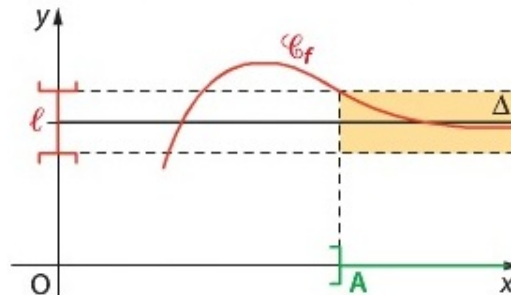
- Soit l un réel et f une fonction définie sur intervalle $I =]A; +\infty[$, avec A un réel, ou $I = \mathbb{R}$.
On dit que $f(x)$ tend vers l quand x tend vers $+\infty$ si tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand.
On note : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$.
- Soit l un réel et f une fonction définie sur intervalle $I =]-\infty; A[$, avec A un réel, ou $I = \mathbb{R}$.
On dit que $f(x)$ tend vers l quand x tend vers $-\infty$ si tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez petit.
On note : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$.

REMARQUE(S) :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ si et seulement si $\forall \epsilon \in \mathbb{R}^{**+}, \exists A \in \mathbb{R}$ tq $\forall x > A, f(x) \in]l - \epsilon; l + \epsilon[$.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$ si et seulement si $\forall \epsilon \in \mathbb{R}^{**+}, \exists A \in \mathbb{R}$ tq $\forall x < A, f(x) \in]l - \epsilon; l + \epsilon[$.

I 1 b Interprétation graphique et asymptote horizontale

Quel que soit l'intervalle ouvert contenant l , et aussi petit soit-il, il existe un nombre A tel que la courbe C_f restreinte à l'intervalle $]A; +\infty[$ soit située dans la partie colorée ci-dessous :



DEFINITION :

Soit f une fonction et l un réel.

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$, alors on dit que la droite d'équation $y = l$ est une **asymptote horizontale** à la courbe de f en $+\infty$. (Même définition en $-\infty$)

REMARQUE(S) :

Dans ce cas, la position de la courbe représentative de f par rapport à son asymptote est donnée par le signe de $f(x) - l$.

Dans la suite du chapitre, on admettra que les fonctions utilisées dans les définitions et propriétés sont définies au moins sur un intervalle en adéquation avec la limite étudiée.

I 1 c Fonctions de référence**PROPRIETE :**

- Les fonctions $x \mapsto \frac{1}{x}$, $x \mapsto \frac{1}{x^2}$, $x \mapsto \frac{1}{x^n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$), $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x \mapsto \frac{1}{|x|}$ ont pour limite 0 en $+\infty$.
- Les fonctions $x \mapsto \frac{1}{x}$, $x \mapsto \frac{1}{x^2}$, $x \mapsto \frac{1}{x^n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$), $x \mapsto \frac{1}{|x|}$ ont pour limite 0 en $-\infty$.

DEMONSTRATION :

Pour $x \mapsto \frac{1}{x^2}$: Soit I un intervalle ouvert contenant 0. Posons alors $I =]\lambda ; \mu[$ avec $\lambda < 0$ et $\mu > 0$.

$$\frac{1}{x^2} \in]\lambda ; \mu[\Leftrightarrow \lambda < \frac{1}{x^2} < \mu$$

$$\Leftrightarrow 0 < \frac{1}{x^2} < \mu \text{ (car } \lambda < 0)$$

$$\Leftrightarrow x^2 > \frac{1}{\mu} \text{ (car la fonction inverse est strictement décroissante sur } \mathbb{R}_+^*.)$$

$$\Leftrightarrow x < -\frac{1}{\sqrt{\mu}} \text{ ou } x > \frac{1}{\sqrt{\mu}}. \text{ Donc pour } x \text{ assez grand, mais aussi pour } x \text{ assez petit, } I \text{ contient tous les } \frac{1}{x^2}, \text{ donc } \boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0}.$$

I 2 Limite infinie à l'infini

I 2 a Définition

DEFINITION :

Soit f une fonction.

On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ si tout intervalle de la forme $]A; +\infty[$ contient **toutes** les valeurs de $f(x)$ pour x **assez grand**.

On note : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

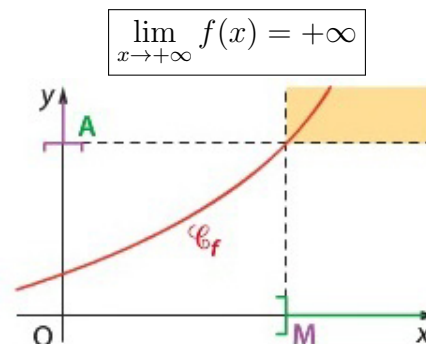
On définit de même $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

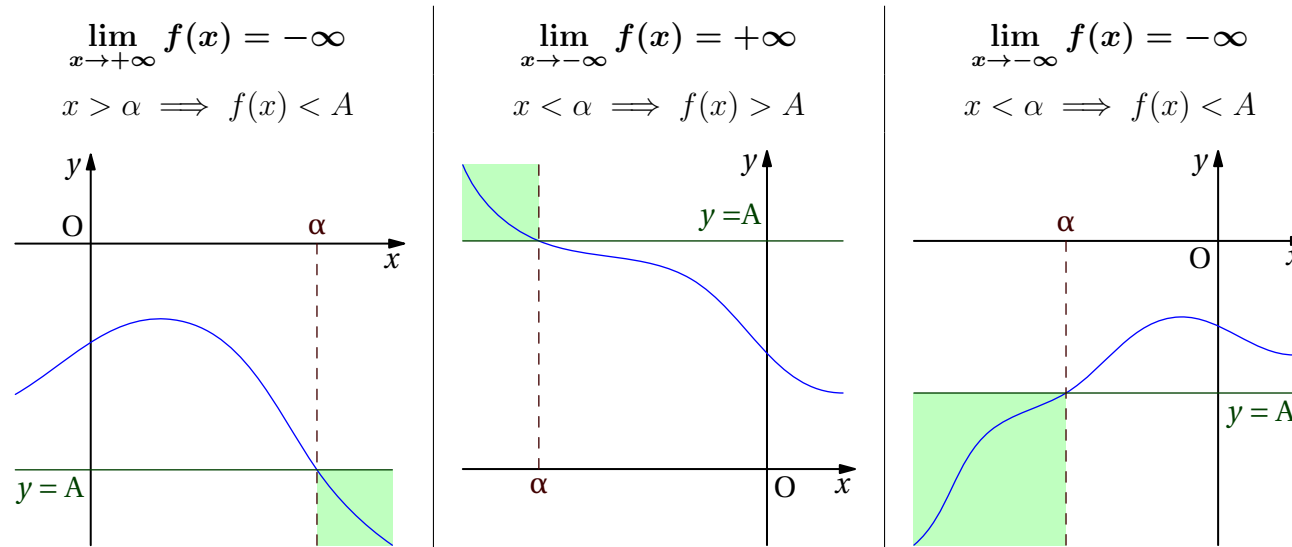
REMARQUE(S) :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ si et seulement si $\forall A \in \mathbb{R}, \exists M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x > M, f(x) > A$.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ si et seulement si $\forall A \in \mathbb{R}, \exists M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x < M, f(x) > A$. (faire écrire les autres)

I 2 b Interprétation graphique

La courbe C_f restreinte à l'intervalle $]M; +\infty[$ est dans la partie colorée ci-dessous :





Exercice 1

Démontrer à l'aide de la définition que $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x - x^2) = -\infty$.

REMARQUE(S) :

Une fonction n'admet pas nécessairement de limite en $\pm\infty$; par exemple les fonctions trigonométriques : cosinus, sinus

I 2 c Fonctions de référence

PROPRIETE :

- Les fonctions $x \mapsto x$, $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$), $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto |x|$ ont pour limite $+\infty$ en $+\infty$.
- Les fonctions $x \mapsto x$, $x \mapsto x^3$, $x \mapsto x^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$, n impair) ont pour limite $-\infty$ en $-\infty$.
- Les fonctions $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$, n pair), $x \mapsto |x|$ ont pour limite $+\infty$ en $-\infty$.

DEMONSTRATION :

Pour $x \mapsto x^2$ en $-\infty$: Soit $I =]A; +\infty[$ avec A un réel strictement positif. $x^2 > A \Leftrightarrow x > \sqrt{A}$ ou $x < -\sqrt{A}$.
Donc pour $x < -\sqrt{A}$, $x^2 \in I$: I contient tous les x^2 pour x assez petit, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$.

II Limite infinie en un réel

II 1 Définition

DEFINITION :

Soient f une fonction et a un réel.

On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers a si tout intervalle de la forme $]B; +\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez proche de a .

On note $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$

$\forall B \in \mathbb{R}, \exists \epsilon > 0$ tel que $\forall x \in]a - \epsilon; a + \epsilon[, f(x) > B$

On définit de même $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$.

REMARQUE(S) :

- **Continuité** : Lorsque f est définie en a , on admettra que : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ (car f est continue en a).
- Si f est restreinte à l'intervalle $]a; +\infty[$ (limite à droite de a) : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ si et seulement si $\forall B \in \mathbb{R}, \exists \epsilon \in \mathbb{R}^{*+}$ tq $\forall x \in]a; a + \epsilon[, f(x) > B$.

II 2 Interprétation graphique et asymptote verticale

DEFINITION :

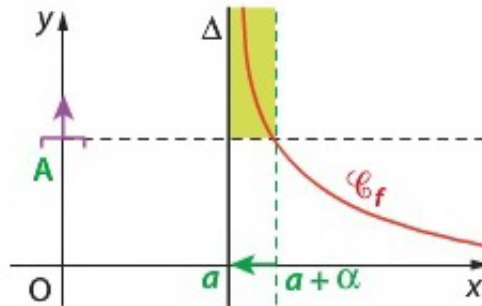
Soient f une fonction et a un réel.

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$, on dit que la droite d'équation $x = a$ est **asymptote verticale** à la courbe de f .

REMARQUE(S) :

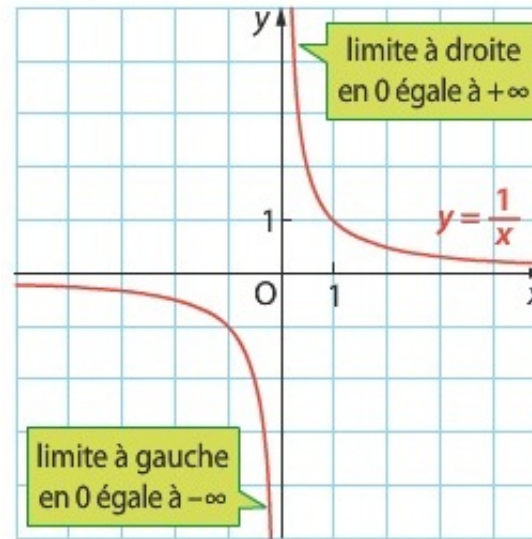
Ce résultat reste valable si $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = +\infty$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = -\infty$, ou si $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = -\infty$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = +\infty$.

La courbe C_f restreinte à l'intervalle $]l; l + \epsilon[$ est dans la partie colorée ci-dessous :



II 3 Limite à gauche, limite à droite

Étudions la fonction f définie sur \mathbb{R}^* par $f(x) = \frac{1}{x}$ lorsque x prend des valeurs de plus en plus proches de 0.



On remarque qu'on ne peut pas conclure directement sur la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0 sans distinguer deux cas : x positif ou x négatif.

Cas où $x > 0$:

Quel que soit le nombre $B > 0$, $\frac{1}{x} > B \Leftrightarrow x < \frac{1}{B}$ (car la fonction inverse est strictement décroissante sur \mathbb{R}_+).

Autrement dit, quel que soit $B > 0$, si $x < \frac{1}{B}$, l'intervalle $]B; +\infty[$ contient les nombres $f(x)$.

On dit que la **limite à droite en 0** de la fonction f est $+\infty$ et on le note $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$.

Cas où $x < 0$:

On prouve de manière analogue que lorsque x tend vers 0 en prenant des valeurs strictement inférieures à 0, alors $\frac{1}{x}$ tend vers $-\infty$.

On dit que la **limite à gauche en 0** de la fonction f est $-\infty$ et on le note $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = -\infty$.

II 4 Fonctions de référence

PROPRIETE :

- Les fonctions $x \mapsto \frac{1}{x^2}$, $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x \mapsto \frac{1}{|x|}$ ont pour limite $+\infty$ en 0.
- Les fonctions $x \mapsto \frac{1}{x}$ et $x \mapsto \frac{1}{x^3}$ ont pour limite $-\infty$ quand x tend vers 0 par valeurs inférieures (« à gauche ») et $+\infty$ quand x tend vers 0 par valeurs supérieures (« à droite »)

Faire écrire ces résultats avec la notation \lim .

DEMONSTRATION :

Pour $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ en 0 : Soit $]B; +\infty[$ avec B un réel.

Si $B \leq 0$, alors le résultat est immédiat car pour tout réel x non nul, $\frac{1}{x^2} \geq 0$.

Supposons maintenant que B est strictement positif.

$$\frac{1}{x^2} \in]B; +\infty[\Leftrightarrow \frac{1}{x^2} > B$$

$$\Leftrightarrow x^2 < \frac{1}{B} \text{ (la fonction inverse étant strictement décroissante sur } \mathbb{R}_+^* \text{.)}$$

$$\Leftrightarrow |x| < \frac{1}{\sqrt{B}} \text{ (la fonction racine carrée étant strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^* \text{.)}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{B}} < x < \frac{1}{\sqrt{B}}$$

Donc il existe bien un intervalle I ouvert autour de 0 tq $\forall x \in I, f(x) > B$

Ainsi pour x assez proche de 0, $\frac{1}{x^2} \in I$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$.

III Opérations sur les limites

III 1 Somme, produit, quotient

Tableau des règles opératoires :

Les tableaux du chapitre « *Limites de suites* » sont à reprendre, en remplaçant les suites u et v par les fonctions f et g définies au voisinage d'un réel a ou de $+\infty$ ou $-\infty$.

III 2 Exemple général

Exercice 2

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{-5}{x+2}$ et C_f sa courbe représentative.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .
2. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. Préciser les asymptotes éventuelles à C_f .
3. Étudier les variations de f puis dresser son tableau de variations.
4. Tracer dans un repère orthonormé la courbe de la fonction f ainsi que ses asymptotes.

III 3 Quelques calculs de limites

Exercice 3

Déterminer les limites suivantes et en donner une interprétation graphique :

1) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \left(\frac{1}{x} + 2 \right) (x^2 - 1) ?$

2) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+1}{x+2} ?$

3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{x^2 - 4} ?$

4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x+1} ?$

III 4 Limite d'une fonction composée

$$\begin{array}{ccc} g & & f \\ x \mapsto & g(x) & \mapsto f[g(x)] = f \circ g(x) \end{array}$$

DEFINITION :

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et g une fonction définie sur un intervalle J telle que, pour tout $x \in J$, $g(x) \in I$.
On appelle fonction composée $f \circ g$ la fonction définie sur J telle que pour tout x de J , on a :

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

PROPRIETE :

On reprend les notations de la définition précédente.

Soient a , b et L des réels ou éventuellement $+\infty$ ou $-\infty$. Si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$ et $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = L$, alors $\lim_{x \rightarrow a} (f \circ g)(x) = L$

Exercice 4

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$?
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 3x}$?

Exercice 5

Soit $f : x \mapsto \sqrt{\frac{4x-5}{x-1}}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .
2. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

IV Limites et comparaison

IV 1 Théorème de comparaison

PROPRIETE : - Théorème de comparaison -

Soient f et g deux fonctions définies sur $I =]A; +\infty[$ (ou $I = \mathbb{R}$) avec A un réel.

- Si pour tout x de I , $f(x) \geq g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
- Si pour tout x de I , $f(x) \leq g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

REMARQUE(S) :

- Ce théorème reste valable en $-\infty$ ou en un réel a .
- Ce théorème reste valable également si l'inégalité n'est vérifiée qu'au voisinage de $+\infty$ (respectivement de $-\infty$ ou de a).

DEMONSTRATION :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ donc tout intervalle de la forme $]A; +\infty[$ ($A \in \mathbb{R}$) contient toutes les valeurs de $g(x)$ pour x assez grand dans I .

Or pour tout $x \in I$, $f(x) \geq g(x)$.

Ainsi, l'intervalle $]A; +\infty[$ contient aussi toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand dans I . C'est-à-dire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

- Le deuxième point se démontre de manière analogue.

Exercice 6

Déterminer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de $x \mapsto \cos x - x$.

IV 2 Théorème des gendarmes

PROPRIÉTÉ : - Théorème des gendarmes (admis) -

Soient f , g et h trois fonctions définies sur $I =]A; +\infty[$ (ou $I = \mathbb{R}$), avec A un réel.

Soit l un réel.

Si pour tout x de I , $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, et si g et h ont la même limite l en $+\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$.

REMARQUE(S) :

- Ce théorème reste valable en $-\infty$ ou en un réel a .
- Ce théorème reste valable également si l'encadrement n'est vérifié qu'au voisinage de $+\infty$ (respectivement de $-\infty$ ou de a).

Exercice 7

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^* par $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.

1. Montrer que f a une limite en $+\infty$ et interpréter graphiquement cette limite. (*Attention, division par $x > 0$*)
2. Déterminer de même la limite de f en $-\infty$. (*Attention, division par $x < 0$*)
3. Déterminer la limite de f en 0. (*Utiliser le taux de variation de la fonction sin en 0*)

Exercice 8

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{2 + 3 \cos x}{x}$. Déterminer sa limite en $+\infty$.

V Limites de la fonction exp

V 1 Limites en infini

PROPRIETE :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0.$$

DEMONSTRATION :

♡ Bac ♡

1. Prouvons que pour tout x , $e^x \geq x$.

La fonction $\varphi: x \mapsto e^x - x$ est dérivable sur \mathbb{R} et $\varphi'(x) = e^x - 1$

$$e^x - 1 \geq 0 \iff e^x \geq 1 \iff e^x \geq e^0 \iff x \geq 0.$$

Donc $\varphi'(x) \geq 0$ sur $[0; +\infty[$ et $\varphi'(x) \leq 0$ sur $] -\infty; 0]$. D'après le tableau de variation de φ et le fait que $\varphi(0) = 1$, $\varphi(x) > 0$ sur \mathbb{R} .

Ainsi, pour tout réel x , $e^x \geq x$. D'après un théorème de comparaison, on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^{-x}}. \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty \text{ et } \lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty.$$

$$\text{Par passage à l'inverse, } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^{-x}} = 0. \text{ Donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0.$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
φ'	$-$	0	$+$
φ			

V 2 Des limites importantes

PROPRIETE :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

DEMONSTRATION :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x+0} - e^0}{x - 0}.$$

On reconnaît la limite, quand x tend vers 0, du taux de variation de la fonction exponentielle entre 0 et $0 + x$; or la fonction \exp est dérivable en 0, donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \exp'(0) = 1$.

PROPRIETE : Croissance comparée entre la fonction exponentielle et les puissance de x , en $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad (1) \text{ et plus généralement, } \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty} \quad (2), \text{ avec } n \text{ entier naturel supérieur ou égal à } 1. \quad \text{On a aussi } \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\sqrt{x}} = +\infty} \quad (3)$$

DEMONSTRATION :

1) ♥ Bac ♥

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$.

La fonction f est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout réel x , $f'(x) = e^x - x$.

Or, pour tout réel x , $e^x > x$ (vu au-dessus), donc $f'(x) > 0$. La fonction f est donc strictement croissante sur \mathbb{R} et $f(0) = 1$.

Ainsi, pour tout réel x strictement positif, $f(x) > 1 > 0$, d'où $e^x > \frac{x^2}{2}$, soit $\frac{e^x}{x} > \frac{x}{2}$ (car $x > 0$).

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2} = +\infty$ donc d'après le théorème de comparaison, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

2) ♥ Bac ♥

Pour n supérieur ou égal à 2, pour tout réel x non nul, $\frac{e^x}{x^n} = \frac{(e^{\frac{x}{n}})^n}{(n \times \frac{x}{n})^n} = \left(\frac{1}{n} \times \frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}\right)^n$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{n} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ donc par composition $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}} = +\infty$ et comme $\frac{1}{n} > 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} \times \frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}\right) = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} \times \frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}\right)^n = \frac{e^x}{x^n} = +\infty$

3) Admis

PROPRIETE : Croissance comparée entre la fonction exponentielle et les puissance de x , en $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0 \text{ (1) et plus généralement } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0 \text{ (2)}$$

DEMONSTRATION :

1) Posons $X = -x$. Ainsi, $xe^x = -Xe^{-X} = -\frac{X}{e^X}$.

On a vu précédemment que $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$, d'où, par passage à l'inverse, $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{X}{e^X} = 0$.

Ainsi, $\lim_{x \rightarrow -\infty} X = +\infty$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} \left(-\frac{X}{e^X}\right) = 0$. Donc par limite de fonction composée, $\lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x) = 0$.

2) Admis

Exercice 9

Dans les deux cas suivants, déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.

- $f: x \mapsto e^{3-x}$ sur \mathbb{R}

- $f: x \mapsto \frac{e^{2x}+2}{e^x-1}$ sur \mathbb{R}^* .

VI Compléments à la dérivation

VI 1 Dérivée d'une fonction composée

$$\begin{array}{ccc} g & & f \\ x \mapsto & g(x) \mapsto & f[g(x)] = f \circ g(x) \end{array}$$

PROPRIETE : (admise)

Si g est une fonction dérivable sur un intervalle I , et f une fonction dérivable sur un intervalle J tel que, pour tout réel x de I , $g(x)$ appartient à J , alors la fonction composée $f \circ g: x \mapsto f[g(x)]$ est **dérivable** sur I et, pour tout x de I :

$$(f \circ g)'(x) = g'(x) \times f'(g(x)) \quad \text{ou encore} \quad (f \circ g)' = g' \times f' \circ g .$$

Les 3 paragraphes suivants sont des conséquences de cette propriété.

VI 2 Dérivée de la fonction $x \mapsto \sqrt{u(x)}$

PROPRIETE :

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I , et telle que pour tout x de I , $u(x) > 0$.

Alors la fonction \sqrt{u} est dérivable sur I et :

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}} .$$

Exercice 10

Étudier la dérivabilité de $f: x \mapsto \sqrt{x^2 + 2}$.

VI 3 Dérivée de la fonction $x \mapsto (u(x))^n$, $n \in \mathbb{Z}^*$

PROPRIETE :

Soit n un entier non nul.

Si u est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I , et si lorsque n est strictement négatif, u ne s'annule pas sur I , alors la fonction u^n est dérivable sur I et $(u^n)' = nu'u^{n-1}$.

VI 4 Dérivée de la fonction $x \mapsto e^{u(x)}$

PROPRIETE :

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I .

Alors la fonction $e^u : x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I et $(e^u)' = u' e^u$.

Exercice 11

Étudier la dérivabilité de la fonction $h : x \mapsto e^{-3x^2}$.

REMARQUE(S) :

Sens de variation de e^u

Comme $(e^u)' = u' e^u$ et $e^u > 0$, les dérivées u' et $u' e^u$ sont de même signe.

Ainsi, si u est dérivable, alors les fonctions u et e^u ont le même sens de variation.