Principe de récurrence

Analyse - Chapitre 1

Table des matières

Le principe du raisonnement par récurrence remonte à Pascal et Fermat (17è), et il a été axiomatisé par Peano à la fin du 19è.

Introduction : Démontrer (rigoureusement) que, pour tout n entier naturel, on a : $\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.

• **Initialisation :** on vérifie que la relation est vraie au rang 0 : $\frac{0 \times (0+1)}{2} = 0$.

• **Hérédité (ou transmission) :** on suppose que pour un rang k entier naturel quelconque, la proposition est vraie, et on démontre qu'alors elle est vraie au rang suivant : $k+1$.

$\sum_{i=0}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$ est donc supposée vraie et on veut démontrer $\sum_{i=0}^{k+1} i = \frac{(k+1)\left((k+1)+1\right)}{2}$, càd $\sum_{i=0}^{k+1} i = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$.

On a donc : $0+1+2+...+k = \frac{k(k+1)}{2}$, (HR)

On ajoute $(k+1)$ à gauche et à droite dans cette égalité : $0+1+2+...+k+(k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$

On réduit au même dénominateur à droite : $0+1+2+...+k+(k+1) = \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}$

En factorisant au numérateur par $(k+1)$ on obtient bien : $\sum_{i=0}^{k+1} i = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$.

• **Conclusion :** La proposition ayant été **initialisée au rang 0**, et étant **héréditaire**, en application du **principe de récurrence**, on peut donc en conclure que, pour tout n entier naturel, on a : $\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.

I Proposition mathématique

DEFINITION :

Une **proposition mathématique** est un énoncé portant sur des objets mathématiques ; elle peut être vraie ou fausse.
Le raisonnement par récurrence s'intéresse à des propositions portant sur des entiers naturels.

II Le principe du raisonnement par récurrence

Pour démontrer par récurrence qu'une proposition (P_n) est vraie pour tout entier naturel n supérieur à un entier n_0 fixé, on procède en trois étapes :

• 1ère étape : INITIALISATION
On **vérifie** que la proposition (P_{n_0}) est vraie, c'est-à-dire que la proposition est vraie pour le rang n_0.
On a ainsi **initialisé la récurrence**.

• 2ème étape : HÉRÉDITÉ
On **suppose** ensuite que pour **un** entier k quelconque ($k \geqslant n_0$) la proposition (P_k) est vraie et **sous cette hypothèse** (HR), on **démontre** que la proposition (P_{k+1}) est vraie.
On a ainsi prouvé que la proposition (P_k) est **héréditaire**.

• 3ème étape : CONCLUSION
Lorsque les deux étapes ont été réalisées, on conclut, **en application du principe de récurrence**, que la proposition (P_n) est vraie **POUR TOUT** entier naturel $n \geqslant n_0$.

III Exemple : une deuxième somme connue

Démontrer que, pour tout n entier naturel, et pour tout nombre réel q différent de 1, on a : $\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

- **Initialisation :** $q^0 = 1$ et $\frac{1-q^1}{1-q} = 1$: $P(0)$ est vraie.
- **Hérédité :** supposons qu'il existe k entier tel que : $\sum_{i=0}^{k} q^i = \frac{1-q^{k+1}}{1-q}$.

  Alors, en ajoutant q^{k+1} de part et d'autres : $\sum_{i=0}^{k+1} q^i = \frac{1-q^{k+1}}{1-q} + q^{k+1}$.

  donc, en réduisant au même dénominateur : $\sum_{i=0}^{k+1} q^i = \frac{1-q^{k+1}+(1-q)q^{k+1}}{1-q}$.

  soit $\sum_{i=0}^{k+1} q^i = \frac{1-q^{k+1}+q^{k+1}-q^{k+2}}{1-q}$ ou encore $\sum_{i=0}^{k+1} q^i = \frac{1-q^{k+2}}{1-q}$.

  Par conséquent, P_{k+1} est vraie. La proposition est donc héréditaire.
- **Conclusion :** $P(n)$ est vraie pour $n=0$ et est héréditaire, donc d'après le **principe de récurrence**, pour tout n entier naturel, et pour tout nombre réel q différent de 1, on a : $\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.