Limites de suites

Analyse - Chapitre 2

Table des matières

I Quelques rappels sur les suites (+ Fiche suites arith et géom)

I 1 Les méthodes pour étudier le sens de variation

SENS DE VARIATION - Rappel de méthode :
Pour étudier le sens de variation d'une suite, on choisit l'une des méthodes suivantes.
1) Étude du signe de $u_{n+1} - u_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
Si $u_{n+1} - u_n > 0$, alors la suite u est **strictement croissante**.
Si $u_{n+1} - u_n < 0$, alors la suite u est **strictement décroissante**.
2) Étude du rapport $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ (uniquement si tous les termes de la suite u sont **strictement positifs**), $\forall n \in \mathbb{N}$:
Si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, alors la suite u est **strictement croissante**.
Si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, alors la suite u est **strictement décroissante**.
3) Étude d'une fonction :
Si la suite u est définie de manière explicite, $u_n = f(n)$, alors la suite u a le même sens de variation que la fonction f sur $[0; +\infty[$.
4) Enfin, si u est une suite **arithmétique** de raison r, alors
si $r > 0$, u est **strictement croissante**, et
si $r < 0$, u est **strictement décroissante**.
5) De même, si u est une suite **géométrique** de raison q et de **premier terme positif**, alors
si $q > 1$, alors u est **strictement croissante**, et
si $0 < q < 1$, alors u est **strictement décroissante**
(résultats **contraires** si le premier terme est **négatif**).

6ème méthode : la récurrence

- On peut montrer qu'une suite est croissante en montrant **par récurrence** que $u_{n+1} \geqslant u_n$ pour tout n.
- On peut montrer qu'une suite est décroissante en montrant **par récurrence** que $u_{n+1} \leqslant u_n$ pour tout n.

Exercice 1

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + 3$ pour tout entier naturel n.
Montrer que la suite (u_n) est strictement décroissante.

I 2 fiche SA/SG

II Limite finie ou infinie d'une suite

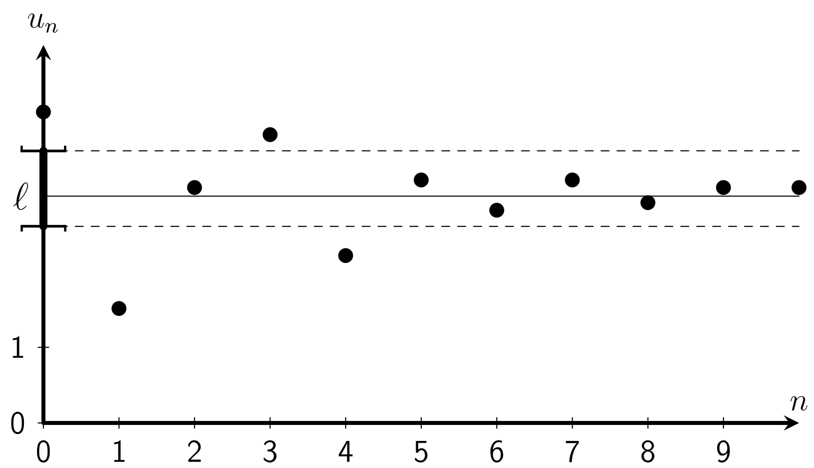
II 1 Limite finie : suite convergente

DEFINITION :

Soit une suite u et ℓ un réel.

On dit qu'une suite (u_n) a pour **limite** ℓ quand n tend vers $+\infty$, lorsque, quel que soit l'**intervalle ouvert** I contenant ℓ, I contient **toutes** les valeurs de (u_n) à partir d'un certain rang.

On note alors $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell}$ et la suite (u_n) est dite **convergente** (elle **converge vers** ℓ).



REMARQUE(S) :

1. Les suites de référence $n \mapsto \dfrac{1}{n}$, $n \mapsto \dfrac{1}{n^2}$, $n \mapsto \dfrac{1}{n^3}$, $n \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ convergent vers 0.
2. (théorème d'**unicité de la limite**, admis) Une suite convergente n'admet qu'**une seule limite**.

Exercice 2

Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+1}{n} = 1$.

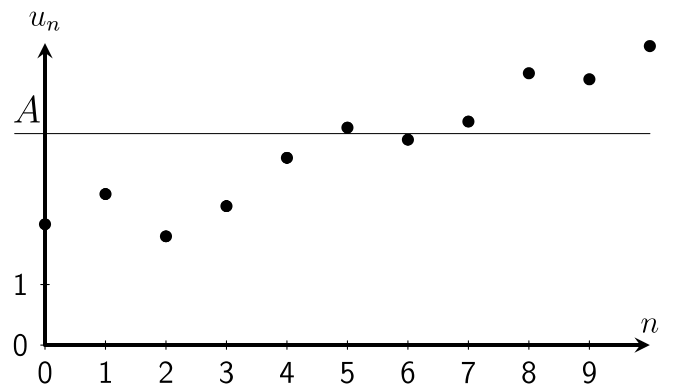
II 2 Limite infinie

DEFINITION :

Soit une suite u et A un réel.

On dit qu'une suite (u_n) a pour **limite** $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, lorsque, quel que soit le réel A, on a $u_n > A$ à partir d'un certain rang.

On note alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. On dit que la suite u **diverge** vers $+\infty$.



REMARQUE(S) :

1. Concrètement, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ veut dire que l'on peut rendre u_n **aussi grand que l'on veut** en prenant n suffisamment grand.
2. On définit de même $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ en montrant qu'à partir d'un certain rang, on a $u_n < A$.
3. Les suites de référence $n \mapsto n$, $n \mapsto n^2$, $n \mapsto n^3$, $n \mapsto \sqrt{n}$ tendent vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$.
4. L'expression « **à partir d'un certain rang** » peut se traduire par « pour tout $n \geqslant n_0$ » où n_0 est un entier fixé.
5. Dans les démonstrations, on utilisera parfois **la troncature à l'unité** d'un nombre **positif** x notée $E(x)$ et appelée **partie entière** de x. (On n'utilisera cette fonction que pour des nombres positifs, attention pour les nbs négatifs, la partie entière n'est pas égale à la troncature à l'unité...)
   Par exemple : $E(7,362) = 7$, $E(\pi) = 3$, etc. Notons que pour $x \geqslant 0$, $E(x)+1$ est le plus petit entier strictement supérieur à x.
6. Certaines suites **n'admettent pas de limite**.
   Par ex, la suite définie par $u_n = (-1)^n$. On dit alors que u **diverge** (ou **est divergente**).
7. En conséquence, l'adjectif "**divergente**" désigne une suite • qui tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ **ou bien** • qui **n'admet pas de limite** ...

Exercice 3

Montrer que la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \sqrt{n}$ a pour limite $+\infty$ en $+\infty$.

III Opérations sur les limites

Soit ℓ et ℓ' deux réels.

III 1 Limite d'une somme

Théorème admis : u et v deux suites dont les rôles, dans le tableau ci-dessous, peuvent être permutés.

Si u a pour limite	ℓ	ℓ ou $+\infty$	ℓ ou $-\infty$	$+\infty$
Si v a pour limite	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Alors $u+v$ a pour limite	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	? ? ? ? ? FI ? ? ? ? ?

III 2 Limite d'un produit

Théorème admis : u et v deux suites dont les rôles, dans le tableau ci-dessous, peuvent être permutés. Le signe de la limite infinie se détermine par la **règle des signes**.

Si u a pour limite	ℓ	$\ell \neq 0$	∞	0
Si v a pour limite	ℓ'	∞	∞	∞
Alors uv a pour limite	$\ell\ell'$	∞	∞	? ? ? ? ? FI ? ? ? ? ?

III 3 Limite d'un quotient $\dfrac{u_n}{v_n}$ lorsque $\lim\limits_{n\to\infty} v_n \neq 0$

Théorème admis : u et v deux suites. Le signe de la limite infinie se détermine par la règle des signes.

Si u a pour limite	ℓ	ℓ	∞	∞
Si v a pour limite	$\ell' \neq 0$	∞	$\ell' \neq 0$	∞
Alors $\dfrac{u}{v}$ a pour limite	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	∞	? ? ? ? ? FI ? ? ? ? ?

III 4 Limite d'un quotient $\dfrac{u_n}{v_n}$ lorsque $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0$

Théorème admis : u et v deux suites. Le signe de la limite infinie se détermine par la règle des signes.

Si u a pour limite	$\ell \neq 0$ ou ∞	0
Si v a pour limite	0 en gardant un signe constant à partir d'un certain rang	0
Alors $\dfrac{u}{v}$ a pour limite	∞ (signe : règle des signes)	? ? ? ? ? FI ? ? ? ? ?

III 5 Formes indéterminées

Les formes indéterminées sont au nombre de quatre :

$$\boxed{\infty - \infty \quad ; \quad 0 \times \infty \quad ; \quad \frac{\infty}{\infty} \quad ; \quad \frac{0}{0}.}$$

Une étude particulière est nécessaire à chaque fois.
Attention, ces **écritures ne doivent pas apparaitre** sur une copie !

• **Forme indéterminée** $\infty - \infty$:

u_n	v_n	$u_n + v_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n$
$3n+2$	$-n$				
n^2-2	$-n^2$				
$n+\dfrac{1}{n^2}$	$-n$				

• **Forme indéterminée** $\infty \times 0$:

u_n	v_n	$u_n \times v_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times v_n$
n^3	$\dfrac{1}{n^2}$				
n	$\dfrac{1}{n^3}$				
$3n^2$	$\dfrac{2}{n^2}$				

• Forme indéterminée $\dfrac{\infty}{\infty}$:

u_n	v_n	$u_n \div v_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \div v_n$
$3n^2$	n^2				
$-2n^2$	n				
$2n$	$-3n^2$				

• Forme indéterminée $\dfrac{0}{0}$:

u_n	v_n	$u_n \div v_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \div v_n$
$\dfrac{4}{n}$	$\dfrac{1}{n}$				
$\dfrac{2}{n}$	$\dfrac{3}{n^3}$				

Comment lever une indétermination ?

3 méthodes : simplifier l'expression (comme ci-dessus) ou factorisation (forcée) par le terme de plus haut degré ou quantité conjuguée

Exercice 4

Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n^3+3}{5n^4-8n^2+6n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(n-\sqrt{n^2+1}\right)$

IV Limites et comparaison

IV 1 Théorème de comparaison, divergence en l'infini

PROPRIETE : Théorème de comparaison

- Si (u_n) et (v_n) sont deux suites telles que $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, alors $\boldsymbol{\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty}$.
- Si (u_n) et (v_n) sont deux suites telles que $u_n \geqslant v_n$ à partir d'un certain rang et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$, alors $\boldsymbol{\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty}$.

DEMONSTRATION :

♡ Bac ♡

Soit A un nombre réel quelconque (aussi grand que l'on veut).

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, donc il existe un entier n_1 tel que pour tout $n \geqslant n_1$, $u_n \in]A\,;+\infty[$.

De plus, il existe un entier n_2 tel que pour tout $n \geqslant n_2$, $u_n \leqslant v_n$.

Soit N un entier supérieur ou égal à n_1 et n_2. Alors, pour tout $n \geqslant N$, $u_n > A$ et $u_n \leqslant v_n$.
D'où, pour tout $n \geqslant N$: $v_n > A$, c'est-à-dire $v_n \in]A\,;+\infty[$. Donc, par définition : $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.

Exercice 5

Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} (n^2 - (-1)^n)$

IV 2 Théorème d'encadrement, convergence en un réel

PROPRIETE : Théorème des gendarmes (admis)

Soit (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites telles que $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ à partir d'un certain rang.

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R}$ **alors** $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$.

Exercice 6

Soit (u_n) la suite de terme général $u_n = \dfrac{2+3\cos n}{n}$, pour tout entier $n > 0$. Déterminer sa limite.

V Convergences des suites monotones

V 1 Suite majorée, minorée, bornée

DEFINITION :

Soit (u_n) une suite de nombres réels. On dit que :

- La suite (u_n) est **majorée** s'il existe un réel M tel que, pour tout entier n, $\boldsymbol{u_n \leqslant M}$.
- La suite (u_n) est **minorée** s'il existe un réel m tel que, pour tout entier n, $\boldsymbol{m \leqslant u_n}$.
- La suite (u_n) est **bornée** si elle est à la fois **majorée et minorée**.

REMARQUE(S) :

1. Si une suite u admet un majorant (resp. minorant), alors ce majorant (resp. minorant) n'est pas unique :
   - si u est majorée par un réel M alors elle est majorée par tout réel supérieur à M.
   - si u est minorée par un réel m alors elle est minorée par tout réel inférieur à m.
2. - Si une suite admet un maximum, alors ce maximum est le plus petit des majorants.
   - Si une suite admet un minimum, alors ce minimum est le plus grand des minorants.
3. - Toute suite croissante est minorée par son 1er terme.
   - Toute suite décroissante est majorée par son 1er terme.

Exercice 7

Montrer que la suite (u_n) définie par $u_n = \sqrt{2+\cos n}$ est bornée.

Exercice 8

Montrer que la suite de terme général $u_n = 1 + 0,6 + 0,6^2 + \cdots + 0,6^n$ est majorée.

Exercice 9

Soit (v_n) définie par $v_0 = 0$ et $v_{n+1} = 2\sqrt{v_n} + 1$. Démontrer que (v_n) est bornée par 0 et 9.

V 2 Différents théorèmes

PROPRIETE :

Soit $\ell \in \mathbb{R}$,

- Si une suite (u_n) est croissante et admet une limite ℓ, alors la suite est majorée par ℓ.
- Si une suite (u_n) est décroissante et admet une limite ℓ, alors la suite est minorée par ℓ.

DEMONSTRATION :

Par l'absurde. Supposons qu'il existe un entier n_0 tel que $u_{n_0} > \ell$. (u_n) étant croissante, pour tout $n > n_0$, $u_n \geqslant u_{n_0}$ **(1)**.

$\ell > \ell - 1$ et $\ell < u_{n_0}$, donc $I =]\ell - 1\,;u_{n_0}[$ est un intervalle ouvert contenant ℓ.
Comme $\lim u_n = \ell$, l'intervalle I contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang : contradiction avec **(1)**. Donc, pour tout n : $u_n \leqslant \ell$.

PROPRIETE : Suites monotones non bornées

- Si une suite (u_n) est **croissante** et **non majorée**, alors $\boldsymbol{\lim u_n = +\infty}$.
- Si une suite (u_n) est **décroissante** et **non minorée**, alors $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty}$.

DEMONSTRATION :

♡ Bac ♡ Soit (u_n) une suite croissante, non majorée et A un réel quelconque.
Il existe un rang n_0 tel que $u_{n_0} > A$, puisque la suite n'est pas majorée.
La suite étant croissante, tous les termes $u_{n_0}, u_{n_0+1}, u_{n_0+2}, \ldots$ sont situés dans l'intervalle $]A\,;+\infty[$, ce qui traduit le fait que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
Le deuxième point se montre de même.

PROPRIETE : Théorème de la convergence monotone (admis)

- Si une suite est **croissante** et **majorée**, alors elle est **convergente**.
- Si une suite est **décroissante** et **minorée**, alors elle est **convergente**.

REMARQUE(S) :

Ce théorème, très important en analyse, affirme la convergence d'une suite, mais ne dit rien sur la valeur de sa limite.

Exemple : Le nombre d'Erdös (Paul Erdös (1913-1996))
On pose $u_1 = 0,2$; $u_2 = 0,23$; $u_3 = 0,235$; ... ; $u_7 = 0,2357111317$; ... (u_n s'écrit 0 virgule, suivi de la juxtaposition des n premiers nombres premiers.)
(u_n) est croissante majorée par 1, elle est donc convergente vers un mystérieux réel ℓ... Suite imaginée en 1945 par Paul Erdös (mathématicien hongrois).

Exemple : Algorithme de détermination d'un seuil
Soit (u_n) la suite définie par $u_n = 3\sqrt{n} - 1$.
On peut démontrer que (u_n) est croissante et que sa limite est $+\infty$.
Déterminer le rang n_0 à partir duquel on a $u_n \geqslant 10^2$ pour tout $n \geqslant n_0$.

($n_0 = 1134.$)

```
from math import*
def seuil():
    n=0
    u=-1
    while u<10**2:
        n=n+1
        u=3*sqrt(n)-1
    return n
```

VI Limites d'une suite géométrique

Soit u une suite géométrique de raison q, $q \in \mathbb{R}^*$, on a donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0\, q^n$.

Pour connaître la limite de la suite u, il suffit de connaître la limite de la suite v définie, $\forall n \in \mathbb{N}$, par $v_n = q^n$.

PROPRIETE :

- Si $q > 1$, alors $\boldsymbol{\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty}$.
- Si $q = 1$, alors la suite (q^n) est constante (et a pour limite 1).
- Si $-1 < q < 1$, alors $\boldsymbol{\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0}$.
- Si $q \leqslant -1$, alors la suite (q^n) est divergente et n'a pas de limite (admis).

DEMONSTRATION :

♡ Bac ♡

1. **Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 0$ et pour tout réel $x > 0$** : $\boxed{(1+x)^n \geqslant 1 + nx}$ (inégalité de Bernoulli).

   Soit $P(n)$ la proposition, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour $x \in]0\,;+\infty[$: $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$.
   - **Initialisation :** $(1+x)^0 = 1 + 0 \times x = 1$: $P(0)$ est vraie.
   - **Hérédité :** supposons qu'il existe k entier tel que : $(1+x)^k \geqslant 1 + kx$.
     Alors, $(1+x)^{k+1} \geqslant (1+kx)(1+x) = 1 + (k+1)x + kx^2$. Or, $kx^2 \geqslant 0$,
     donc $(1+x)^{k+1} \geqslant 1 + (k+1)x + kx^2 \geqslant 1 + (k+1)x$. Par conséquent, P_{k+1} est vraie.
   - **Conclusion :** $P(n)$ est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire, donc d'après le principe de récurrence, pour tout $n \geqslant 0$ et pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, $\boxed{(1+x)^n \geqslant 1 + nx}$.

2. **À l'aide d'un théorème de comparaison, en déduire que, si $\boxed{q > 1}$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$.**

   Posons $q = 1 + x$, avec $x > 0$. D'après 1., $q^n \geqslant 1 + n(q-1)$. Comme $q - 1 > 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} (1 + n(q-1)) = +\infty$, donc $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty}$.

3. **Et si $\boxed{-1 < q < 1}$ avec $q \neq 0$:** Si $q \in]-1\,;1[$, $\dfrac{1}{|q|} > 1$, donc $\lim \dfrac{1}{|q|^n} = +\infty$. Comme $|q^n| = \dfrac{1}{\frac{1}{|q|^n}}$, il en résulte que $\lim |q^n| = \lim q^n = 0$

Exercice 10

1) Étudier la limite de $3^n - 4^n$.
2) Déterminer la limite de la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3^2} + ... + \dfrac{1}{3^n}$
3) Déterminer la limite de la suite t définie sur $\mathbb{N}$ par $t_n = \dfrac{5^n}{(-3)^n}$

Fiche rappels sur l'ordre dans $\mathbb{R}$

Soit a et b des réels.

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad a < b \Longleftrightarrow a + x < b + x$
2. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad a < b \Longleftrightarrow ax < bx$
3. $\forall x \in \mathbb{R}_-^*, \quad a < b \Longleftrightarrow ax > bx$

Soit a et b des réels.

1. $0 \leqslant a < b$ entraîne $a^2 < b^2$ (stricte croissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}_+$)
2. $a < b \leqslant 0$ entraîne $a^2 > b^2$ (stricte décroissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}_-$)
3. $0 \leqslant a < b \Longleftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$ (stricte croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$)
4. $0 < a < b \Longleftrightarrow \dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b} > 0$ (stricte décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$)
5. $a < b < 0 \Longleftrightarrow 0 > \dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$ (stricte décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_-^*$)

Soit a, b, c et d des réels.

1. si $a < b$ et $c < d$ alors $a + c < b + d$.
2. si $0 < a < b$ et $0 < c < d$ alors $0 < ac < bd$.